(1)

Soit $T := S^1 \times S^1$ le tore, où S^1 est le cercle ($S^1 \cong [0,1]/0 \sim 1$).

(a) Calculer $\pi_1(T \backslash \{*\}, t)$, pour $t \in T\backslash\{*\}$, le tore privé d'un point, en justifiant votre réponse.

(b) Soit $\Gamma := T \sharp T$ la somme connexe de deux copies du tore. (Γ est homéomorphe à $T' \cup_{S^1} T'$, où $T' = T \backslash e^0$, e^0 un voisinage ouvert contractile de $\{*\}$ homéomorphe au disque ouvert, les deux copies étant recollées le long de leurs bords $\partial T' \cong S^1$.)

Montrer que Γ admet un recouvrement ouvert $\{U, V\}$ tel que $U \cong V \cong T\backslash\{*\}$ et $U \cap V \cong S^1 \times I$. Calculer $\pi_1(\Gamma, \gamma)$, pour un point de base de $U \cap V$, à l'aide du théorème de Seifert et van Kampen.

(c) Peut-on engendrer le groupe $\pi_1(\Gamma, \gamma)$ par trois générateurs ?

(a) L'inclusion $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow T\backslash\{*\}$ est un rétracte par déformation forte, induit par le rétracte par déformation forte $\partial(I \times I) \hookrightarrow (I \times I)\backslash\{*\}$ (où $*$ est dans l'intérieur de $I \times I$). Ainsi, en prenant comme point de base de $t \in T\backslash\{*\}$ l'image du point de base s de $S^1 \vee S^1$, on obtient un isomorphisme de groupes $\pi_1(S^1 \vee S^1, s) \xrightarrow{\cong} \pi_1(T\backslash\{*\}, t)$. Le cercle est correctement pointé (puisque S^1 est localement contractile) et donc le théorème de van Kampen et Seifert fournit un isomorphisme $\pi_1(S^1 \vee S^1, s) \cong \pi_1(S^1, *) * \pi_1(S^1, *)$. On en déduit que $\pi_1(T\backslash\{*\}, t)$ est le groupe libre sur deux générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(b) Par la construction du recouvrement ouvert [1], les espaces $U \cap V$, U, V sont connexes par arcs, donc on peut appliquer le théorème de van Kampen et de Seifert. Ainsi, le recouvrement ouvert induit un carré cocartésien de groupes :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, \gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, \gamma) \arrow[d] \\ \pi_1(V, \gamma) \arrow[r] & \pi_1(T \sharp T, \gamma). \end{tikzcd}$$

Alors, puisque $U \simeq V \simeq T\backslash\{*\}$, on a $\pi_1(U, \gamma) \cong \pi_1(V, \gamma) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$; de même, l'équivalence d'homotopie $U \cap V \simeq S^1$ induit un isomorphisme $\pi_1(U \cap V, \gamma) \cong \mathbb{Z}$. Le groupe $\pi_1(T \sharp T, \gamma)$ est donc la somme amalgamée du diagramme

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \rangle \longleftarrow \mathbb{Z} \cong \langle x \rangle \longrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle c, d \rangle$$

$$aba^{-1}b^{-1} \longleftarrow\!\shortmid\; x \;\longmapsto cdc^{-1}d^{-1},$$

en utilisant le fait que $U \cap V \hookrightarrow U$ (respectivement $U \cap V \hookrightarrow V$) correspond à l'application induite par $\partial(I \times I) \hookrightarrow I \times I$. Donc, on obtient $\pi_1(\Gamma, \gamma) \cong \langle a, b, cd \rangle / (aba^{-1}b^{-1} = cdc^{-1}d^{-1})$ (autrement dit, on prend le quotient par le sous-groupe distingué engendré par $aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1}$).

(c) L'abélianisation de $\pi_1(\Gamma, \gamma)$ est le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{\oplus 4}$, engendré par les images de a, b, c, d. Une surjection $\mathbb{Z}^{*3} \twoheadrightarrow \pi_1(\Gamma, \gamma)$ induirait une surjection $\mathbb{Z}^{\oplus 3} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus 4}$, ce qui est impossible. Donc, $\pi_1(\Gamma, \gamma)$ ne peut pas être engendré par trois générateurs.

