

CONCOURS ou EXAMEN

 (1)

 (1)

École normale supérieure - PARIS

le _____

Epreuve de _____

A remplir (en caractères d'imprimerie) et à cacheter par le candidat

NOM: _____

Prénom: _____

Date de naissance: _____

N° de table: _____

Signature: _____

Rabattre ici le coin gommé

Colonne réservée
à l'organisateur

Corrigé du partiel d'analyse complexe

Exercice 1 : (a) Ilu en cours. On a

$$\forall z \in D(0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{où}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad \forall 0 < r < R$$

(b) Comme f est intégrable, on peut passer en coordonnées polaires et, si $z \in D(0, R)$,

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{D(0, R)} \frac{R^2 f(w)}{(R^2 - \bar{w}z)^2} dA(w)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{D(0, R)} \frac{f(w)}{\left(1 - \frac{wz}{R^2}\right)^2} dA(w)$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_{D(0, R)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\bar{w}z}{R^2}\right)^n dA(w)$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D(0, R)} (n+1) f(w) \frac{\bar{w}^n z^n}{R^{2n}} dA(w)$$

où la permutation est justifiée car $\left| \frac{f(w) \bar{w}^n z^n}{R^{2n}} \right|$



est dominé par $g(w) = |f(w)| \cdot \left(\frac{|z|}{R}\right)^m$, et en vertu du théorème de Fubini-Tonelli. est $\sum (n+1)g_n$ est intégrable sur $D(0, R)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } I &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{n+1}{\pi R^{2n+2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) z^n e^{-in\theta} r dr d\theta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{n+1}{\pi R^{2n+2}} \int_0^R r^{2n+1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta}) e^{in\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} r d\theta \right) dr \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{2(n+1)}{R^{2n+2}} \int_0^R r^{2n+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w) dw}{w^{n+1}} dr \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n \cdot \frac{2(n+1)}{R^{2n+2}} \int_0^R r^{2n+1} dr \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
 &= f(z).
 \end{aligned}$$

(2) Il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout disque fermé assez petit -

Soit $z_0 \in \Omega$ et $\delta > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \delta)} \subset \Omega$.

D'après la question (1) (b), on a, pour tout $z \in D(z_0, \delta)$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\text{on a } f_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{D(z_0, \delta)} \frac{\delta^2 f_n(w)}{(\delta^2 - (w-z_0)(\bar{z}-z_0))^2} d\lambda(w)$$

Donc si $\begin{cases} w \in D(z_0, \delta) \\ z \in D(z_0, \frac{\delta}{2}) \end{cases}$, comme $|(w-z_0)(z-z_0)| \leq \frac{\delta^2}{2}$

$$|f_n(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{D(z_0, \delta)} \frac{\delta^2 |f_n(w)|}{(\delta^2/2)^2} d\lambda(w)$$

$$\leq \frac{4}{\pi \delta^2} \int_{D(z_0, \delta)} |f_n(w)| d\lambda(w)$$

$$\leq \frac{4}{\pi \delta^2} \int_{\Omega} |f_n(w)| d\lambda(w)$$

$$\text{Donc } \|f_n\|_{\infty, D(z_0, \frac{\delta}{2})} \leq \frac{4}{\pi \delta^2} \int_{\Omega} |f_n(w)| d\lambda(w)$$

$\rightarrow 0$

$n \rightarrow \infty$

Exercice 2: (1) Comme $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, et $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im}(f)$
on a $\mathbb{C}^* \subset \text{Im}(f)$.

Montrons que f ne s'annule pas. Supposons le contraire.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = 0$. Si $z_0 \neq 0$, alors $z_0 \in \text{Im}(f)$,
donc $z_0 = f(z_1)$ avec $z_1 \in \mathbb{C}$, et $f \circ f(z_1) = e^{z_1} = f(z_0) = 0$.
C'est absurde. Donc $z_0 = 0$. Mais alors $f \circ f(0) = f(0) = 0$
 $= e^0 = 1$.

Nouvelle contradiction.

