École Normale Supérieure
FIMFA — Statistique 2014–2015

Partiel

1. Dans cet exercice, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur Gaussien d'espérance $\mu = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ et de covariance connue $C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. L'objectif est d'estimer θ_1. On dispose de n tirages indépendants distribués selon $\mathcal{N}(\mu, C)$: $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$.
Dans le scenario 1, θ_2 est connu du statisticien, dans le scenario 2, θ_2 n'est pas connu (c'est un paramètre de nuisance par opposition à θ_1 qui est un paramètre d'intérêt).
   (a) Proposer un estimateur de θ_1 au maximum de vraisemblance dans le scenario 1. Est il biaisé ? Quel est son risque quadratique ?

Solution: Dans ce scenario, comme θ_2 est connue, la loi de Y est connue. On peut considérer la loi de X conditionnellement à Y. C'est une loi Gaussienne dont la densité est explicitement connue (voir cours), c'est la loi des résidus lorsqu'on cherche à prédire X à partir de Y, c'est à dire $\mathcal{N}(\theta_1 + \rho\sigma_1/\sigma_2(y-\theta_2), \sigma_1^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2/\sigma_2^2) = \mathcal{N}(\theta_1 + \rho\sigma_1/\sigma_2(y-\theta_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$.
La variance de X sachant Y n'est autre que le complément de Schur de σ_2^2 dans C, c'est la variance de X (σ_1^2) diminuée de la variance dite expliquée $\rho^2\sigma_1^2$.
Si on écrit la log-vraisemblance, dans le scenario 1, pour une observation, on obtient

$$\ell(\theta_1) = -\frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma_1^2(1-\rho^2)\right) - \frac{(x-\theta_1-\rho\sigma_1/\sigma_2(y-\theta_2))^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\,.$$

Ceci conduit à

$$\widehat{\theta}_1 = x - \rho\sigma_1/\sigma_2(y-\theta_2)$$

et pour un n -échantillon à

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X}_n - \rho\sigma_1/\sigma_2(\overline{Y}_n - \theta_2)\,.$$

Cet estimateur linéaire est sans biais, gaussien de variance $\frac{\sigma_1^2(1-\rho^2)}{n}$.

   (b) Proposer un estimateur de θ_1 au maximum de vraisemblance dans le scenario 2. Est il biaisé ? Quel est son risque quadratique ?

Solution: Si on écrit la log-vraisemblance, dans le scenario 2, pour un n-échantillon, on obtient

$$\ell(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{2}\log\left((2\pi)^2\sigma_1^2\sigma^2(1-\rho^2)\right) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{X}_n-\theta_1 & \overline{Y}_n-\theta_2\end{pmatrix} C^{-1}\begin{pmatrix}\overline{X}_n-\theta_1 \\ \overline{Y}_n-\theta_2\end{pmatrix}\,.$$

L'estimateur au maximum de vraisemblance est

$$\begin{pmatrix}\widehat{\theta}_1 \\ \widehat{\theta}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{X}_n \\ \overline{Y}_n\end{pmatrix}$$

Cet estimateur est lui aussi linéaire, gaussien, sans biais de covariance, $\frac{1}{n}C$. L'estimateur de θ_1 est donc sans biais, gaussien, de covariance σ_1^2/n. On n'utilise pas $Y_1, \ldots, Y_n$ pour estimer θ_1.

   (c) Calculer l'information de Fisher dans les deux scenarios. Les deux estimateurs réalisent-ils la borne de Cramer-Rao ?

Solution: Dans les deux modèles, l'information de Fischer est l'inverse de la covariance, les deux estimateurs réalisent la borne de Cramer-Rao.

(d) Comparer les risques des deux estimateurs. Le paramètre θ_2 est il vraiment une nuisance ?

Solution: Les risques quadratiques sont $(1-\rho^2)\sigma_1^2$ et σ_1^2. Le paramètre θ_2 est bien un paramètre de nuisance (sauf bien sûr si $\rho = 0$, c'est-à-dire si X et Y sont indépendantes).

2. Dans cet exercice, le modèle est constitué par les distributions de Laplace dont la densité sur $\mathbb{R}$ est donnée par $f_{\mu,\sigma}(x) = \exp(-|x-\mu|/\sigma)/(2\sigma)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ (paramètre de localisation) et $\sigma \in]0,\infty)$ (paramètre d'échelle). Les données $X_1, \ldots, X_n$ sont supposées indépendamment identiquement distribuées selon une loi de Laplace de paramètres inconnus.

Dans un premier temps on suppose σ fixé et égal à 1.