1. Il faut faire un dessin pour illustrer le recouvrement ouvert $\{U, V\}$ de $T \sharp T$.

(2)

Soit K la bouteille de Klein, le quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ obtenu en identifiant $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1, 1-y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

(a) Montrer qu'il existe un $\mathbb{Z}/2$-revêtement Galoisien $S^1 \times S^1 \to K$.

(b) Décrire le revêtement universel de K, en justifiant votre réponse.

(c) Calculer le groupe fondamental $\pi_1(K,k)$, pour $k \in K$, et identifier le sous-groupe qui correspond à l'image de $\pi_1(S^1 \times S^1)$ induit par le revêtement $S^1 \times S^1 \to K$.

(d) Calculer $\pi_n(K,k)$, pour $n > 1$.

(e) Classifier à isomorphisme près les revêtements connexes à 2-feuillets de K. Sont-ils Galoisiens ?

Dans cette question, on peut utiliser le fait que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué ; toutefois, ce n'est pas nécessaire pour résoudre le problème.

(a) (On utilise l'intuition géométrique qui provient du fait que K est obtenu à partir du ruban de Möbius en recollant son bord.) L'application affine $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, $(x,y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y)$ induit une $\mathbb{Z}/2$-action totalement discontinue sur $S^1 \times S^1$; on vérifie que le revêtement Galoisien $S^1 \times S^1 \to (\mathbb{Z}/2)\backslash(S^1 \times S^1)$ est un revêtement à 2-feuillets de K.

(b) Un revêtement $p : E \to B$ est universel si E est simplement connexe. L'application continue $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to K$ définie ci-dessus est la composée du revêtement universel $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to S^1 \times S^1$ et du $\mathbb{Z}/2$-revêtement Galoisien $S^1 \times S^1 \to K$. Il en découle que cette application est un revêtement universel. (On peut vérifier directement que $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to K$ est un revêtement ; pour les ouverts trivialisants, il suffit de prendre les images dans K des disques ouverts dans $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ de rayon $\frac{1}{4}$.)

(c) Par définition, K est homéomorphe au cône de l'application $f : S^1 \to S^1 \vee S^1$ dont la classe d'homotopie est $aba^{-1}b \in \pi_1(S^1 \vee S^1, s) \cong \langle a, b \rangle$ (pour voir ceci, il suffit de considérer l'image du bord $\partial(I \times I)$ dans $S^1 \vee S^1$). Ainsi, par le théorème de van Kampen, on obtient que $\pi_1(K,k) \cong \langle a, b \rangle / (aba^{-1}b = e)$. Si a correspond à l'image de $I \times \{0\}$ dans K, par la définition du revêtement Galoisien $S^1 \times S^1 \to K$ on voit que $\pi_1(S^1 \times S^1, s) \subset \pi_1(K,k)$ est le sous-groupe $\langle a^2, b \rangle$. Vérifions, que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: la relation donne $aba^{-1} = b^{-1}$ dans $\pi_1(K,k)$ et également $ab^{-1}a^{-1} = b$, dont il découle que $a^2ba^{-2} = b$ dans $\pi_1(K,k)$, autrement dit a^2 est un élément central. (Une autre approche à ce problème serait de calculer le groupe d'automorphismes du revêtement universel.)

(d) Le revêtement universel de K est $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, donc est un espace contractile. Considérons une application continue pointée $g : S^n \to K$, pour $n > 1$. Le sphère S^n est simplement connexe (pour $n > 1$), donc le théorème de relèvement des applications fournit un relèvement (unique) $\tilde{g} : S^n \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ qui envoie le point de base à zéro. Le point $\{0\}$ est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{R}^2$, donc $\tilde{g}$ est homotope par une homotopie pointée à l'application constante. Par composition avec la projection, on déduit que g est homotope par une homotopie pointée à l'application constante, donc le groupe $\pi_n(K, *)$ est trivial pour $n > 1$.

