Corrigé du TD10 : Homologie cellulaire

Notations : Pour $n \geq 0$ entier naturel, $\mathbb{D}^n$ (resp. $\overline{\mathbb{D}}^n$) désignera la boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. CW-complexes

1. On rappelle que la sphère est homéomorphe à l'espace obtenu en écrasant le bord de la boule unité fermée $\overline{\mathbb{D}}^n$. De plus, l'homéomorphisme obtenu se restreint en un homéomorphisme entre l'intérieur $\mathbb{D}^n$ et $\mathbb{S}^n$ privé d'un point e^0. Ainsi, $\mathbb{S}^n$ peut être munie de la décomposition cellulaire avec
— une cellule de dimension 0, qui est e^0
— une cellule $e^n = \mathbb{S}^n \setminus e^0$ de dimension n, avec pour application de rattachement de cellule :
$$\begin{tikzcd} \partial\overline{\mathbb{D}}^n \arrow[r] \arrow[d] & e_0 \arrow[d] \\ \overline{\mathbb{D}}^n \arrow[r] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$
La deuxième décomposition cellulaire vient du fait qu'on peut voir $\mathbb{S}^n$ comme union disjointe $\mathbb{S}^n = \overline{\mathbb{D}^n}_+ \cup \overline{\mathbb{D}}^n_-$, où $\overline{\mathbb{D}}^n_+ = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n,\ x_n \geq 0\}$ et $\overline{\mathbb{D}^n}_- = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n,\ x_n \leq 0\}$,. Les ensembles $\partial\overline{\mathbb{D}}^n_+ = \partial\overline{\mathbb{D}}^n_- = \{x_n = 0\} \cap \mathbb{S}^n$ s'identifient avec $\mathbb{S}^{n-1}$.
Ainsi, nous pouvons définir une décomposition cellulaire sur $\mathbb{S}^n$ par récurrence sur n de la manière suivante : la décomposition cellulaire de $\mathbb{S}^0$, qui est l'union de deux points, est constituée de deux 0-cellules. Supposons la décomposition cellulaire construite au rang $n-1$. La décomposition cellulaire de $\mathbb{S}^n$ est obtenue par le diagramme :
$$\begin{tikzcd} \partial\overline{\mathbb{D}}^n \sqcup \partial\overline{\mathbb{D}}^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[d] \\ \overline{\mathbb{D}}^n \sqcup \overline{\mathbb{D}}^n \arrow[r] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$
Cela donne une décomposition cellulaire avec deux k-cellules pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, et de k-squelette $\mathbb{S}^k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

2. — **L'espace projectif réel.** L'espace $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ est un point, donc un CW-complexe constitué d'une unique 0-cellule. Par récurrence, on suppose qu'on a muni $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ d'une structure de CW-complexe avec une i-cellule pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, et telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, le i-squelette soit $\mathbb{P}^i(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$, mais aussi à l'espace obtenu à partir de $\overline{\mathbb{D}}^n$ en identifiant les points diamétralement opposés de la frontière $\partial\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{D}^n$. On peut donc écrire $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ comme une union disjointe $\mathbb{D}^n \cup (\mathbb{S}^{n-1}/\{\pm 1\}) = \mathbb{D}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. On prend pour décomposition cellulaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ celle de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, à laquelle on ajoute une n-cellule via le quotient quotient $\mathbb{D}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
— **L'espace projectif complexe** On procède de manière analogue aux espaces projectifs réels. $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ est un point. On rappelle que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est obtenu comme quotient de la sphère $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par l'action naturelle de $\mathbb{S}^1$, où l'on voit la sphère comme l'espace
$$\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, |z_1|^2 + \ldots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$
Le sous-ensemble de $\mathbb{S}^{2n+1}$ consistant des points dont la dernière coordonnée z_{n+1} est un réel positif ou nul est de la forme
$$\{(z, \sqrt{1 - |z|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^+,\ |z| \leq 1.\}$$
C'est le graphe de la fonction $z \mapsto \sqrt{1-|z|^2}$, et par projection sur $\mathbb{C}^n$ il est homéomorphe à la boule $\overline{\mathbb{D}}^{2n}$, de frontière $\mathbb{S}^{2n-1}$ correspondant à l'ensemble des points de $\mathbb{S}^{2n+1}$ de dernière coordonnée z_{n+1} nulle. Tout point de $\mathbb{S}^{2n+1}$ de dernière coordonnée non-nulle est équivalent sous l'action de $\mathbb{S}^1$ à un unique point de dernière coordonnée réelle et strictement positive. Ainsi, on voit que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