(a) Quelle est l'espérance de la loi de densité $f_{\mu,1}$? En déduire un estimateur $\widetilde{\mu}$ de μ par la méthode des moments. Est il biaisé ? Quel est son risque quadratique (pour une taille d'échantillon donnée) ? Est-il asymptotiquement normal ?

Solution: Nous sommes ici dans une situation très courante (dans les exercices de statistique), nous avons affaire à un modèle construit autour d'une loi de base, la loi de Laplace, en ajoutant un paramètre de translation/localisation μ et un paramètre d'échelle σ. Il faut bien avoir en tête que si $X \sim f_{\mu,\sigma}$, alors $Y := (X-\mu)/\sigma \sim f_{0,1}$. Pour calculer les moments (espéarance, variance) et les quantiles (médianes, quartiles) de $f_{\mu,\sigma}$, il est prudent de calculer ces quantités pour $f_{0,1}$ la loi « standard » de la famille, et d'utiliser les relations simples

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sigma \mathbb{E}Y + \mu \\ \mathrm{var}(X) &= \sigma^2 \,\mathrm{var}(Y)\,, \end{aligned}$$

et si $q(p)$ désigne le quantile d'ordre p de $f_{0,1}$ alors $\sigma q(p) + \mu$ désigne le quantile d'ordre p de $f_{\mu,\sigma}$.

Dans cette question, on a affaire à un modèle de « localisation », la densité $f_{\mu,1}$ est la densité de la loi de $X + \mu$ lorsque $X \sim f_{0,1}$. La densité $f_{0,1}$ est paire, elle admet tous les moments polynomiaux et certains moments expontiels. Si $X \sim f_{0,1}$ alors $-X \sim f_{0,1}$, donc $\mathbb{E}X = 0$. Il en va de même pour la médiane car on a $\mathbb{P}\{X \leq -x\} = \mathbb{P}\{X \geq x\}$. L'espérance et la médiane de $f_{0,1}$ sont donc égales à 0. L'espérance et la médiane de $f_{\mu,1}$ sont égales à μ.

L'estimateur $\widetilde{\mu}$ peut être choisi égal à la moyenne empirique. Il est sans biais. Son risque quadratique est (au facteur $1/n$ près) la variance de la loi $f_{0,1}$ (la variance de X et celle de $X + \mu$ sont égales). La variance de $f_{0,1}$ est égale à 2.

Pour s'en convaincre, si on se souvient que la variance de la loi expontielle standard est égale à 1, il n'est pas nécessaire de faire des calculs. Si Y suit un loi de Laplace standard, $Y \sim ZV$ où V suit une loi exponentielle standard, Z est un signe aléatoire indépendant de V. La relation de Pythagore s'écrit

$$\mathrm{var}(Y) = \mathbb{E}[\mathrm{var}(Y \mid Z)] + \mathrm{var}(\mathbb{E}[Y \mid Z])$$

mais $\mathrm{var}(Y \mid Z) = 1$ et $\mathbb{E}[Y \mid Z] = \mathrm{sign}(Z)$.

La suite $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,2)$. C'est un cas trivial d'application du TCL.

(b) Ecrire la log-vraisemblance en μ d'un n-échantillon $x_1, \ldots, x_n$. Le maximum de vraisemblance est il bien défini ? unique ? Proposer un estimateur au maximum de vraisemblance $\widehat{\mu}_n$ pour les échantillons de taille impaire.

Solution:

$$\ell_n(\mu) = n \log \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|\,.$$

C'est une fonction convexe de μ, mais pas une fonction strictement convexe. Elle tend vers $+-\infty$ lorsque μ tend vers $\pm\infty$. Le maximum de vraisemblance est bien attend. Si on ordonne les observations, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq$

$\ldots \leq x_{(n)}$ (on a presque sûrement des inégalités strictes), pour $\mu \in [x_{(i)}, x_{(i+1)}]$, on a

$$\ell_n(\mu) = n \log \frac{1}{2} - \sum_{j \leq i}^{n} (\mu - x_{(j)}) - \sum_{j > i}^{n} (x_{(j)} - \mu) = n \log \frac{1}{2} - \mu(2i - n) + \sum_{j \leq i}^{n} x_{(j)} - \sum_{j > i}^{n} x_{(j)} \, .$$

Sur $[x_{(i)}, x_{(i+1)}]$, le maximum est atteint en $x_{(i)}$ ou en $x_{(i+1)}$ (et si $n = 2i$ sur tout l'intervalle). Pour trouver la valeur du maximum de vraisemblance, il suffit de rechercher

$$\max_j - \sum_{i=1}^{n} |x_{(i)} - x_{(j)}| = \max_j \left((2j - n) x_{(j)} - \sum_{i > j} x_{(i)} + \sum_{i < j} x_{(i)} \right)$$

Si n est impaire et si les x_i sont deux à deux distincts, le maximum est atteint de manière unique en $x_{(\lfloor n/2 \rfloor)}$, si n est paire, le maximum de vraisemblance est atteint entre $x_{(n/2)}$ et $x_{(n/2+1)}$.
La médiane minimise l'écart absolu moyen....