(e) La catégorie des revêtements de K est équivalente à la catégorie des $\pi_1(K,k)$-ensembles à droite, puisque K admet un revêtement universel. Les revêtements connexes à 2 feuillets correspondent aux $\pi_1(K,k)$-ensembles transitifs à deux éléments. Il suffit de classifier les classes d'isomorphismes de ces objets ; de manière équivalente, il suffit de classifier les classes de conjugaison des sous-groupes d'indexe 2 de $\pi_1(K,k)$. On remarque que le sous-groupe abélien engendré par a^2 et b^2 agit trivialement sur tout $\pi_1(K,k)$-ensemble à deux éléments ; ce sous-groupe est distingué, de quotient abélien $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, engendré par les images de a et de b. Ainsi on trouve que les sous-groupes d'indexe 2 de $\pi_1(K,k)$ sont les trois groupes avec les ensembles de générateurs suivants : $\{a^2, b\}$ (qui correspondent au revêtement déjà considéré), $\{a, b^2\}$ et $\{a^2, b^2, ab\}$ (on remarque que $(ab)^2 = a^2$, donc ce groupe est engendré par $\{ab, b^2\}$). Un calcul élémentaire montre que ces groupes sont distingués et distincts. Ainsi, il existe trois classes d'isomorphisme distincts de revêtements à 2 feuillets, et ils sont tous Galoisiens.

(3)

Soit $p : E \to B$ un revêtement fini à n feuillets.

(a) Pour $t \in \mathbb{N}$, démontrer que le morphisme $\mathrm{Sing}_t(E) \to \mathrm{Sing}_t(B)$ entre les ensembles des t-simplexes singuliers est surjectif et décrire la préimage d'un simplexe singulier $g : \Delta_t^{\mathrm{top}} \to B$.

(b) Rappeler que $\mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(X)$ est le complexe de chaînes associé au groupe abélien simplicial $\mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_\bullet(X)]$. Montrer qu'il existe un morphisme de complexes de chaînes

$$\mathrm{Tr} : \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(B) \to \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(E)$$

tel que la composée $\mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(p) \circ \mathrm{Tr} : \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(B) \to \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(B)$ est la multiplication par n.

(c) Identifier le morphisme $p_* \circ \mathrm{Tr}_* : H_*(B) \to H_*(B)$ en homologie.

(d) En déduire que $2H_*(\mathbb{R}P^n) = 0$ pour $* \notin \{0, n\}$.

(a) Par définition, $\mathrm{Sing}_t(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(\Delta_t^{\mathrm{top}}, X)$; le simplexe topologique Δ_t^{top} est contractile et, en particulier, localement connexe par arcs et connexe. Le théorème de relèvement d'applications entraîne que, pour $g \in \mathrm{Sing}_t(B)$, et $b \in B$ l'image $g(x)$ d'un point x de Δ_t^{top} et pour $e \in p^{-1}b$, il existe un relèvement unique $\tilde{g}_e \in \mathrm{Sing}_t(E)$ tel que $p \circ \tilde{g}_e = g$ et $\tilde{g}_e(x) = e$. En particulier, $\mathrm{Sing}_t(E) \to \mathrm{Sing}_t(B)$ est une surjection et la préimage de g est l'ensemble $\{\tilde{g}_e | e \in p^{-1}b\}$.

(b) On définit le morphisme de groupes abéliens $\mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_t(B)] \to \mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_t(E)]$ par $[g] \mapsto \Sigma_{e \in p^{-1}b}[\tilde{g}_e]$ (la somme à droite est finie, car p est un revêtement fini), de sorte que la composition avec le morphisme de groupes abéliens $\mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_t(E)] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_t(B)]$ induit par p est multiplication par $n = |p^{-1}b|$. L'unicité des relèvements entraîne que ces morphismes induisent un morphisme Tr de groupes abéliens simpliciaux, car si $\alpha : [m] \to [t]$ est un morphisme de la catégorie Δ, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta_m^{\mathrm{top}} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[urr, dotted, "\widetilde{g\circ\alpha}_e"] & \Delta_t^{\mathrm{top}} \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{g}_e"'] & B.
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $C_* : \Delta^{\mathrm{op}}\mathsf{Ab} \to \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$, on obtient le morphisme recherché. Par construction la composition est multiplication par n.