(2) $f \in H(\mathbb{C})$, \mathbb{C} est étoilé par rapport à 0, et f ne s'annule pas. Le cours donne l'existence de g .

$$\begin{aligned} (3) \text{ On a } (g \circ f)' &= \\ &= g' \circ f \cdot f' \\ &= \frac{f'}{f \circ f} \cdot f' \quad (g' = f'/f) \\ &= \frac{(f \circ f)'}{f \circ f} \\ &= \frac{\exp}{\exp} = 1 \end{aligned}$$

Donc $g \circ f - \text{Id}$ est constante puisque \mathbb{C} est connexe.

(4) D'après (3) f est surjective, donc $f \circ f$ l'est aussi, ainsi que \exp , ce qui est contradictoire.

Exercice 3

(1) On vérifie que l'application $\theta_p: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow]-\pi, \pi[$ qui à z associe l'unique $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ tel que $z = |z| e^{i\theta(z)}$ est continue.

Alors il est immédiat que $g(z) = \log|z| + i\theta(z)$ est holomorphe, de dérivée $1/z$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$:

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{\exp(z) - \exp(z_0)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\exp(z_0)} = z_0^{-1}$$

On peut alors $z^\alpha = \exp(\alpha g(z))$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

(2) si $\varepsilon \in]0, \alpha - \varepsilon[$, on a, pour $z \in \Omega$

$$\begin{aligned} |f(z) \theta_\varepsilon(z)| &\leq A \exp(|z|^\alpha) \left| \exp(-\varepsilon e^{(l+\varepsilon)(\log|z| + i\theta(z))}) \right| \\ &= A \exp(|z|^\alpha) \exp(-\varepsilon |z|^{l+\varepsilon} \cos((l+\varepsilon)\theta(z))) \end{aligned}$$

Or $(l+\varepsilon)\theta(z) \in]-\frac{l+\varepsilon}{2}\pi, \frac{l+\varepsilon}{2}\pi[$, donc

$$\cos((l+\varepsilon)\theta(z)) \geq \cos\left(\frac{l+\varepsilon}{2}\pi\right) > 0 \quad \text{car } 0 < \frac{l+\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Il est alors clair que le terme qui majore $|f(z) \theta_\varepsilon(z)|$ dans (*) tend vers 0 quand $|z| \rightarrow +\infty$.

(3) Soit $R > 0$ tel $\left\{ \begin{array}{l} z \in \Omega \\ |z| \geq R \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z) \theta_\varepsilon(z)| \leq M$
Soit $\varepsilon \in]0, \alpha - \varepsilon[$.

CONCOURS OU EXAMEN

 (1)

 (1)

École normale supérieure - PARIS

le _____

Epreuve de _____

A remplir (en caractères d'imprimerie) et à cacheter par le candidat

NOM: _____

Prénom: _____

Date de naissance: _____

N° de table: _____

Signature: _____

Rabattre ici le coin gommé

Colonne réservée
à l'organisateur

car $\|f\|_{\partial\Omega} \leq M$ et $\forall z \in \bar{\Omega}$

sur $\overline{\Omega \cap D(0, R)}$

On a $|f \circ \theta_\varepsilon(z)| \leq M$ sur $\partial\Omega \cap \overline{D(0, R)}$
ainsi que sur $\Omega \cap \partial D(0, R)$, i.e. sur
 $\partial(\Omega \cap D(0, R))$. D'après le principe
du maximum, puisque $\overline{\Omega \cap D(0, R)}$ est compact, $f \circ \theta_\varepsilon \in C^0$

et $f \circ \theta_\varepsilon|_{\Omega \cap D(0, R)}$ est holomorphe, on a

donc $\|f \circ \theta_\varepsilon\|_{\infty, \overline{\Omega \cap D(0, R)}} \leq M$.

De plus, $|f \circ \theta_\varepsilon| \leq M$ sur $\partial\Omega \setminus D(0, R)$
et sur $\Omega \setminus D(0, R)$.

Par conséquent $\|f \circ \theta_\varepsilon\|_{\infty, \overline{\Omega}} \leq M$.

Maintenant $\forall z \in \bar{\Omega}$, $|f(z) \theta_\varepsilon(z)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |f(z)|$.

Donc $\|f\|_{\infty, \bar{\Omega}} \leq M$.

