Corrigé succinct:

Exercice 1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière régulière Γ. On s'intéresse à l'équation

$$(1) \qquad \Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \text{et} \quad u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

où $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $g = G_{|\Gamma}$ avec $G \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

1) Montrer que qu'il existe une unique solution $u \in C^\infty(\Omega)$ de (1).

On se ramène au cas $g = 0$ en changeant u en $\tilde{u} = u - G$ et f en $\tilde{f} = f - \Delta G$. L'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ découle de l'inégalité de Poincaré et du théorème de Lax-Milgram. Pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ positive, on multiplie l'équation par $-\partial_k(\varphi^2 \partial_k u)$ $(k = 1 \dots d)$ et on intégre par partie pour obtenir un contrôle de $||\nabla \partial_k u||_2$ en fonction de $||\, u||_{H^1}$ qui est déjà contrôlé. Cela donne donc un contrôle de la norme H^2 et on itère le processus pour contrôler les dérivées à tout ordre.

NB: l'argument est formel car on n'a pas le droit de prendre $-\partial_k(\varphi^2 \partial_k u)$ comme fonction test: il faut prendre une régularisation (par ex des quotients différentiels) et passer à la limite.

Pour les questions 2,3,4,5, on considère le cas $\Omega = (0,1) \times (0,1)$.

2) Soit $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$ et

$$\mathbb{R}_h^2 = \{(mh, nh),\, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit également par $\Omega_h = \mathbb{R}_h^2 \cap \Omega$ l'ensemble des points intérieurs, et Γ_h l'ensemble des points de $\mathbb{R}_h^2$ qui ne sont pas dans Ω_h mais qui ont un voisin dans Ω_h. Enfin, on note $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$.

Une discrétisation du Laplacien est un opérateur linéaire $\Delta_h : \overline{\Omega}_h \to \Omega_h$. Si $v \in C(\overline{\Omega}_h)$, on note $v_h = v_{|_{\overline{\Omega}_h}}$.

Trouver une discrétisation Δ_h du Laplacien telle que

$$\forall v \in C^4(\overline{\Omega}), \qquad \|\Delta_h v_h - (\Delta v)_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \frac{h^2}{6} M$$

où M est une constante indépendante de h, et qui vérifie le principe du maximum discret: si $v \in \overline{\Omega}_h$ vérifie $\Delta_h v \geq 0$ sur Ω_h alors $\max_{\Omega_h} v \leq \max_{\Gamma_h} v$ avec égalité ssi v constante.

On prend

$$\Delta_h v(mh, nh) = \frac{v_{m+1,n} + v_{m-1,n} + v_{m,n+1} + v_{m,n-1} - 4v_{mn}}{h^2}$$

et l'inégalité découle de la formule de Taylor avec $M = \max\{||\partial_x^4 v||_\infty, ||\partial_y^4 v||_\infty\}$.

Si le maximum est atteint en un point x_0 et que l'on note $x_1, \dots x_4$ ses voisins alors

$$4v(x_0) = \sum_{i=1}^4 v(x_i) - h^2 \Delta_h v(x_0) \leq \sum_{i=1}^4 v(x_i) \leq 4v(x_0),$$

et l'on déduit facilement le résultat.

3) Ecrire explicitement l'équation discrète correspondant à (1) avec ce choix de Δ_h, dans le cas $N = 4$, puis dans le cas général.

On a dans le cas $N = 4$ la formulation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} A & I & 0 \\ I & A & I \\ 0 & I & A \end{pmatrix} U = F, \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

et où

$U = (u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, u_{3,2}, u_{1,3}, u_{2,3}, u_{3,3})^T,$

$F = (h^2 f_{1,1} - u_{1,0} - u_{0,1}, h^2 f_{2,1} - u_{2,0}, h^2 f_{3,1} - u_{3,0} - u_{4,1}, h^2 f_{1,2} - u_{0,2}, h^2 f_{2,2}, h^2 f_{3,2} - u_{4,2},$
$\quad h^2 f_{1,3} - u_{0,3} - u_{1,4}, h^2 f_{2,3} - u_{2,4}, h^2 f_{3,3} - u_{4,3} - u_{3,4})^T;$

le résultat se généralise facilement.