(c) En passant en homologie, la composée $p_* \circ \mathrm{Tr}$ est multiplication par n.

(d) Par construction, il existe un revêtement $\mathbb{Z}/2$-Galoisien $S^n \to \mathbb{R}P^n$. L'homologie $H_*(S^n)$ est $\mathbb{Z}$ pour $* \in \{0, n\}$ et est 0 sinon. En considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[rr, bend right, "\times 2"'] & H_*(S^n) \arrow[r, "p_*"] & H_*(\mathbb{R}P^n)
\end{tikzcd}$$

on voit que $\times 2$ est trivial si $* \notin \{0, n\}$.

(4)

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ par l'action par multiplication diagonale de $\mathbb{C}^\times$: $\lambda(z_0, \ldots, z_n) = (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$.
Pour $n > t \in \mathbb{N}$, soient

$$\mathbb{C}P^t \overset{i_0}{\hookrightarrow} \mathbb{C}P^n \overset{i_1}{\hookleftarrow} \mathbb{C}P^{n-t-1}$$

les inclusions induites par $\mathbb{C}^{t+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{t+1} \times \mathbb{C}^{n-t} \cong \mathbb{C}^{n+1}$, $x \mapsto (x, 0)$, et $\mathbb{C}^{n-t} \hookrightarrow \mathbb{C}^{t+1} \times \mathbb{C}^{n-t}$, $y \mapsto (0, y)$, de sorte que les images soient disjointes.

(a) Montrer que l'inclusion $\mathbb{C}P^{n-t-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t$ est un rétracte par déformation forte.

(b) Déduire que l'inclusion $\mathbb{C}P^{n-t-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t$ induit un isomorphisme en homologie : $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-t-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t)$.

(c) Par excision, montrer que $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^0) \cong H_*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n\backslash\{0\})$; ainsi calculer les groupes d'homologie $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^0)$.

(d) Par récurrence sur n, calculer les groupes d'homologie de $\mathbb{C}P^n$, en appliquant les résultats précédents.

(a) Écrivons $[z_0, \ldots, z_n]$ pour l'image du point $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}P^n$. L'espace $\mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t$ est le sous-espace ouvert des points $[z_0, \ldots, z_n]$ tel qu'il existe j, $t+1 \leq j \leq n$ pour lequel $z_j \neq 0$. Le sous-espace $\mathbb{C}P^{n-t-1}$ est le sous-espace des points tels que $z_i = 0$ pour $0 \leq i \leq t$. On vérifie facilement que l'application continue

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t) \times I & \to & \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t \\ ([z_0, \ldots, z_n], s) & \mapsto & [sz_0, \ldots, sz_t, z_{t+1}, \ldots z_n] \end{array}$$

définit un rétracte par déformation forte (en particulier, l'homotopie est constante sur l'espace $\mathbb{C}P^{n-t-1}$).

(b) Le morphisme de paires d'espaces topologiques $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-t-1}) \to (\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t)$ induit un morphisme entre les suites exactes longues en homologie (par naturalité) :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_*(\mathbb{C}P^{n-t-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_*(\mathbb{C}P^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-t-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_*(\mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t) \arrow[r] & H_*(\mathbb{C}P^n) \arrow[r] & H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Le morphisme vertical à gauche est un isomorphisme, puisque $\mathbb{C}P^{n-t-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t$ est une équivalence d'homotopie. Le lemme des cinq fournit l'isomorphisme recherché.

(c) Pour $t = 0$, on obtient les inclusions $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n \hookleftarrow \mathbb{C}P^0$. Le complémentaire $\mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n$, via $(z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0, \ldots, z_n, 1]$ et, par cet homéomorphisme, $\mathbb{C}P^n\backslash(\mathbb{C}P^{n-1} \amalg \mathbb{C}P^0) \cong \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$. Le triplet $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\{0\}, \mathbb{C}P^{n-1})$ est excisif, donc l'isomorphisme d'excision fournit $H_*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n\backslash\{0\}) \xrightarrow{\cong} H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^0)$.