(c) Si $(\widehat{\mu}_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'estimateurs au maximum de vraisemblance, est-elle consistante ?

Solution: Il suffit de s'intéresser au cas où $\mu = 0$. Par symétrie, l'espérance de la médiane empirique est nulle, l'estimateur est sans biais.
La probabilité que la médiane empirique soit inférieure où égale à $-\epsilon$, est inférieure à la probabilité qu'une binomiale de paramètres $2n + 1$ et $\int_{-\infty}^{-\epsilon} \exp(y)/2 \mathrm{d}y = \exp(-\epsilon)/2 < 1/2$ soit supérieure ou égale à n. D'après l'inégalité de Hoeffding, cette probabilité est inférieure à $\exp(-(2n+1)(1 - \exp(-\epsilon))^2/2)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En raisonant symétriquement,

$$\mathbb{P}\left\{ \left| X_{(n+1)} \right| > \epsilon \right\} \leq 2\mathrm{e}^{-n(1-\mathrm{e}^{-\epsilon})^2} \, .$$

On en déduit immédiatement la consistance de la médiane empirique. Et comme la suite des membres droits est sommable, on en déduit même la consistance forte.

(d) Si oui, la suite $\sqrt{2n+1}(\widehat{\mu}_{2n+1} - \mu)$ est elle asymptotiquement gaussienne et quelle est la variance de la loi limite ?

Solution: Là encore, il suffit de s'intéresser au cas où $\mu = 0$. On peut utiliser la transformation quantile de la façon suivante : la médiane empirique d'un $2n + 1$-échantillon de la loi de Laplace est distribuée comme l'image de la médiane empirique d'une $2n+1$-échantillon de la loi Exponentielle par la transformation définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t \mapsto |t - \log 2| - (\log(\mathrm{e}^t - 1))_-$ où $(x)_- := \max(0, -x)$. Quoiqu'il en paraisse, cette fonction est dérivable en $t \log 2$, de dérivée 1.
La convergence en loi de la médiane empirique des échantillons exponentiels (Devoir à préparer pour le 6 novembre, Exercice 5), combinée à la méthode du delta permet de conclure à la normalité asymptotique de la médiane empirique d'un $2n + 1$-échantillon de la loi de Laplace recentré et renormalisé. La variance asymptotique est 1.

(e) Proposer un intervalle de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ ($\alpha \in]0, 1[$) pour μ.

Solution: On propose un intervalle de confiance bilatère centré autour de la médiane empirique. Si on note $z_{\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1_\alpha/2$ de la gaussienne centrée réduite $z_\alpha \sim_{\alpha \to 0} \sqrt{2 \log 1/\alpha - \log \log 1/\alpha - \log(4\pi)}$, l'intervalle de confiance $\widehat{\mu} \pm z_{\alpha/2}/\sqrt{2n+1}$ est de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$.

(f) Comparer les risques quadratiques de $\widehat{\mu}_{2n+1}$ et de $\widetilde{\mu}_{2n+1}$ lorsque $n \to \infty$.

Solution: Les deux estimateurs sont sans biais. Leur risque quadratique coïncide avec leur variance. Le risque quadratique de $\widetilde{\mu}_{2n+1}$ est asymptotiquement le double de celui de $\widehat{\mu}_{2n+1}$. On dit que dans ce cas l'estimateur de la médiane empirique est plus efficace que la moyenne empirique (dans d'autres situations, c'est l'inverse, par exemple pour l'estimation d'une espérance gaussienne).

(g) On ne suppose plus que σ est connu, proposer un estimateur $\widehat{\sigma}$ de σ (par exemple en maximisant la vraisemblance mais ce n'est pas obligatoire). Montrer qu'il est consistant. Proposer un intervalle de niveau de confiance asymptotique $1-\alpha$ pour μ dans ce contexte.

Solution: On peut maximiser la vraisemblance mais on peut aussi un estimateur de dispersion *robuste* fondé sur l'écart interquartile empirique. L'écart interquartile d'un loi de Laplace de paramètre d'échelle σ est $2\sigma \log 2$. On peut estimer σ par $(X_{3n/2:2n+1} - X_{n/2:2n+1})/(2\log 2)$. Cette suite d'estimateurs sera consistante et asymptotiquement normale après recentrage et renormalisation par $\sqrt{2n+1}$.