(4) Il suffit de prendre $f(z) = \exp(z^\alpha)$, dont
le module est majoré par 1 sur $\partial\Omega$, tend vers $+\infty$
sur l'axe réel positif, et vérifie $|f(z)| \leq \exp(|z|^\alpha)$ sur
 $\bar{\Omega}$.



Exercice 4 : (1). ξ_a est un pôle simple de f .

$$\text{On a } \text{Res}(f, \xi_a) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4 + a^4) \Big|_{\xi_a}} = \frac{1}{4(\xi_a)^3}.$$

ξ_a est un pôle double de g . On a

$$h(z) = (z - \xi_a)^2 g(z) = (z - \xi_a)^2 \cdot \frac{1}{(z^4 - (\xi_a)^4)^2}$$

$$= (z - \xi_a)^2 \cdot \frac{1}{(z^2 - (\xi_a)^2)^2 (z^2 + (\xi_a)^2)^2}$$

$$= (z - \xi_a)^2 \frac{1}{(z - \xi_a)^2 (z + \xi_a)^2} \times \frac{1}{(z^2 + (\xi_a)^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(z + \xi_a)^2} \cdot \frac{1}{(z^2 + (\xi_a)^2)^2}$$

$$\text{On sait que } \text{Res}(g, \xi_a) = h'(\xi_a)$$

$$\begin{aligned}
 h'(5a) &= \frac{-2}{(25a)^3} \cdot \frac{1}{(25a)^2} + \frac{1}{(25a)^2} \cdot \frac{-45a}{(25a)^3} \\
 &= \frac{-2}{2^5(5a)^7} - \frac{4}{2^5(5a)^7} = \frac{-3}{16(5a)^7}
 \end{aligned}$$

(2) On a vu ^{en cours} que si l'on pose $\xi_1 = e^{i\pi/4}$ et $\xi_2 = e^{2i\pi/4}$, alors $a\xi_1$ et $a\xi_2$ sont les pôles de f et g dans le $\frac{1}{2}$ plan supérieur et comme les dénominateurs de f et g ne s'annulent pas sur \mathbb{R} , on a

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2i\pi \left(\frac{1}{4(5a)^3} + \frac{1}{4(5a)^3} \right) \\
 &= 2i\pi \left(\frac{-\xi_1}{4a^3} - \frac{\xi_2}{4a^3} \right) \\
 &= -\frac{2i\pi}{4a^3} \left(2i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi \sqrt{2}}{a^3}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx &= 2i\pi \left(\frac{-3}{16} \right) \left(\frac{1}{(5a)^7} + \frac{1}{(5a)^7} \right) \\
 &= \frac{2i\pi}{a^7} \left(\frac{-3}{16} \right) (\xi_1 + \xi_2) \\
 &= \frac{2i\pi}{a^7} \left(\frac{-3}{16} \right) \left(2i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{3\pi \sqrt{2}}{8a^7}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

• Si $|z| > r$, $h(z) = \log \left| \frac{1}{z - re^{i\theta}} \right|$ est harmonique sur un voisinage de $\mathbb{D}(0, r)$, donc elle vérifie la propriété de la moyenne, et on a

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) d\theta$$

$$\log\left(\frac{1}{|z|}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{z - re^{i\theta}} \right| d\theta$$

• Si $|z| < r$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{z - re^{i\theta}} \right| d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{\frac{z}{r} - e^{i\theta}} \right| d\theta + \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1 - \frac{|z|}{r} e^{i(\theta - \arg(z))}} \right| d\theta + \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

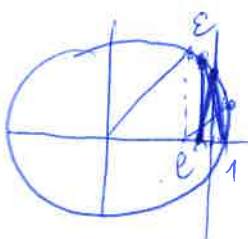
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1 - \frac{|z|}{r} e^{i\theta}} \right| d\theta + \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{1}\right) + \log\left(\frac{1}{r}\right) = \log\left(\frac{1}{r}\right) \text{ par}$$

le 1^{er} cas de figure.

Le cas $z = 0$ est évident.

