Ecole Normale Supérieure Année 2011-2012
ENS **FIMFA**

Corrigé du partiel

Exercice 1 1. Dans le cas $\lambda = \mu$: la loi de (X, Y) étant la même que la loi de (Y, X) on a $\mathbb{E}[X|S] = \mathbb{E}[Y|S]$. De plus, par linéarité on trouve $\mathbb{E}[X|S] + \mathbb{E}[Y|S] = \mathbb{E}[S|S] = S$. Donc $\mathbb{E}[X|S] = S/2$.

2. Soit $k, n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{P}(X = k|S = n) = \frac{\mathbb{P}(X = k, S = n)}{\mathbb{P}(S = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(S = n)}$$

qui vaut zéro si $k > n$ et qui vaut sinon

$$\mathbb{P}(X = k|S = n) = \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = n - j)} = \frac{\lambda^k \mu^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!}}{\sum_{j=0}^{n} \lambda^j \mu^{n-j} \frac{1}{j!(n-j)!}}$$

En multipliant au numérateur et au dénominateur par $n!$, on trouve

$$\mathbb{P}(X = k|S = n) = \frac{C_n^k \lambda^k \mu^{n-k}}{\sum_{j=0}^{n} C_n^j \lambda^j \mu^{n-j}}$$

On reconnaît au dénominateur la formule du binôme de Newton, et il vient

$$\mathbb{P}(X = k|S = n) = C_n^k \Big(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\Big)^k \Big(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\Big)^{n-k}$$

On reconnaît la loi binomiale de paramètres $(n, \lambda/(\lambda + \mu))$. L'espérance conditionnelle vaut donc

$$\mathbb{E}[X|S] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} S$$

Exercice 2 1. Pour montrer que $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ est une filtration il faut montrer que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, donc il faut montrer que pour tout k, $I_{k,n} \in \mathcal{F}_{n+1}$ ce qui est vrai car $I_{k,n} = I_{2k,n+1} \cup I_{2k+1,n+1}$.

Pour tout n, X_n est bornée par L donc intégrable, elle est une combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{F}_n$-mesurables, donc elle est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Pour montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$-martingale il reste à vérifier que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$. Comme X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[X_{n+1}Z] = \mathbb{E}[X_n Z]$ pour toute fonction bornée $\mathcal{F}_n$-mesurable. Comme toute fonction $\mathcal{F}_n$-mesurable est une combinaison linéaire de $\mathbf{1}_{I_{k,n}}$, il suffit de montrer que pour tout k on a $\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_{I_{k,n}}] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{I_{k,n}}]$. Or d'une part

$$\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{I_{k,n}}] = \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{I_{k,n}}] = f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_{I_{k,n}}] &= \frac{f((2k+1)2^{-n-1}) - f((2k)2^{-n-1})}{2^{-n-1}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{I_{2k,n+1}}] \\
&\quad + \frac{f((2k+2)2^{-n-1}) - f((2k+1)2^{-n-1})}{2^{-n-1}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{I_{2k+1,n+1}}] \\
&= f((2k+1)2^{-n-1}) - f((2k)2^{-n-1}) + f((2k+2)2^{-n-1}) - f((2k+1)2^{-n-1}) \\
&= f((2k+2)2^{-n-1}) - f((2k)2^{-n-1}) \\
&= f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})
\end{aligned}$$

2. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale bornée dans L^1 (car positive) donc elle converge p.s. quand $n\to\infty$. On note X_∞ sa limite.
3. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée par L donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui donne la convergence de X_n dans L^1.
4. D'une part $(X_n\mathbf{1}_{[a,b]})_{n\geqslant 0}$ est une suite de v.a. qui converge p.s. et dans L^1 vers $X_\infty\mathbf{1}_{[a,b]}$, donc on a

$$\mathbb{E}\big[X_n\mathbf{1}_{[a,b]}\big]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}\big[X_\infty\mathbf{1}_{[a,b]}\big]$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X_n\mathbf{1}_{[a,b]}\big]=\int_a^b X_n(\omega)d\omega &= ([2^na]+1-2^na)\big[f(([2^na]+1)2^{-n})-f([2^na]2^{-n})\big]\\ &+\sum_{k=[2^na]+1}^{[2^nb]-1}\big[f((k+1)2^{-n})-f(k2^{-n})\big]\\ &+(2^nb-[2^nb])\big[f(([2^nb]+1)2^{-n})-f([2^nb]2^{-n})\big]\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\big|\mathbb{E}\big[X_n\mathbf{1}_{[a,b]}\big]-[f(b)-f(a)]\big| &\leqslant \big|f(([2^na]+1)2^{-n})-f([2^na]2^{-n})\big|+\big|f(a)-f(([a2^n]+1)2^{-n})\big|\\ &\quad+\big|f(b)-f([b2^n]2^{-n})\big|+\big|f(([2^nb]+1)2^{-n})-f([2^nb]2^{-n})\big]\big|\\ &\leqslant 4\sup_{s,t\in[0,1],|s-t|\leqslant 2^{-n}}|f(s)-f(t)|\end{aligned}$$

f est continue sur le compact $[0,1]$, donc f est uniformément continue sur $[0,1]$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\big[X_n\mathbf{1}_{[a,b]}\big]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(b)-f(a)$$

