Examen du 30 janvier 2013 : corrigé

"Intégration & Probabilités"

Exercice. (A1) Soit $x_0 := \inf\{y \in \mathbb{R} : F_\xi(y) \ge \frac{1}{2}\}$ (où F_ξ est la fonction de répartition de ξ), qui est bien un réel car $F_\xi(\infty) = 1$ et $F_\xi(-\infty) = 0$. La continuité à droite de F_ξ implique que $F_\xi(x_0) \ge \frac{1}{2}$.

Montrons maintenant que $\mathbb{P}(\xi \ge x_0) < \frac{1}{2}$. Supposons que $\mathbb{P}(\xi \ge x_0) < \frac{1}{2}$; comme $\mathbb{P}(\xi > x_0 - \frac{1}{n}) \downarrow \mathbb{P}(\xi \ge x_0)$, il existerait $n_0 < \infty$ tel que $\mathbb{P}(\xi > x_0 - \frac{1}{n_0}) < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $F_\xi(x_0 - \frac{1}{n_0}) \ge \frac{1}{2}$, ce qui contredirait la définition de x_0. Par conséquent, $\mathbb{P}(\xi \ge x_0) < \frac{1}{2}$.

Conclusion : $x_0 \in \mathscr{M}(\xi)$.

(A2) Soient a et b des réels. Si $a \le b$, on a $\mathbb{E}[(\xi - a)^2] \ge \mathbb{E}[(\xi - a)^2\, \mathbf{1}_{\{\xi \ge b\}}] \ge (b-a)^2\, \mathbb{P}(\xi \ge b)$; tandis que si $a > b$, on a $\mathbb{E}[(\xi - a)^2] \ge \mathbb{E}[(\xi - a)^2\, \mathbf{1}_{\{\xi \le b\}}] \ge (a-b)^2\, \mathbb{P}(\xi \le b)$. Donc $\mathbb{E}[(\xi - a)^2] \ge (b-a)^2 \min\{\mathbb{P}(\xi \ge b), \mathbb{P}(\xi \le b)\}$, quels que soient a et b.

En prenant $a := \mathbb{E}(\xi)$ et $b := \mathfrak{m}(\xi)$, on obtient $\mathrm{Var}(\xi) \ge \frac{1}{2}\, [\mathfrak{m}(\xi) - \mathbb{E}(\xi)]^2$. D'où la conclusion cherchée.

(B1) C'est une conséquence immédiate du théorème de Slutsky.

(B2) Par hypothèse, il existe des entiers $n_1 < n_2 < \cdots$ tels que $\mathbb{P}\{\sup_{n \ge n_k} |\xi_n - \xi_{n_k}| \ge \frac{1}{k}\} \le \frac{1}{2^k}$, $\forall k \ge 1$. D'après le lemme de Borel–Cantelli, il existe $A \in \mathscr{A}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$, tel que pour tout $\omega \in A$, on a $\sup_{n \ge n_k} |\xi_n(\omega) - \xi_{n_k}(\omega)| \to 0$, $k \to \infty$. Il suffit alors de remarquer que, pour une suite de réels (c_n), s'il existe des entiers $n_1 < n_2 < \cdots$ tels que $\sup_{n \ge n_k} |c_n - c_{n_k}| \to 0$, $k \to \infty$, alors (c_n) est une suite de Cauchy et converge donc dans $\mathbb{R}$.

(C1) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $\{Y_{i,n} \le y\} = \{\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_j \le y\}} \ge i\}$. Comme $\{Y_j \le y\} \in \mathscr{A}$, $\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_j \le y\}}$ est une variable aléatoire (somme finie de variables aléatoires), et donc $\{Y_{i,n} \le y\} \in \mathscr{A}$. La tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ étant identique à celle engendrée par la famille $\{\,]-\infty, y],\ y \in \mathbb{R}\}$, on voit que $Y_{i,n}$ est bien une variable aléatoire.

