Ecole Normale Supérieure Année 2012-2013
ENS **FIMFA**

Corrigé du partiel de "processus aléatoires"

Durée : deux heures. Pas de document autorisé.

Exercice 1 1. Pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-adapté, et intégrable car borné. Comme la loi de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une loi binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$ (et que la moyenne d'une v.a. binomiale de paramètres n et p est np), on a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = N\frac{X_n}{N} = X_n$$

ce qui montre que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.

2. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^p pour tout $p \in [1,\infty[$, donc elle converge p.s. et dans L^p pour tout $p \in [1,\infty[$ vers une variable X_∞.

3. Pour tout n, M_n est $\mathcal{F}_n$-adapté, et intégrable car borné. Comme la loi de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une loi binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$ (et que la variance d'une v.a. binomiale de paramètres n et p est $np(1-p)$), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \Big(\frac{N}{N-1}\Big)^{n+1}\Big(N\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]\Big)\\
&= \Big(\frac{N}{N-1}\Big)^{n+1}\Big(NX_n - N\frac{X_n}{N}(1-\frac{X_n}{N}) + X_n^2\Big)\\
&= \Big(\frac{N}{N-1}\Big)^{n}\Big(NX_n - X_n^2\Big) = M_n
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.

4. Comme $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale qui converge dans L^1 vers X_∞, on a

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0] = k$$

Comme $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans L^1 et dans L^2 vers X_∞, on a

$$\mathbb{E}[X_\infty(N-X_\infty)] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n(N-X_n)] = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{N-1}{N}\Big)^n\mathbb{E}[M_n] = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{N-1}{N}\Big)^n\mathbb{E}[M_0] = 0,$$

car $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

5. X_∞ est à valeurs dans $\{0,\dots,N\}$, donc la v.a. $X_\infty(N-X_\infty)$ est positive. Comme son espérance est nulle, on en déduit que $\mathbb{P}(X_\infty(N-X_\infty)=0)=1$ et donc

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) + \mathbb{P}(X_\infty = N) = 1$$

Comme $k = \mathbb{E}[X_\infty] = N\mathbb{P}(X_\infty = N)$ on trouve

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) = 1 - \frac{k}{N}, \qquad \mathbb{P}(X_\infty = N) = \frac{k}{N}$$

Exercice 2 1. On vérifie que $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de tribus emboitées. $X_n/(n+1)$ est une indicatrice d'un événement de $\mathcal{F}_n$, donc $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-adapté.

2. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-adapté et pour tout n X_n est bornée donc intégrable. Il reste à montrer que, pour toute v.a. Z positive $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a $\mathbb{E}[ZX_n] = \mathbb{E}[ZX_{n+1}]$, ce qui montre $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ et que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.

Soit Z une v.a. positive $\mathcal{F}_n$-mesurable. On note $\alpha_{n+1} = Z(n+1)$. On a $\{n+1\} \subset Z^{-1}(\alpha_{n+1}) \in \mathcal{F}_n$, donc $Z^{-1}(\alpha_{n+1}) \subset [n+1, \infty[$. La v.a. est donc de la forme

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{\{k\}} + \alpha_{n+1} \mathbf{1}_{[n+1,\infty[}$$

D'une part,

$$\mathbb{E}[ZX_n] = \alpha_{n+1}(n+1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+1,\infty[}] = \alpha_{n+1}(n+1)\mathbb{P}([n+1,\infty[) = \alpha_{n+1}\frac{n+1}{n+1} = \alpha_{n+1}$$

D'autre part

$$\mathbb{E}[ZX_{n+1}] = \alpha_{n+1}(n+2)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+2,\infty[}] = \alpha_{n+1}(n+2)\mathbb{P}([n+2,\infty[) = \alpha_{n+1}\frac{n+2}{n+2} = \alpha_{n+1}$$

3. On peut dire que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale positive, donc bornée dans L^1, donc elle converge p.s. vers une variable aléatoire X_∞. En fait, on peut aussi voir directement que $X_n(\omega) = 0$ pour tout $n \geqslant \omega$, donc $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. vers zero.
La convergence n'a pas lieu dans L^1 car $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout n et donc $1 = \mathbb{E}[X_n] \not\to \mathbb{E}[X_\infty] = 0$.

Exercice 3 1. On a

$$F_{Y,Z}(y,z) = \mathrm{P}(Y \leqslant y, Z \leqslant z) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) - \mathrm{P}(Y \leqslant y, Z > z)$$

De plus $\mathbb{P}(Z > Y) = 0$. Donc, si $z > y$,

$$F_{Y,Z}(y,z) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\text{ pour tout } i\ X_i \leqslant y) = F(y)^n$$

Si $z \leqslant y$,

$$F_{Y,Z}(y,z) = \mathbb{P}(\text{ pour tout } i\ X_i \leqslant y) - \mathbb{P}(\text{ pour tout } i\ z < X_i \leqslant y) = F(y)^n - (F(y) - F(z))^n$$

2. On calcule la double primitive de

$$f(y,z) = n(n-1)\big(F(y) - F(z)\big)^{n-2} f(y) f(z) \mathbf{1}_{z \leqslant y}.$$