4) Montrer qu'il existe une unique solution u_h à l'équation discrète et que

$$\|u_h\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_h)} \leq \frac{1}{8}\|f\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|g\|_{L^\infty(\Gamma_h)}.$$

Puisqu'on est en dimension finie, il suffit de montrer l'injectivité pour répondre à la première partie de la question. C'est une conséquence directe du principe du maximum. Pour l'inégalité de stabilité, on introduduit la fonction

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4}(x - 1/2)^2 + \frac{1}{4}(y - 1/2)^2,$$

qui vérifie $\Delta\psi = 1$ sur Ω_h et pour laquelle on calcule $0 \leq \ \psi \leq 1/8$. On a alors

$$\Delta_h(u_h + |f|_\infty \psi) = \Delta_h u_h + |f|_\infty \geq 0$$

et donc par le principe du maximum

$$\max_{\Omega_h} u_h \leq \max_{\Omega_h}(u_h + |f|_\infty \psi) \leq \max_{\Gamma_h}(u_h + |f|_\infty \psi) \leq |g|_\infty + |f|_\infty/8.$$

5) En déduire que

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_h)} \leq \frac{h^2}{48} M.$$

On a $\Delta_h u_h = f = \Delta u$ sur Ω_h et donc $\Delta_h(u - u_h) = \Delta_h u - \Delta u$. De plus $u - u_h = 0$ sur Γ_h. Par la question précédente on a

$$|u - u_h|_\infty \leq \frac{1}{8}|\Delta u - \Delta_h u|_\infty,$$

et on obtient le résultat avec la question 2.

6) On considère maintenant le cas général d'un ouvert borné régulier Ω. Réfléchir à une adaptation de l'opérateur Δ_h dans ce cas.

Une difféfence importante est qu'un voisin d'un point intérieur n'est pas, dans le cas de bords courbes, un point intérieur ou un point frontière. Il faut alors adapter la notion de point voisin au bord, et également la formule d'approximation différence finie du Laplacien pour les points intérieurs qui ont un voisin sur le bord.

Exercice 2.

On considère un système differentiel $\dot{y} = f(y)$, son flot exact $\varphi_t(y)$ ainsi qu'un flot numérique $\Phi_\tau(y)$. On dit qu'un schéma numérique est symétrique s'il satisfait la relation

$$\Phi_{-\tau}^{-1}(y) = \Phi_\tau(y).$$

1) Par une analyse formelle, montrer qu'un schéma symétrique est d'ordre maximal pair.

Par définition de l'ordre, si le schéma Φ_τ est d'ordre r, on peut écrire

$$\Phi_\tau(y) = \varphi_\tau(y) + \tau^{r+1} R(y) + \mathcal{O}(\tau^{r+2}),$$

où R est une fonction lisse. On a donc en utilisant des développements de Taylor et le fait que $\Phi_\tau(y) = y + \mathcal{O}(\tau)$ et que $\partial_y \varphi_\tau(y) = I + \mathcal{O}(\tau)$

$$\begin{aligned} y = \Phi_{-\tau} \circ \Phi_\tau(y) &= \varphi_{-\tau}(\Phi_\tau(y)) + (-\tau)^{r+1} R(\Phi_\tau(y)) + \mathcal{O}(\tau^{r+2}), \\ &= \varphi_{-\tau} \circ \varphi_\tau(y) + \tau^{r+1} R(y) + (-\tau)^{r+1} R(y) + \mathcal{O}(\tau^{r+2}), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\tau^{r+1} + (-\tau)^{r+1} = 0$ et donc que r est pair.

2) Soit Φ_τ un flot numérique donné, d'ordre p. Pour des nombres réels $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ donnés, on définit la méthode

$$\Psi_\tau = \Phi_{\gamma_s \tau} \circ \cdots \circ \Phi_{\gamma_1 \tau}$$

Trouver une condition sur les γ_i pour que Ψ_τ soit une méthode d'ordre $p+1$.

On a comme précédemment

$$\Phi_{\gamma_1 \tau}(y) = \varphi_{\gamma_1 \tau}(y) + \gamma_1^{p+1} \tau^{p+1} R(y) + \mathcal{O}(\tau^{p+2}),$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi_{\gamma_2 \tau} \circ \Phi_{\gamma_1}(y) &= \varphi_{\gamma_1 \tau}(\Phi_{\gamma_1}(y)) + \gamma_1^{p+1} \tau^{p+1} R(\Phi_{\gamma_1}(y)) + \mathcal{O}(\tau^{p+2}) \\ &= \varphi_{(\gamma_1 + \gamma_2)\tau}(y) + (\gamma_1^{p+1} + \gamma_2^{p+1}) \tau^{p+1} R(y) + \mathcal{O}(\tau^{p+2}) \end{aligned}$$

Par récurrence, on a

$$\Phi_{\gamma_s \tau} \circ \cdots \circ \Phi_{\gamma_1 \tau} = \varphi_{(\sum_i \gamma_i)\tau} + (\sum_i \gamma_i^{p+1}) R(y) + \mathcal{O}(\tau^{p+2})$$

et on tombe donc sur la condition

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_s = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_1^{p+1} + \cdots + \gamma_s^{p+1} = 0.$$

3) Construire une méthode symétrique, explicite, d'ordre 2 et 4 pour les systèmes Hamiltonien de la forme

$$H(p,q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q)$$

où $(q,p) \in \mathbb{R}^{2d}$ et V est une fonction régulière de q.