3. Dans cet exercice $p_1, \ldots, p_n$ sont une suite de réels connus pris dans $]0,1[$. On veut distinguer deux lois $P = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i)$ et $Q = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(1-p_i)$. On observe $X_1, \ldots, X_n$. Si H_0 est vraie, les X_i sont indépendantes et $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$, sous H_1, les X_i sont indépendantes et $X_i \sim \mathcal{B}(1-p_i)$ ($\mathcal{B}(p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p).

(a) Ecrire la statistique du rapport de vraisemblance. Proposer un test de niveau au plus α ($\alpha \in]0,1[$). Votre test est-il le plus puissant parmi les tests de même niveau ?

Solution:
$$\frac{p_1(x_1, \ldots, x_n)}{p_0(x_1, \ldots, x_n)} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)^{2x_i} \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) .$$
Pour construire un test de niveau α, on détermine la loi de la statistique du rapport de vraisemblance sous l'hypothèse nulle, on détermine son quantile d'ordre $1-\alpha$, on rejette l'hypothèse nulle si ce quantile est dépassé. On obtient ainsi un test de niveau au plus α. Le lemme de Neyman-Pearson nous indique qu'il est parmi les plus puissants de son niveau. Comme la loi du rapport de vraisemblance est discrète, ce test n'est pas nécessairement de niveau exactement α et donc pas le plus puissant parmi les tests de niveau inférieurs ou égaux à α.

Pour obtenir un test de nivau exactement α, on randomise la décision lorsque le rapport de vraisemblance est exactement égal au seuil de décision, de façon à obtenir un test de niveau exactement α. De cette façon, on obtient un test de puissance maximale.

(b) On définit $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$. Montrer que l'information de Kullback entre P et Q est minorée par $n(2p-1)\log\frac{p}{1-p}$. Cette minoration est elle toujours fine ?

Solution:
$$D(P,Q) = \sum_{i=1}^n (2p_i - 1) \log \frac{p_i}{1-p_i}$$
La minoration se déduit immédiatement de la convexité de $p \mapsto (2p-1)\log\frac{p}{1-p}$. Si on réécrit $p = 1/2 + h$
$$(2p-1)\log\frac{p}{1-p} = 2h \log \frac{1/2+h}{1/2-h} .$$

(c) On considère maintenant que n tend vers l'infini. $P_n = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(p_n)$ et $Q_n = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(1-p_n)$. A quelle condition sur $(p_n - 1/2)_n$ peut on garantir l'existence d'une suite de tests dont les probabilités d'erreur de première et de seconde espèce convergent toutes les deux vers 0 ?

Solution: Avec la convention, $h_n = p_n - 1/2$, l'information de Kullback entre P_n et Q_n s'écrit :
$$\sum_n 2h_n \log \frac{1/2+h_n}{1/2-h_n} .$$
La somme des erreurs de première et de seconde espèce est minorée par
$$1 - \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(P_n, Q_n) \geq 1 - \sqrt{\frac{D(P_n,Q_n)}{2}} .$$
Si $D(P_n, Q_n)$ tend vers 0, l'un des deux probabilités d'erreur au moins ne tend pas vers 0. Cette quantité $(nh_n \log\frac{1/2+h_n}{1/2-h_n})$ ne peut tendre vers 0 que si $h_n \to 0$, et alors elle est équivalente à $4nh_n^2$. Si nh_n^2 tend vers 0 alors l'une des deux erreurs au moins ne tend pas 0.

Si nh_n^2 tend vers l'infini, sous H_0, $\mathbb{E}\sum_{i=1}^n X_i = n/2 + nh_n/2$ alors que sous H_1, $\mathbb{E}\sum_{i=1}^n X_i = n/2 - nh_n/2$. Sous H_0,

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq n/2\right\} \leq \mathrm{e}^{-nh_n^2/2}$$

et sous H_1,

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \geq n/2\right\} \leq \mathrm{e}^{-nh_n^2/2} .$$

Si $nh_n^2 \to \infty$, les errurs du test qui compare $\sum_{i=1}^n X_i$ à $n/2$, qui est un test de rapport de vraisemblance, tendent vers 0

Les questions 4, 5 peuvent être traitées indépendamment.

On considère dans cet exercice une variable aléatoire X définie par $X = ZY_1 + (1-Z)Y_2$, où $Z \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$, $Y_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $Y_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ et où Z, Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On dit que X suit un mélange de lois de Poisson. On observe un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de même loi que X.