On trouve

$$\int_{-\infty}^{z} dz' \int_{-\infty}^{y} dy' f(y', z') \quad = \quad \int_{-\infty}^{z\wedge y} dz' n f(z') \int_{z'}^{y} dy' (n-1)\big(F(y') - F(z')\big)^{n-2} f(y')$$

On remarque que

$$\big(F(y') - F(z')\big)^{n-2} = \Big(\int_{z'}^{y'} du f(u)\Big)^{n-2} = (n-2)! \int_{z'}^{y'} du_1 \int_{z'}^{u_1} du_2 \cdots \int_{z'}^{u_{n-3}} du_{n-2} f(u_1) \cdots f(u_{n-2})$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\int_{z'}^{y} dy'(n-1)\big(F(y') - F(z')\big)^{n-2} f(y') \\
&= (n-1)! \int_{z'}^{y} dy' \int_{z'}^{y'} du_1 \int_{z'}^{u_1} du_2 \cdots \int_{z'}^{u_{n-3}} du_{n-2} f(y') f(u_1) \cdots f(u_{n-2}) \\
&= \Big(\int_{z'}^{y} du f(u)\Big)^{n-1} = \big(F(y) - F(z')\big)^{n-1}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{z} dz' \int_{-\infty}^{y} dy' f(y', z') \quad = \quad \int_{-\infty}^{z\wedge y} dz' n f(z') \big(F(y) - F(z')\big)^{n-1}$$

Si $y < z$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{z} dz' \int_{-\infty}^{y} dy' f(y',z') &= \int_{-\infty}^{y} dz' n f(z') \big(F(y) - F(z')\big)^{n-1} \\
&= n! \int_{-\infty}^{y} dz' \int_{z'}^{y} du_1 \cdots \int_{u_{n-2}}^{y} du_{n-1} f(z') f(u_1) \cdots f(u_{n-1}) \\
&= F(y)^n
\end{aligned}$$

Si $y \geqslant z$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{z} dz' \int_{-\infty}^{y} dy' f(y',z') &= \int_{-\infty}^{y} dz' n f(z') \big(F(y) - F(z')\big)^{n-1} - \int_{z}^{y} dz' n f(z') \big(F(y) - F(z')\big)^{n-1} \\
&= F(y)^n - n! \int_{z}^{y} dz' \int_{z'}^{y} du_1 \cdots \int_{u_{n-2}}^{y} du_{n-1} f(z') f(u_1) \cdots f(u_{n-1}) \\
&= F(y)^n - \big(F(y) - F(z)\big)^n
\end{aligned}$$

Donc on a bien $\int_{-\infty}^{z} dz' \int_{-\infty}^{y} dy' f(y',z') = F_{Y,Z}(y,z)$.

3. La loi jointe de (Y, Z) a pour densité :

$$f_{Y,Z}(y,z) = n(n-1)(y-z)^{n-2} \mathbf{1}_{0 \leqslant z \leqslant y \leqslant 1}$$

La loi de Y est à densité :

$$f_Y(y) = n y^{n-1} \mathbf{1}_{0 \leqslant y \leqslant 1}$$

La loi de Z est à densité :

$$f_Z(z) = n(1-z)^{n-1} \mathbf{1}_{0 \leqslant z \leqslant 1}$$

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y|Z]$ est de la forme $\psi(Z)$ avec ψ une fonction telle que $\mathbb{E}[\phi(Z)\psi(Z)] = \mathbb{E}[\phi(Z)Y]$ pour toute fonction test positive ϕ. Ceci s'écrit :

$$\int_0^1 dz \phi(z) \psi(z) n(1-z)^{n-1} = \int_0^1 dz \phi(z) \int_z^1 dy n(n-1)(y-z)^{n-2} y$$

On doit donc avoir (pour presque tout $z \in [0,1]$)

$$\psi(z) n(1-z)^{n-1} = \int_z^1 dy n(n-1)(y-z)^{n-2} y$$

ce qui donne :

$$\psi(z) = \frac{(n-1) \int_0^{1-z} dy y^{n-2}(z+y)}{(1-z)^{n-1}} = \frac{n-1+z}{n}$$

4. La loi conditionnelle $\nu_y(dz)$ est telle que, pour toutes fonctions tests positives ϕ, ψ, on a $\mathbb{E}[\phi(Y)\psi(Z)] = \mathbb{E}[\phi(Y) \int \psi(z) \nu_Y(dz)]$, c'est-à-dire

$$\int dy \phi(y) \int dz f_{Y,Z}(y,z) \psi(z) = \int dy \phi(y) f_Y(y) \int \psi(z) \nu_y(dz)$$

Donc pour tout $y \in]0,1]$ et pour toute fonction test positive ψ, on doit avoir

$$\frac{1}{f_Y(y)} \int dz f_{Y,Z}(y,z) \psi(z) = \int \psi(z) \nu_y(dz)$$

On peut donc prendre $\nu_y(dz) = f_y(z) dz$ avec

$$f_y(z) = \frac{f_{Y,Z}(y,z)}{f_Y(y)} = (n-1) \frac{(y-z)^{n-2}}{y^{n-1}} \mathbf{1}_{0 \leqslant z \leqslant y}$$

On peut compléter avec $f_y(z) = \mathbf{1}_{[0,1]}(z)$ pour tout $y \notin]0,1]$.