Soit φ_t^T et φ_V^t les flots hamiltoniens associés aux Hamiltoniens $T(p) = \frac{\|p\|^2}{2}$ et $V(q)$. Ces deux flots se calculent exactement. Le splitting de Strang

$$\Phi_\tau = \varphi_\tau^V \circ \varphi_\tau^T \circ \varphi_\tau^V$$

est une méthode d'ordre 2, et on vérifie directement qu'elle est symétrique. De la même manière, si dans la question précédente $s = 3$, et si on prend $\gamma_1 = \gamma_3$ alors la méthode

$$\Phi_{\gamma_1 \tau} \circ \Phi_{\gamma_2 \tau} \circ \Phi_{\gamma_3 \tau}$$

est immédiatement symmétrique car Φ_τ est symmétrique. Comme Φ_τ est d'ordre 2, il suffit donc - par le résultat de la première question - de remplir les conditions d'ordre 3 pour obtenir une méthode d'ordre 4. On trouve donc

$$2\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad \text{et} \quad 2\gamma_1^3 + \gamma_2^3 = 0.$$

On trouve une solution facilement si γ_1 et γ_2 satisfont $\gamma_2 = -\gamma_1 2^{1/3}$, soit

$$\gamma_1 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}.$$

Cette méthode s'appelle le "triple jump".

Exercice 3. On considère deux suites N périodiques y et z. Montrer que la convolution $y * z$ définie par

$$(y * z)_k = \sum_{l=0}^{N-1} y_{k-l} z_l$$

peut être calculée en $O(N \log_2 N)$ opérations.
Il suffit de montrer l'identité

$$y * z = N\mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N y \times \mathcal{F}_N z)$$

et d'utiliser les résultats du cours sur la FFT.

Exercice 4. On considère l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x(k(x)\partial_x u) &= S(t,x), \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,x) &= f(x), \qquad 0 < x < 1, \\ \partial_x u(t,0) = \partial_x(t,1) &= 0, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

où les fonctions k, S et f sont régulières, et où l'on suppose que $\inf_k \geq k_0 > 0$.
1) En utilisant une méthode de type volumes finis, discrétiser en espace le problème ci-dessus de manière à ce ramener à une EDO (vectorielle!) du type

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = A\mathbf{q} + \mathbf{S}$$

(on parle d'équation semi-discrétisée).
On note (avec les notations du cours)

$$u_j(t) = \frac{1}{|\kappa_i|} \int_{\kappa_i} u(t,x)dx, \qquad u_j(t) = \frac{1}{|\kappa_i|} \int_{\kappa_i} S(t,x)dx.$$

En intégrant l'équation sur chaque volume de contrôle

$$\frac{du_j(t)}{dt} = -\frac{F_{j+1/2}(t) - F_{j-1/2}(t)}{|\kappa_i|} + S_j(t),$$

où le flux $F_{j+1/2}(t)$ est défini par

$$F_{j+1/2}(t) = -k(x_{j+1/2})\partial_x u(t, x_{j+1/2}).$$

On approche ensuite ce flux par

$$F_{j+1/2}(t) \approx -k(x_{j+1/2})\frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h_{i+1/2}}$$

On en déduit la formulation semi-discrète (modulo les adaptations usuelles aux bords), le vecteur $\mathbf{q}$ étant le vecteur de coordonnées u_j.

2) Dans le cas continu et si $S = 0$, on a pour tout temps $\int_0^1 u(t,x)dx =$ constante $= \int_0^1 f(x)dx$. Enoncer et montrer une version discrète de cette propriété pour l'équation de la question précédente.
La quantité $Q(t) = \sum_j u_j h$ est constante; en effet, en notant $\mathbf{1}$ le vecteur formé uniquement de 1, on a $Q(t) = \mathbf{1}^T\mathbf{q}(t)h$ et donc

$$\frac{dQ}{dt} = \mathbf{1}^T\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}h = \mathbf{1}^T A\mathbf{q}(t)h = 0$$

car A est symétrique et $A\mathbf{1} = 0$.

3) En supposant toujours que $S = 0$, montrer le principe du maximum semi-discret: le maximum de $\mathbf{q}(t)$ est atteint à $t = 0$ ou en en point du bord du domaine.