(C2) Par hypothèse, $\mathscr{M}(Y_1) = \{\beta\}$: $F_{Y_1}(y) < \frac{1}{2}$ si $y < \beta$ et $F_{Y_1}(y) > \frac{1}{2}$ si $y > \beta$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_j \le y\}} \to F_{Y_1}(y)$ en probabilité (loi des grands nombres faible). Donc $\mathbb{P}\{\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_j \le y\}} \ge \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ converge, dont la limite vaut 0 si $y < \beta$, et vaut 1 si $y > \beta$. On a déjà remarqué que $\mathbb{P}\{\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_j \le y\}} \ge \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \mathbb{P}\{Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n} \le y\}$; d'où $Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n} \to \beta$ en probabilité.

(D1) L'inegalité cherchée étant triviale lorsque $i = n$, on suppose que $1 \le i < n$.

Comme A_i est $\sigma(X_1, \cdots, X_i)$-mesurable, tandis que $S_n - S_i$ est $\sigma(X_{i+1}, \cdots, X_n)$-mesurable, les événements A_i et $\{S_n - S_i \ge \mathfrak{m}(S_n - S_i)\}$ sont indépendants. Donc $\mathbb{P}(A_i \cap \{S_n - S_i \ge \mathfrak{m}(S_n - S_i)\}) = \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}\{S_n - S_i \ge \mathfrak{m}(S_n - S_i)\}$. Pour conclure, il suffit de remarquer par définition que $\mathbb{P}\{S_n - S_i \ge \mathfrak{m}(S_n - S_i)\} \ge \frac{1}{2}$.

(D2) Observons que $\{\max_{1 \le i \le n}[S_i + \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\} = \cup_{i=1}^n A_i$, et que les A_i, $1 \le i \le n$ sont disjoints. Donc $\mathbb{P}\{\max_{1 \le i \le n}[S_i + \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$, qui est, d'après (D1), majorée par $2\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$, où $B_i := A_i \cap \{S_n - S_i \ge \mathfrak{m}(S_n - S_i)\}$. Comme $B_i \subset A_i$ ($\forall i \le n$), les

B_i, $1 \le i \le n$, sont également disjoints ; donc $2\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) = 2\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i)$. On a donc prouvé que $\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}[S_i + \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\} \le 2\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i)$.

Pour tout $i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$, on a, par définition, $B_i \subset \{S_n \ge a\}$. Donc $\cup_{i=1}^n B_i \subset \{S_n \ge a\}$. Par conséquent, $\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}[S_i + \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\} \le 2\mathbb{P}\{S_n \ge a\}$.

(D3) Par définition, $-\mathfrak{m}(\xi)$ est un élément de $\mathscr{M}(-\xi)$. On peut donc remplacer, dans l'inégalité prouvée dans (D2), les variables aléatoires X_i, $i \ge 1$, par $-X_i$, $i \ge 1$, pour voir que $\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}[-S_i - \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\} \le 2\mathbb{P}\{-S_n \ge a\}$. Il suffit alors de remarquer que $\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}|S_i + \mathfrak{m}(S_n - S_i)| \ge a\} = \mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}[S_i + \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\} + \mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}[-S_i - \mathfrak{m}(S_n - S_i)] \ge a\}$, et que $\mathbb{P}\{|S_n| \ge a\} = \mathbb{P}\{S_n \ge a\} + \mathbb{P}\{-S_n \ge a\}$.

(D4) Il suffit de constater que $\mathbb{P}(|S_n - S_m| \ge \varepsilon) \le \mathbb{P}(|S_n - S_\infty| \ge \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|S_m - S_\infty| \ge \frac{\varepsilon}{2}) \to 0$ quand n, $m \to \infty$.

(D5) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varepsilon \le \frac12$ (sinon, on considère $\min\{\varepsilon, \frac12\}$ à la place de ε). Par (D4), on a $|\mathfrak{m}(S_{N+n} - S_{N+i})| \le \varepsilon$, $\forall n \ge 0$, $\forall i \ge 0$.