Les groupes $H_*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n\backslash\{0\})$ se calcule à l'aide de la suite exacte longue en homologie, en utilisant le fait que $\mathbb{C}^n$ est contractile et $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ est équivalente à homotopie près à S^{2n-1}. On obtient (par un calcul facile) que $H_*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n\backslash\{0\})$ est $\mathbb{Z}$ pour $* = 2n$ et 0 sinon. Par l'isomorphisme d'excision, on a calculé $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^0)$.

(d) On démontre par récurrence sur n que $H_*(\mathbb{C}P^n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour $* = 2i$, $0 \leq i \leq n$ et est 0 sinon. Le cas $n = 0$ est clair. Pour l'étape de récurrence, on utilise la suite exacte longue en homologie associée à $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$:

$$\to H_*(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H_*(\mathbb{C}P^n) \to H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \to .$$

Puisque $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ est $\mathbb{Z}$ concentré en degré $2n$ et l'homologie de $\mathbb{C}P^{n-1}$ est concentré en degrés $\leq 2(n-1)$ (par récurrence), le résultat s'ensuit directement.

(5)

On se place dans la catégorie des complexes $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$. Soient $I_{\mathbb{Z}}$ le complexe $\mathbb{Z} \overset{(\mathrm{id},-\mathrm{id})}{\to} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ concentré en degrés $1,0$ et $\underline{\mathbb{Z}}$ le complexe $\mathbb{Z}$ concentré en dédegrééro.
Soient $C_\bullet, D_\bullet, E_* \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$ des complexes de chaînes.

(a) Montrer que les deux inclusions $i_0, i_1 : \mathbb{Z} \rightrightarrows \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ et la somme $p : \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto x+y$ induisent des morphismes de complexes de chaînes : $\underline{\mathbb{Z}} \overset{i_0}{\underset{i_1}{\rightrightarrows}} I_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p} \underline{\mathbb{Z}}$.

(b) Montrer que $p : I_{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}$ est une équivalence d'homotopie de chaînes.

(c) Décrire $C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}$ explicitement et démontrer qu'un morphisme de complexes de chaînes
$$\phi : C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}} \to D_\bullet$$
est équivalent à la donnée d'une homotopie de chaînes entre $\phi\circ i_0$ et $\phi \circ i_1$, où i_ϵ dénote $\mathrm{Id}_{C_\bullet} \otimes i_\epsilon : C_\bullet \to C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}$.

(d) Démontrer que p induit une équivalence d'homotopie de chaînes $C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}} \to C \otimes \underline{\mathbb{Z}} \cong C_\bullet$. (Vous pouvez admettre l'associativité du produit tensoriel des complexes ; par exemple $(C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}) \otimes I_{\mathbb{Z}} \cong C_\bullet \otimes (I_{\mathbb{Z}} \otimes I_{\mathbb{Z}})$.)

(e) Soit $f : C_\bullet \to E_\bullet$ un morphisme de $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$. Décrire explicitement la somme amalgamée M_f définie par le carré cocartésien :
$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & E_\bullet \arrow[d] \\ C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}} \arrow[r] & M_f. \end{tikzcd}$$
(Ainsi M_f se définit comme le conoyau de l'inclusion $C_\bullet \overset{f-i_1}{\to} E_\bullet \oplus (C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}})$.)

(f) Montrer que $p : I_{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}$ induit un morphisme de complexe de chaînes $p : M_f \twoheadrightarrow E_\bullet$ et que i_0 induit une inclusion $i_0 : C_\bullet \hookrightarrow M_f$ de sorte que la composée $C_\bullet \overset{i_0}{\hookrightarrow} M_f \overset{p}{\twoheadrightarrow} E_\bullet$ soit f.