Supposons le maximum atteint en $t = t^* > 0$ et qu'il y admet une valeur strictement plus grande que $q_1(t^*)$ et $q_N(t^*)$. Il existe alors un indice intérieur j tel que

$$q_{j-1}(t^*) < q_j(t^*), \qquad q_j(t^*) \geq q_{j+1}(t^*),$$

et donc

$$\frac{dq_j}{dt}(t^*) = k(x_{j+1/2})(q_{j+1} - q_j) - k(x_{j-1/2})(q_j - q_{j-1}) < 0$$

et donc il existe t voisin de t^* tel que $q_j(t) > q_j(t^*)$. Contradiction.

4) Proposer une discrétisation complète du problème (c-à-d, proposer une discrétisation en temps pour l'équation semi-discrétisée de la question 1). Argumenter un peu le choix de la discrétisation en temps.

On utilise des méthodes ODE pour la discrétisation en temps. Euler explicite donnerait par exemple

$$\mathbf{q}^{n=1} = \mathbf{q}^n + (\delta t)(A\mathbf{q}^n + S(t_n));$$

on attend une stabilité sous très forte contrainte (de l'ordre de $\delta t \leq Ch^2$ on peut le calculer explicitement dans le cas où $k = 1$ par exemple). Il vaut donc mieux utiliser un schéma explicite (Euler implicite, Crank-Nicolson,...).

5) Ecrire un pseudo code pour l'implémantation de ce schéma.

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle stochastique à valeurs réelles

$$\mathrm{d}X(t,x) = -X(t,x)^3 \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \quad X(0) = x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

ainsi que le schéma numérique suivant: Pour un X_n donné, on définit X_{n+1} par la formule

$$\begin{cases} X_{n+1}^* &= X_n - \tau (X_{n+1}^*)^3 \\ X_{n+1} &= X_{n+1}^* + W(t_{n+1}) - W(t_n) \end{cases}$$

où $t_n = n\tau$ et $\tau > 0$

1) Donner une mesure invariante de l'équation (2) c'est à dire une fonction $\rho(x)$ telle que pour toute fonction régulière $\phi(x)$ à support compact,

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \phi(X(t,x))\rho(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

L'opérateur de Kolmogorov s'écrit ici

$$Lu = \frac{1}{2}\partial_{xx}u - x^3\partial_x u.$$

Son adjoint s'écrit

$$L^* = \frac{1}{2}\partial_{xx}u + \partial_x(x^3 u).$$

Une solution de l'équation $L^*\rho = 0$ est donnée par $\rho(x) = \exp(-x^4/2)$.

2) En utilisant la formule d'Itô, montrer qu'il existe une constante $C(t)$ telle que pour tout temps $t > 0$, $\mathbb{E}X(t)^2 < C(t)$. Montrer que $C(t)$ peut-être choisie indépendente de t.

On a

$$dX^2 = -2X^4 dt + 2X dW + dt$$

et donc

$$\mathbb{E}X^2(t) = \mathbb{E}X(0) + t - \int_0^t \mathbb{E}X^4(s)$$

Une estimation brutale, du fait que $X^4 \geq 0$ montre que $\mathbb{E}X^2(t) \leq C + t$. Mais on a mieux en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz $\mathbb{E}X^2 \leq (\mathbb{E}X^4)^{1/2}$. En effet, en utilisant de plus le fait que $y^2 \geq y - c$ pour une certaine constante c et pour tout y positif, on obtient une estimation du type

$$\mathbb{E}X^2(t) \leq \mathbb{E}X(0) + c + t - \int_0^t \mathbb{E}X^2(s)$$

grâce à laquelle on déduit que $\mathbb{E}X(t)^2$ est uniformément bornée, par comparaison avec l'équation différentielle $y' = c + t - y$.

3) Que dire de $\mathbb{E}X_n^2$?

On a $(X_{n+1}^* + \tau(X_{n+1}^*)^3)^2 = X_n^2$. En prenant l'espérance, on obtient immédiatement $\mathbb{E}(X_{n+1}^*)^2 \leq \mathbb{E}X_n^2$. D'autre part, grâce à la formule d'Ito, on obtient que

$$\mathbb{E}X_{n+1}^2 \leq \tau + \mathbb{E}(X_{n+1}^*)^2.$$

On en déduit que $\mathbb{E}X_n^2 \leq C + n\tau$. On peut obtenir une borne uniforme en temps en utilisant le même genre d'inégalité que dans la question précédente.

4) Donner une borne de l'erreur sur un pas de la propagation de la mesure

$$\left| \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \phi(X_1)\rho(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\rho(x)\mathrm{d}x \right|$$

En utilisant la propriété de mesure invariante, on se ramène à étudier $\phi(X_1) - \phi(X(\tau))$. Par des développement asymptotique, on trouve une expansion en terme de τ et de $W(\tau)$: En prenant l'espérance les termes de martingales s'annulent, et l'erreur est en $\mathcal{O}(\tau^2)$.