On applique (D3) à $a := \varepsilon$ et à la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_{N+i},\, i \ge 1)$, pour voir que $\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}|S_{i+N} - S_N + \mathfrak{m}(S_{N+n} - S_{N+i})| \ge \varepsilon\} \le 2\mathbb{P}(|S_{N+n} - S_N| \ge \varepsilon)$, qui est majorée par 2ε (d'après (D4)). D'autre part, d'après la remarque dans le paragraphe précédent, $|S_{i+N} - S_N + \mathfrak{m}(S_{N+n} - S_{N+i})| \ge |S_{i+N} - S_N| - \varepsilon$. Par conséquent, $\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le n}|S_{i+N} - S_N| \ge 2\varepsilon\} \le 2\varepsilon$.

(D6) Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la suite croissante d'événements $E_n := \{\max_{1\le i\le n}|S_{i+N} - S_N| \ge 2\varepsilon\}$, $n \ge 1$. On a $\mathbb{P}(E_n) \uparrow \mathbb{P}(\cup_{n\ge1}E_n)$. Comme $\mathbb{P}(E_n) \le 2\varepsilon$, $\forall n \ge 1$ (voir (D5)), on a $\mathbb{P}(\cup_{n\ge1}E_n) \le 2\varepsilon$. Or, $\cup_{n\ge1}E_n \supset \{\sup_{i\ge1}|S_{i+N} - S_N| \ge \varepsilon\}$; on a donc $\mathbb{P}\{\sup_{i\ge1}|S_{i+N} - S_N| \ge \varepsilon\} \le 2\varepsilon$. A fortiori, $\mathbb{P}\{\sup_{i\ge1}|S_{i+N} - S_N| \ge 2\varepsilon\} \le 2\varepsilon$. D'après (B2), S_n converge p.s. (nécessairement vers S_∞).

(D7) Dominique a tort, car la suite $\frac1n\sum_{i=1}^n X_i$, $n \ge 1$, ne peut s'écrire comme suite de sommes partielles d'une *suite* — mais plutôt d'un tableau triangulaire avec l'écriture $\widetilde{X}_i := \frac{X_i}{n}$ — de variables aléatoires indépendantes.

(E1) Comme $\alpha > \frac12$, on voit que $(\sum_{k=1}^n \frac{Z_k}{k^\alpha},\, n \ge 1)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$: la série $\sum_n \frac{Z_n}{n^\alpha}$ converge dans L^2.

(E2) D'après (E1), $\sum_n \frac{Z_n}{n^\alpha}$ converge en probabilité, et donc presque sûrement (par (D6)) vu que $(\frac{Z_n}{n^\alpha},\, n \ge 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

(E3) Considérons la fonction caractéristique : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{\sum_{k=1}^n \frac{Z_k}{k^\alpha}}(\xi) = \prod_{k=1}^n \Phi_{\frac{Z_k}{k^\alpha}}(\xi) = \prod_{k=1}^n \Phi_{Z_k}(\frac{\xi}{k^\alpha}) = \prod_{k=1}^n \cos(\frac{\xi}{k^\alpha}).$$

Comme $\cos(\frac{\xi}{k^\alpha}) = 1 - \frac{\xi^2}{2k^{2\alpha}} + o(\frac{1}{k^{2\alpha}})$, $k \to \infty$, on voit que pour tout $\xi \ne 0$, $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{\xi}{k^\alpha}) \to 0$, $n \to \infty$ (car $2\alpha \le 1$), tandis que $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{\xi}{k^\alpha}) \to 1$ si $\xi = 0$. Rappelons que convergence en loi équivaut à convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques vers une fonction caractéristique. Puisque $\mathbf{1}_{\{0\}}$ ne peut être une fonction caractéristique (étant discontinue à l'origine), on conclut que $\sum_n \frac{Z_n}{n^\alpha}$ ne converge pas en loi, a fortiori pas en probabilité ni p.s. $\square$