(g) Soit $g : A \to B$ un morphisme de groupes abéliens. Montrer que les morphismes $A \overset{(\mathrm{Id}_A, g)}{\to} A \oplus B \overset{-g+\mathrm{Id}_B}{\to} B$ définissent une suite exacte courte de groupes abéliens.

(h) A l'aide de la suite exacte courte de complexes $0 \to C_\bullet \to E_\bullet \oplus (C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}) \to M_f \to 0$ qui définit M_f, montrer que $p : M_f \to E_\bullet$ induit un isomorphisme en homologie.

(i) Montrer que le morphisme $f : C_\bullet \to E_\bullet$ induit une suite exacte longue
$$\ldots H_n(C_\bullet) \overset{H_n f}{\to} H_n(E_\bullet) \overset{\alpha}{\to} H_n(C_f) \to H_{n-1}(C_\bullet) \ldots$$
en explicitant la définition du complexe C_f et en expliquant la définition du morphisme α.

(a) Le fait que i_0, i_1 induisent des morphismes de complexes de chaînes est élémentaire. Pour p, il suffit de vérifier que le carré
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "{\mathrm{Id},-\mathrm{Id}}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$
commute, qui découle d'un calcul immédiat.

(b) La composée $\underline{\mathbb{Z}} \overset{i_0}{\to} I_{\mathbb{Z}} \overset{p}{\to} \underline{\mathbb{Z}}$ est l'identité, donc il suffit de montrer que $i_0 p$ est homotope à l'identité. Ce morphisme correspond au morphisme de complexes de chaînes suivant :
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "{\mathrm{Id},-\mathrm{Id}}"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[d, "{(x,y)\mapsto(x+y,0)}"] \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "{\mathrm{Id},-\mathrm{Id}}"'] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

On définit une homotopie de chaînes h par $(x, y) \mapsto -y$. Une vérification élémentaire (mais nécessaire) montre que ceci est bien une homotopie de chaînes de la forme recherchée.

(c) Par définition, on a $(C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z})_n = C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ (on pose $C_t = 0$ pour $t < 0$). La différentielle est donnée par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
C_n^{\oplus 2} \arrow[d, "d_C^{\oplus 2}"'] & \oplus & C_{n-1} \arrow[d, "d_C"] \arrow[dll, "(-1)^{n-1}(\mathrm{Id}, -\mathrm{Id})"] \\
C_{n-1}^{\oplus 2} & \oplus & C_{n-2}.
\end{tikzcd}$$

Par constuction, on a une inclusion $C_\bullet \oplus C_\bullet \hookrightarrow C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}$, donc un morphisme ϕ nous fournit par restriction les deux morphismes ϕ_0, ϕ_1. En degré n, le morphisme ϕ donne $C_n^{\oplus 2} \oplus C_{n-1} \to D_n$; on définit $h_{n-1} : C_{n-1} \to D_n$ comme $(-1)^{n-1}\mathrm{res}|_{C_{n-1}}$.

Alors, on vérifie que (détails nécessaires !) ϕ est un morphisme de complexes de chaînes si et seulement si ϕ_0, ϕ_1 sont des morphismes de complexes de chaînes et les morphismes h_n satisfont :

$$d_D(-1)^{n-1}h_{n-1} = (-1)^{n-2}h_{n-2}d_C + (-1)^{n-1}(\phi_0 - \phi_1).$$

Cette condition est équivalente à la condition pour que h soit une homotopie de chaînes de ϕ_0 vers ϕ_1.

(d) Par le résultat précédent, on a un morphisme de complexes de chaînes : $H : I_\mathbb{Z} \otimes I_\mathbb{Z} \to I_\mathbb{Z}$ qui représente l'homotopie entre le morphisme identité de $1_\mathbb{Z}$ et $i_0 p$. On obtient ainsi un morphisme $\mathrm{Id}_{C_\bullet} \otimes H : C_\bullet \otimes (I_\mathbb{Z} \otimes I_\mathbb{Z}) \to C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}$. Par l'associativité du produit tensoriel, ceci correspond à un morphisme $(C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}) \otimes I_\mathbb{Z} \to C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}$ qui représente une homotopie de chaînes entre l'identité de $C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}$ et le morphisme $\mathrm{Id}_{C_\bullet} \otimes i_0 p$. Le résultat en découle.

