Examen partiel du 26 novembre 2012 : corrigé

"Intégration & Probabilités"

Exercice I. Comme $f \le g \le h$ p.p., et $f,\, h \in \mathscr{L}^1(E,\, \mathscr{A},\, \mu)$, on a $g \in \mathscr{L}^1(E,\, \mathscr{A},\, \mu)$.

On applique le lemme de Fatou deux fois : d'abord à la suite de fonctions mesurables positives $(g_n - f_n)$, pour voir que $\int (g-f)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n)\,\mathrm{d}\mu$, et donc $\int g\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,\mathrm{d}\mu$; ensuite à $(h_n - g_n)$, ce qui donne $\int (h-g)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (h_n - g_n)\,\mathrm{d}\mu$, et donc $\int g\,\mathrm{d}\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int g_n\,\mathrm{d}\mu$. Par conséquent, $\int g_n\,\mathrm{d}\mu \to \int g\,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Exercice II. (A1) On a $\{(x,\, t) \in E \times \mathbb{R}_+ :\, g(x) > t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q}_+} (g^{-1}(\,]r,\, \infty[\,) \times [0,\, r])$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, on a $g^{-1}(\,]r,\, \infty[\,) \times [0,\, r] \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ (pavé mesurable). D'où $\{(x,\, t) \in E \times \mathbb{R}_+ :\, g(x) > t\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$.

(A2) Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini–Tonelli à $\mathbf{1}_{\{(x,\, t) \in E \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) :\, g(x) > t\}}$ et au couple de mesures σ-finies : ν et la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}_+,\, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$.

(A3) Si g est une fonction étagée positive : $g := \sum_{i=1}^m a_i\, \mathbf{1}_{A_i}$, avec $0 < a_1 < \cdots < a_m$ et A_i mesurables disjoints, alors $\nu(\{x \in E :\, g(x) > t\}) = \sum_{j=i}^m \nu(A_j)$ si $t \in [a_{i-1},\, a_i[$ pour tout $1 \le i \le m$ (notation : $a_0 := 0$), et bien sûr, $\nu(\{x \in E :\, g(x) > t\}) = 0$ si $t \ge a_m$. Donc

$$\int_0^\infty \nu(\{x \in E :\, g(x) > t\})\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=i}^m \nu(A_j) \Big)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^m a_i\, \nu(A_i) = \int_E g\,\mathrm{d}\nu,$$

comme prévu. Dans le cas général, c'est-à-dire, si g est une fonction mesurable positive, on peut prendre une suite (g_n) de fonctions étagées positives telle que $g_n \uparrow g$. On a, d'une part, $\int g_n\,\mathrm{d}\nu \uparrow \int g\,\mathrm{d}\nu$ (convergence monotone), et d'autre part, $\nu(\{x \in E :\, g_n(x) > t\}) \uparrow \nu(\{x \in E :\, g(x) > t\})$ (car $\{x \in E :\, g_n(x) > t\}$, $n \ge 1$, est une suite croissante de parties mesurables dont la réunion est $\{x \in E :\, g(x) > t\}$), et donc par convergence monotone, $\int_0^\infty \nu(\{x \in E :\, g_n(x) > t\})\,\mathrm{d}t \uparrow \int_0^\infty \nu(\{x \in E :\, g(x) > t\})\,\mathrm{d}t$. Par conséquent, $\int_E g\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \nu(\{x \in E :\, g(x) > t\})\,\mathrm{d}t$.

(B1) Considérons l'ouvert $G := \{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) > t\}$. Soit $x \in \overline{G}$. Il existe alors une suite $(x_n) \subset G$ telle que $x_n \to x$. Comme $f(x_n) > t$, $\forall n$, et $f(x_n) \to f(x)$, on a $f(x) \ge t$. D'où $\overline{G} \subset \{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) \ge t\}$. Par conséquent, $\partial G \subset \{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) = t\}$: Julie a raison.

L'inclusion peut être au sens strict. Un exemple avec $f(x) := 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, et $t = 1$: on a dans ce cas $G = \varnothing$, et donc $\partial G = \varnothing$, tandis que $\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) = 1\} = \mathbb{R}^d$. Marc a tort.

(B2) Par hypothèse, $\mu_n(G) \to \mu(G)$, $\forall G$ ouvert tel que $\mu(\partial G) = 0$. Il suffit donc de prouver que $\lambda(\mathrm{d}t)$-p.p., $\mu(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) = t\}) = 0$.

Considérons $A := \{t \in \mathbb{R}_+ :\, \mu(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) = t\}) > 0\}$. Il s'agit d'un ensemble (au plus infini) dénombrable, car $A = \cup_{n\ge 1} A_n$, avec pour tout $n \ge 1$, $A_n := \{t \in \mathbb{R}_+ :\, \mu(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) = t\}) \ge \frac{1}{n}\}$ dont le cardinal est fini (majoré par $n\, \mu(\mathbb{R}^d)$ qui est fini). En particulier, $\lambda(A) = 0$ comme désiré.

(B3) Par hypothèse, $\mu_n(\mathbb{R}^d) \to \mu(\mathbb{R}^d)$. Donc $\sup_{n\ge 1} \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$. D'après (A2), $\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu_n = \int_0^M \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) > t\})\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu = \int_0^M \mu(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) > t\})\,\mathrm{d}t$, où $M := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) < \infty$. On sait, d'après la question précédente, que $\mu_n(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) > t\}) \to \mu(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) > t\})$, λ-p.p. ; de plus, $\sup_{n\ge 1} \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^d :\, f(x) > t\}) \le \sup_{n\ge 1} \mu_n(\mathbb{R}^d) =: C$

qui est une constante finie, et donc $\int_0^M C\,\mathrm{d}t < \infty$. Par convergence dominée, on a $\int_0^M \mu_n(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\})\,\mathrm{d}t \to \int_0^M \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\})\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire, $\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu$.