• Si $|z| = r$, le problème revient à établir que $\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1 - e^{i\theta}} \right| d\theta = 0$



Pour $\theta \in]0, \pi[$ et $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ on a

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{e - z e^{i\theta}} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1 - e^{i\theta}} \right| d\theta = 2 \int_{\theta_0}^{\pi} \log \left| \frac{1}{e - z e^{i\theta}} \right| d\theta - \int_{\theta_0}^{\pi} \log \left| \frac{1}{1 - e^{i\theta}} \right| d\theta$$

$$+ \int_0^{\theta_0} \log \left| \frac{1 - z}{e - z e^{i\theta}} \right| d\theta$$

par CVD. De plus, $\left| \int_0^{\theta_0} \log \left| \frac{1 - z}{e - z e^{i\theta}} \right| d\theta \right| \leq \int_0^{\theta_0} \log \left| \frac{1 - z}{e - z e^{i\theta}} \right| d\theta \leq -u(\theta, \theta_0) \cdot \theta_0 + 2 \int_0^{\theta_0} \log(1 - e^{i\theta}) d\theta$

• Si $z = re$, le problème revient à montrer que $\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1-e^{i\theta}} \right| d\theta = 0$
 Il est clair que l'intégrale converge.
 On peut le montrer par continuité.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $e \in]0, 1[$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

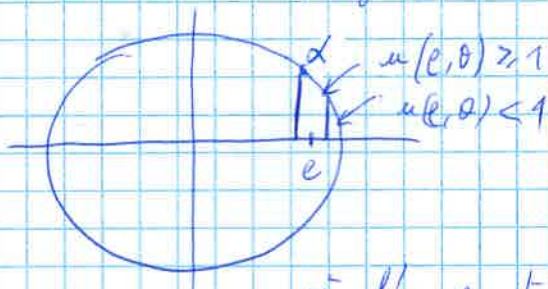
$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{e-e^{i\theta}} \right| d\theta - \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1-e^{i\theta}} \right| d\theta \\ &= 2 \int_{\alpha}^{\pi} \log \left| \frac{1-e^{i\theta}}{e-e^{i\theta}} \right| d\theta + \int_0^{\alpha} \underbrace{\log \left| \frac{1-e^{i\theta}}{e-e^{i\theta}} \right|}_{u(e, \theta)} d\theta \end{aligned}$$

On peut choisir $\alpha > \cos(\alpha)$ tel que $\alpha > e > \alpha \Rightarrow \left| 2 \int_{\alpha}^{\pi} \log \left| \frac{1-e^{i\theta}}{e-e^{i\theta}} \right| d\theta \right| < \varepsilon$

par continuité de l'intégrale / e.

Ensuite, $\alpha > e > \alpha$

$$\left| \int_0^{\alpha} u(e, \theta) d\theta \right| \leq \left| \int_0^{\alpha} \mathbb{1}_{\{u(e, \theta) < 1\}} \log(u(e, \theta)) d\theta \right| + \left| \int_0^{\alpha} \mathbb{1}_{\{u(e, \theta) \geq 1\}} \log(u(e, \theta)) d\theta \right|$$



$$\leq 2 \int_0^{\alpha} |\log |1-e^{i\theta}|| d\theta + \alpha u(e, \alpha)$$

où l'on a utilisé dans la 1^{ère} intégrale le fait que

$$\frac{1}{|1-e^{i\theta}|} \geq \frac{1}{|e-e^{i\theta}|} \geq 1 \quad \text{si } u(e, \theta) < 1$$

et le fait que $u(e, \theta) \leq u(e, \alpha)$ si $u(e, \theta) \geq 1$.

Alors, on peut choisir $\alpha > e > \alpha$ t.q. $\alpha > e > \alpha \Rightarrow u(e, \alpha) \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } e \in]e', 1[& \Rightarrow \left| \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{e-e^{i\theta}} \right| d\theta - \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1-e^{i\theta}} \right| d\theta \right| \\ & \leq \varepsilon + 2\alpha + 2 \int_0^{\alpha} |\log |1-e^{i\theta}|| d\theta \end{aligned}$$

On choisit maintenant $\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$ t.q. $2 \int_0^{\alpha} |\log |1-e^{i\theta}|| d\theta \leq \varepsilon$

$$\text{et } e \in]e', 1[\Rightarrow \left| \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{e-e^{i\theta}} \right| d\theta - \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{1-e^{i\theta}} \right| d\theta \right| \leq 3\varepsilon$$