4. (a) On suppose que le paramètre (λ_1, λ_2) est inconnu. Est-il identifiable ? Dans la négative, donner le paramètre identifiable du modèle.

Solution: Ici, il faut se rappeler ce que signifie *identifiable*. C'est un terme technique. Un modèle paramétré $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est identifiable si et seulement si $\theta \neq \theta' \Rightarrow P_\theta \neq P_{\theta'}$. Ici, $P_{\lambda_1,\lambda_2} = P_{\lambda_2,\lambda_1}$, donc le couple (λ_1, λ_2) n'est pas identifiable. En revanche la paire $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ est identifiable. Et bien sûr, toute fonction symétrique de (λ_1, λ_2) est identifiable.

Pour se convaincre de l'identifiabilité de $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, vérifier que $\mathbb{E}_{\lambda_1,\lambda_2}X = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ et en posant $\Delta = \lambda_1 - \lambda_2$, en supposant $\Delta \geq 0$.

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1} + \mathrm{e}^{-\lambda_2}}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}} \cosh(-\Delta/2) .$$

Le paramètre est identifiable à une permutation près. Le paramètre identifiable est donc l'ensemble $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, ou encore le couple (λ_1, λ_2) avec la contrainte $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

(b) Proposer un estimateur de ce paramètre par la méthode des moments. Est-il toujours défini ? Est-il consistant ?

Solution: On calcule :

$$E[X] = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \qquad Var(X) = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

En notant $\bar{x}$ et s^2 la moyenne et la variance empiriques, on voit que l'estimateur des moments doit vérifier le système

$$\begin{cases} \bar{x} & = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ s^2 & = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \bar{x} \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution, il faut $s^2 - \bar{x} \geq 0$, ce qui n'est pas forcément vérifié (par exemple, ce n'est pas vérifié dans le cas où les x_i sont tous égaux et non nuls) ; pour autant, la probabilité que cette condition soit vérifiée tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On montre que l'estimateur est consistant par la loi des grands nombres et le théorème de l'image continue.

5. Dans cette question, on suppose que le paramètre $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ est connu, et que $\lambda_1 \geq \lambda_2$. On souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \lambda_1 > \lambda_2$.

(a) Donner la loi de X dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$.

Solution: Dans ce cas, on vérifie aisément que X suit une loi $Poisson(\lambda)$.

(b) Dans le cas général $\lambda_1 \geq \lambda_2$, donner une suite (a_n) et une loi non dégénérée μ telles que

$$a_n(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

Solution: Nous sommes (trivialement) dans les conditions du théorème central limite. La seule chose à faire est de calculer la variance de X_i, c'est à dire du « mélange de Poisson ».

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\operatorname{var}(X \mid Z) + \operatorname{var}(\mathbb{E}[X \mid Z]) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}$$

On remarque au passage que la variance du mélange de Poisson est plus grande que la variance de la loi de Poisson de même espérance.
Comme $E[X] = \gamma/2$, on applique le Théorème Central Limite :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

(c) Construire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour le paramètre $\nu = \lambda_1 - \lambda_2$.

Solution: Une façon naturelle de construire une IC est de noter q le quantile $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0, 1)$. Alors

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx P\left[\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \gamma/2}{\sqrt{\nu^2/4 + \gamma/2}}\right| > q\right] \\
&= P\left[n(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2})^2 > q^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)\right] \\
&= P\left[\frac{4n}{q^2}(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2})^2 - 2\gamma > \nu^2\right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Comme on a imposé $\lambda_1 \geq \lambda_2$, donc $\nu \geq 0$, on en déduit un IC de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour ν :

$$\left[0 \ , \ \sqrt{\frac{4n}{q^2}(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2})^2 - 2\gamma}\right[.$$

De manière similaire à la question 4b, on peut remarquer que le radicande n'est pas forcément positif (donc l'IC n'est pas forcément défini), mais que la probabilité qu'il soit positif tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

(d) En déduire un test de niveau asymptotique α de H_0 contre H_1.

Solution: Cet intervalle de confiance ne donne pas directement un test de H_0 contre H_1, mais on peut remarquer que sous l'hypothèse H_0 que $\nu = 0$, l'équation (1) se récrit

$$P\left[\frac{4n}{q^2}(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2})^2 - 2\gamma < 0\right] \approx 1 - \alpha.$$

Une procédure de test est donc : accepter H_0 ssi $\frac{4n}{q^2}(\bar{X}_n - \frac{\gamma}{2})^2 - 2\gamma < 0$.