(e) On calcule directement que $(M_f)_n = C_n \oplus E_n \oplus C_{n-1}$ et que la différentielle est donnée par :

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[d, "d_C"'] & \oplus & E_n \arrow[d, "d_E"'] & \oplus & C_{n-1} \arrow[d, "d_C"] \arrow[dllll, bend right, "(-1)^{n-1}\mathrm{Id}"'] \arrow[dll, bend right, "(-1)^n f_{n-1}"] \\
C_{n-1} & \oplus & E_{n-1} & \oplus & C_{n-2}.
\end{tikzcd}$$

(f) Le morphisme $p : M_f \to E$ a pour composantes $(M_f)_n = C_n \oplus E_n \oplus C_{n-1} \xrightarrow{f + \mathrm{Id}_{E_n} + 0} E_n$. Il est élémentaire de vérifier que ceci est un morphisme de complexes de chaînes. De même, l'inclusion i_0 induit l'inclusion du sous-complexe $C_\bullet \hookrightarrow M_f$, qui correspond à l'inclusion du premier facteur. La composition de ces deux morphismes est f.

(g) La composition des deux morphismes est triviale et $A \to A \oplus B$ admet un rétracte (donc est un monomorphisme) et $A \oplus B \to B$ admet une section (donc est un épimorphisme). Il reste à vérifier l'exactitude au milieu. On a $(-g + \mathrm{Id}_B)(a, b) = b - g(a)$, donc (a, b) appartient au noyau si et si $b = g(a)$, cequi est équivalent à $(a, b) = (\mathrm{Id}_A, g)a$. Le résultat en découle.

(h) La suite exacte courte de complexes $0 \to C_\bullet \to E_\bullet \oplus (C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}) \to M_f \to 0$ induit une suite exacte longue en homologie :

$$\ldots \to H_*(C_\bullet) \to H_*(E_\bullet) \oplus H_*(C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z}) \to H_*(M_f) \to \ldots$$

et le morphisme p induit une équivalence d'homotopie $C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z} \to C_\bullet$ de sorte que la composante $H_*(C_\bullet) \to H_*(C_\bullet \otimes I_\mathbb{Z})$ soit un isomorphisme. En particulier, la suite exacte longue est isomorphe à une suite exacte courte de groupes abéliens gradués :

$$0 \to H_*(C_\bullet) \overset{(H_* f, \mathrm{Id}_{H_*(C_\bullet)})}{\to} H_*(E_\bullet) \oplus H_*(C_\bullet) \to H_*(M_f) \to 0.$$

Par le point précédent et par le lemme des cinq, on en déduit que $p : M_f \to E_\bullet$ induit un isomorphisme en homologie [2].

2. Pour compléter la démonstration, il faut donner le morphisme de suites exactes courtes explicitement.

(i) On définit le complexe de chaînes C_f comme le conoyau de $C_\bullet \stackrel{i_0}{\to} M_f$, de sorte qu'on ait une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_\bullet \stackrel{i_0}{\to} M_f \to C_f \to 0.$$

Explicitement, on a $(C_f)_n = E_n \oplus C_{n-1}$ et il est élémentaire d'expliciter la différentielle (détails nécessaires !).

En utilisant le fait que la composition de i_0 avec $p : M_f \to E_\bullet$ est le morphisme f, on obtient la suite exacte longue et l'identification suivante :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_*(C_\bullet) \arrow[r, "H_*(i_0)"] \arrow[dr, "H_*(f)"'] & H_*(M_f) \arrow[r] \arrow[d, "H_*(p)", "\cong"'] & H_*(C_f) \arrow[r] & \cdots \\
& & H_*(E_\bullet). \arrow[ur, "\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

(6)

Soit $e^n \subset S^n$ l'inclusion d'un hémisphère fermé dans le n-sphère S^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'une suite exacte courte de foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens

$$0 \to F_0(X) \xrightarrow{\iota_X} F_1(X) \xrightarrow{\pi_X} F_2(X) \to 0,$$

où F_j sont des foncteurs et ι, π sont des transformations naturelles, est *scindée naturellement* s'il existe une tranformation naturelle $\sigma_X : F_2(X) \to F_1(X)$ telle que $\pi_X \circ \sigma_X = \mathrm{Id}_{F_2(X)}$.