(B4) Soit $G \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Posons pour tout $k \geq 1$, $f_k(x) := [k\,\mathrm{dist}(x, G^c)] \wedge 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, qui est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$. D'après la question précédente, on a, pour tout k, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mathrm{d}\mu$.

Comme $\mathbf{1}_G \geq f_k$, $\forall k$, on a $\mu_n(G) \geq \int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mathrm{d}\mu_n$ et donc $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mathrm{d}\mu$. On fait maintenant $k \uparrow \infty$: comme $f_k \uparrow \mathbf{1}_G$, il résulte du théorème de convergence monotone que $\int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_G\,\mathrm{d}\mu = \mu(G)$. D'où l'inégalité cherchée. □

Exercice III. **(i)** Utilisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\mathscr{C}$ ne soit pas tranchante. Il existerait alors $x \neq y \in E$ tel que $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_A(y)$, $\forall A \in \mathscr{C}$.

Considérons $\mathscr{G} := \{A \in \sigma(\mathscr{C}) : \mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_A(y)\}$. Il est clair que $E \in \mathscr{G}$. Comme $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$, on voit que $\mathscr{G}$ est stable par passage au complémentaire. Enfin, si $(A_n) \subset \mathscr{G}$, alors $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{G}$ car $\mathbf{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n} = \sup_{n\geq 1} \mathbf{1}_{A_n}$. Par conséquent, $\mathscr{G}$ est une tribu.

Par hypothèse, $\mathscr{G} \supset \mathscr{C}$. On aurait alors $\mathscr{G} \supset \sigma(\mathscr{C})$, ce qui contredirait la condition que $\sigma(\mathscr{C})$ est tranchante. Conclusion : $\mathscr{C}$ est tranchante.

(ii) Soit $\mathscr{C} := (A_n,\, n \geq 1) \subset \mathscr{A}$ une suite tranchante. On observe que

$$D = \bigcap_{n\geq 1} \Big((A_n \times A_n) \cup (A_n^c \times A_n^c) \Big).$$

En effet, pour tout $x \in E$ et tout $n \geq 1$, on a $(x, x) \in (A_n \times A_n) \cup (A_n^c \times A_n^c)$. D'où l'inclusion $D \subset \cap_{n\geq 1}[(A_n \times A_n) \cup (A_n^c \times A_n^c)]$. Pour l'inclusion réciproque, soient $x \neq y \in E$ (ce qui équivaut à $(x,\, y) \in E^2 \backslash D$) ; par la définition de $\mathscr{C}$, il existe $n \geq 1$ tel que $\mathbf{1}_{A_n}(x) \neq \mathbf{1}_{A_n}(y)$, et donc $(x,\, y) \notin (A_n \times A_n) \cup (A_n^c \times A_n^c)$. Ceci prouve l'inclusion réciproque.

Comme $(A_n \times A_n) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ et $(A_n^c \times A_n^c) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, on a $D \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$.

(iii) Si $D \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, il existe $A_n \in \mathscr{A}$, $\forall n \geq 1$, tels que $D \in \sigma(\{A_m \times A_n,\ m,\ n \geq 1\})$. Il suffit de prouver que $\mathscr{C} := (A_n,\, n \geq 1)$ est tranchante.

Supposons que $\mathscr{C}$ ne soit pas tranchante : il existerait $x \neq y$ tels que $\mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{A_n}(y)$, $\forall n \geq 1$. On aurait alors $\mathbf{1}_{A_m \times A_n}(x,\, y) = \mathbf{1}_{A_m \times A_n}(x,\, x)$, $\forall m, n$. Exactement comme dans la question (i), on vérifie facilement par définition que $\mathscr{F} := \{C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} : \mathbf{1}_C(x,\, y) = \mathbf{1}_C(x,\, x)\}$ est une tribu. Comme $\mathscr{F} \supset \{A_m \times A_n,\ m,\ n \geq 1\}$, on aurait $\mathscr{F} \supset \sigma(A_m \times A_n,\ m,\ n \geq 1)$; en particulier, $D \in \mathscr{F}$. Or $\mathbf{1}_D(x,\, y) = 0 \neq 1 = \mathbf{1}_D(x,\, x)$; la contradiction implique que $\mathscr{C}$ est, en fait, tranchante.

(iv) Pour prouver $D \notin \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, il suffit, d'après la question précédente, de vérifier que $\mathscr{A}$ n'est pas distinguée.

Supposons $\mathscr{A}$ distinguée ; soit $\mathscr{C} := (A_n,\, n \geq 1)$ une suite tranchante. Comme $A_n \in \mathscr{A}$, on a soit A_n dénombrable, soit A_n^c l'est. Posons, pour tout $n \geq 1$, $\widetilde{A}_n := A_n$ si A_n est dénombrable, et $\widetilde{A}_n := A_n^c$ si A_n^c est dénombrable. Comme $\cup_{n\geq 1} \widetilde{A}_n$ est dénombrable alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas, on peut trouver des réels $x \neq y \notin \cup_{n\geq 1} \widetilde{A}_n$. Alors pour tout n, $\mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{A_n}(y)$ (les deux valent 0 si A_n est dénombrable, et valent 1 sinon). Ceci contredirait l'hypothèse que $\mathscr{C}$ est tranchante. Par conséquent, $D \notin \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$.

Pour tout réel x, $D_x = D^x = \{x\} \in \mathscr{A}$.

Dans le cours, on a vu que dans un espace produit, si D est mesurable par rapport à la tribu produit, alors toutes les sections de D sont mesurables. On vient de se donner un exemple dans lequel la réciproque est fausse. □

- fin -