5. Pour tout $\omega\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\big|X_n(\omega)-f'(\omega)\big| &= \sum_{k=0}^{2^n-1}\Big|\frac{f((k+1)2^{-n})-f(k2^{-n})}{2^{-n}}-f'(\omega)\Big|\mathbf{1}_{I_{k,n}}(\omega)\\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1}2^n\Big|\int_{I_{k,n}(\omega)}f'(s)-f'(\omega)ds\Big|\mathbf{1}_{I_{k,n}}(\omega)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1}2^n\int_{I_{k,n}(\omega)}|f'(s)-f'(\omega)|ds\mathbf{1}_{I_{k,n}}(\omega)\\ &\leqslant \sup_{s,t\in[0,1],|s-t|\leqslant 2^{-n}}|f'(s)-f'(t)|\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbf{1}_{I_{k,n}}(\omega)=\sup_{s,t\in[0,1],|s-t|\leqslant 2^{-n}}|f'(s)-f'(t)|\end{aligned}$$

f' est continue sur le compact $[0,1]$, donc f' est uniformément continue sur $[0,1]$, ce qui donne pour tout $\omega\in[0,1]$

$$X_n(\omega)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}f'(\omega)$$

Exercice 3 1. On a $X_n=\prod_{k=1}^n(1+R_k-R_{k-1})$. Comme $1+R_k-R_{k-1}$ est à valeurs dans $]0,+\infty[$, l'application $(R_k)_{k=0}^n\to(\prod_{j=1}^k(1+R_j-R_{j-1}))_{k=0}^n$ est une bijection pour tout n, et donc $\sigma(R_0,\dots,R_n)=\sigma(X_0,\dots,X_n)$. Les filtrations $(\mathcal{F}_n^R)_{n\geqslant 0}$ et $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geqslant 0}$ sont identiques.

2. Pour tout n R_n et X_n sont intégrables car bornées. On a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=X_n\mathbb{E}[1+R_{n+1}-R_n|\mathcal{F}_n]=X_n\big(1+\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n]-R_n\big)$$

Donc $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=X_n$ ssi $1+\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n]-R_n=1$ ssi $\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n]=R_n$. On en conclut que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale ssi $(R_n)_{n\geqslant 0}$ l'est.

3. (a) X_n est à valeurs strictement positives et

$$\frac{1}{n}\log X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(1+r_{k-1})$$

Comme $(\log(1+r_k))_{k\geqslant 1}$ est une suite de v.a. intégrables i.i.d. de moyenne $\mathbb{E}[\log(1+r_1)] = \frac{1}{2}\log(1+\varepsilon)+\frac{1}{2}\log(1-\varepsilon) = \frac{1}{2}\log(1-\varepsilon^2) < 0$, on trouve par la loi des grands nombres que, p.s.,

$$\frac{1}{n}\log X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\log(1-\varepsilon^2) < 0$$

et donc, p.s., $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = 1$ pour tout n, la convergence ne peut pas avoir lieu dans L^1.
Autre méthode pour prouver la convergence p.s. vers 0 : $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale bornée dans L^1, donc elle converge p.s.. Or $|X_{n+1}-X_n| = \varepsilon X_n$. Le membre de gauche converge p.s. vers 0, donc le membre de droite aussi.

(b) Sur $\{T_z < +\infty\}$, on a $X_{T_z} \geqslant z$. D'autre part, $X_{T_z} = X_{T_z-1}(1+r_{T_z})$ et $X_{T_z-1} < z$, donc $X_{T_z} < z(1+\varepsilon)$. Au total, sur $\{T_z < +\infty\}$:

$$z \leqslant X_{T_z} < z(1+\varepsilon)$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, comme $T_z\wedge n$ est un temps d'arrêt borné, on a d'après le théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}[X_{T_z\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0] = 1$$

On décompose l'espérance en :

$$1 = \mathbb{E}[X_{T_z\wedge n}\mathbf{1}_{T_z<\infty}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{T_z=\infty}]$$

D'une part, sur $\{T_z = +\infty\}$, on a $X_n \leqslant z$ pour tout n, donc $(X_n\mathbf{1}_{T_z=\infty})_{n\geqslant 0}$ est une suite de v.a. bornées qui tend vers 0 p.s. et donc aussi dans L^1 :

$$\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{T_z=\infty}] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, sur $\{T_z < +\infty\}$, on a $X_{T_z\wedge n} \leqslant z(1+\varepsilon)$ pour tout n, donc $(X_{T_z\wedge n}\mathbf{1}_{T_z<\infty})_{n\geqslant 0}$ est une suite de v.a. bornées qui tend vers $X_{T_z}\mathbf{1}_{T_z<\infty}$ p.s. et donc aussi dans L^1 :

$$\mathbb{E}[X_{T_z\wedge n}\mathbf{1}_{T_z<\infty}] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_{T_z}\mathbf{1}_{T_z<\infty}]$$

On trouve donc

$$1 = \mathbb{E}[X_{T_z}\mathbf{1}_{T_z<\infty}]$$

En utilisant les bornes inférieure et supérieure sur X_{T_z}, on obtient

$$z\mathbb{P}(T_z<\infty) \leqslant \mathbb{E}[X_{T_z}\mathbf{1}_{T_z<\infty}] \leqslant z(1+\varepsilon)\mathbb{P}(T_z<\infty)$$

ce qui donne le résultat annoncé

$$\frac{1}{z(1+\varepsilon)} \leqslant \mathbb{P}(T_z<\infty) \leqslant \frac{1}{z}$$