(a) Montrer qu'il existe une suite exacte courte qui exprime $H_*(S^n \times X)$ en termes de $H_*(X)$ et de $H_*(S^n \times X, e^n \times X)$ et montrer que la suite exacte courte est scindée naturellement en X.

(b) Si $n > 0$, en utilisant excision, montrer qu'il existe une suite exacte courte qui relie $H_*(S^n \times X, e^n \times X)$ à $H_*(X)$ et $H_*(S^{n-1} \times X)$ et montrer que la suite exacte courte est scindée naturellement en X.

(c) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme naturel en X :

$$H_*(S^n \times X) \cong H_*(X) \oplus H_{*-n}(X)$$

(a) Considérer la suite exacte longue en homologie associée à $(S^n \times X, e^n \times X)$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_*(e^n \times X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_*(S^n \times X) \arrow[r] \arrow[dl, "\rho"] & H_*(S^n \times X, e^n \times X) \arrow[r] & \cdots \\ & H_*(X) & & & \end{tikzcd}$$

dont l'isomorphisme vertical est induit par l'équivalence d'homotopie $e^n \to *$ (la projection) et ρ par la projection. Tous ces morphismes sont naturels en X donc on déduit qu'il existe un isomorphisme naturel en X :

$$H_*(S^n \times X) \cong H_*(X) \oplus H_*(S^n \times X, e^n \times X).$$

(b) Soit η un point dans l'intérieur de e^n, qui induit donc une inclusion naturelle $X \hookrightarrow e^n \times X$. Le triplet $(S^n \times X, e^n \times X, \{\eta\} \times X)$ est excisif, donc l'inclusion induit un isomorphisme naturel $H_*((S^n \backslash \{\eta\}) \times X, (e^n \backslash \{\eta\}) \times X) \xrightarrow{\cong} H_*(S^n \times X, e^n \times X)$.

Soit $\tilde{e}^n \subset S^n$ l'hémisphère fermé, tel que $S^n = e^n \cup \tilde{e}^n$ et $e^n \cap \tilde{e}^n \cong S^{n-1}$. Alors, l'inclusion $(\tilde{e}^n, S^{n-1}) \to (S^n \backslash \{\eta\}, e^n \backslash \{\eta\})$ est une équivalence d'homotopie de paires, donc induit un isomorphisme naturel

$$H_*(\tilde{e}^n \times X, S^{n-1} \times X) \xrightarrow{\cong} H_*((S^n \backslash \{\eta\}) \times X, (e^n \backslash \{\eta\}) \times X).$$

On vérifie (les détails sont nécessaires !) que la suite exacte longue en homologie induit une suite exacte courte naturelle en X :

$$0 \to H_{*+1}(\tilde{e}^n \times X, S^{n-1} \times X) \to H_*(S^{n-1} \times X) \to H_*(X) \to 0$$

et le choix d'un point de base de S^{n-1} fournit une section naturelle au morphisme $H_*(S^{n-1} \times X) \to H_*(X)$, qui est induit par la projection. Enfin, par les arguments précédents, le terme à gauche est naturellement isomorphe à $H_*(S^n \times X, e^n \times X)$.

(c) Le résultat est évident pour $n = 0$, par l'additivité de l'homologie, car $S^0 \times X \cong X \amalg X$.

Pour démontrer le résultat, il est suffisant de démontrer qu'il existe un isomorphisme naturel $H_*(S^n \times X, e^n \times X) \cong H_{*-n}(X)$. Par récurrence, le noyau de la projection $H_*(S^{n-1} \times X) \to H_*(X)$ est $H_{*-n+1}(X)$, donc la suite exacte courte fournit l'isomorphisme recherché.