peut être vu comme la boule $\mathbb{D}^{2n}$ dont on a identifié les points de la frontière $\partial\mathbb{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1}$ sous l'action de $\mathbb{S}^1$. On écrit donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{D}^{2n} \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ (union disjointe), avec une $2n$-cellule rattachée via l'application quotient $\overline{\mathbb{D}}^{2n} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Par récurrence, on voit que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a une structure de CW-complexe avec une unique cellule en chaque dimension paire, et aucune cellule de dimension impaire.

— **La droite réelle** Comme ensemble de 0-cellules on prend $\mathbb{Z}$, et comme ensemble de 1-cellules on prend les segments $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

— **Le tore** On utilise la représentation du tore $\mathbb{T}$ comme quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$. Comme 0-cellule, on prend le point $(0,0)$. Comme 1-cellules, on prend l'application projection des deux segments $[0,1] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [0,1]$ vers $\mathbb{T}$, dont les extrémités sont toutes recollées sur l'unique 0-cellule. Enfin, on aura une 2-cellule, donnée par la projection canonique $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{T}$. (noter que le carré $[0,1]^2$ est homéomorphe au disque $\overline{\mathbb{D}}^2$).

3. On prend $X_n^{(k)} = X_n$ si $n \leq k$ et X_k sinon. Cela fournit une structure cellulaire sur X_k

4. On suppose que $X_{n-1} \neq X_n$, de sorte qu'on a au moins une n-cellule. On note $e_1^n, \ldots, e_k^n$ les n-cellules. Par définition du CW-complexe, en écrasant le sous-espace X_{n-1} de X_n on identifie les points de toutes les frontières des e_i^n (sans toucher à leurs intérieurs, qui sont inclus dans $X_n \backslash X_{n-1}$). Chaque e_i^n est homéomorphe à D^n, donc si on identifie tous les points de la frontière de e_i^n, on obtient un espace homéomorphe à $\mathbb{S}^n$. Puisque dans X_n/X_{n-1} tous les points provenant des frontières des e_i^n sont identifiés, X_n/X_{n-1} est un bouquet de k sphères $\mathbb{S}^n$.

5. Si X est fini, alors comme X est séparé et est une union finie de compacts, il est par conséquent compact.

   Réciproquement, supposons X compact. Tout d'abord, il est nécessairement de dimension finie. En effet, dans le cas contraire, soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout n, le complexe X ait une u_n-cellule. Pour tout $n \geq 0$, on choisit un point x_n dans une u_n-cellule et on note S l'ensemble de tous les x_n. Notons que pour toute k-cellule C, l'ensemble $\bar{C} \cap S$ est fini (contenu dans $\{x_0, \ldots, x_k\}$), donc fermé. Cela montre que l'ensemble S est fermé, et donc compact. D'autre part, chaque sous-ensemble de S, par le même argument, est fermé dans X, donc aussi dans S. Par conséquent, S a la topologie discrète, ce qui est impossible puisqu'il est compact et infini.

   On montre maintenant par récurrence sur n que pour tout n, le n-squelette de X ne contient qu'un nombre fini de cellules. Pour cela on utilisera le fait que pour tout n, X_n est fermé dans X, donc compact. On utilisera également le petit résultat suivant, bien utile :

   Lemme Soit X un CW-complexe de dimension n. Alors toute n-cellule de X est ouverte dans X.
   Preuve : Soit C une n-cellule de X, et soit C' une autre cellule. Comme C' est nécessairement de dimension $\leq n$, son adhérence n'intersecte pas C, de sorte que $(X \setminus C) \cap \bar{C}' = \bar{C}'$ est fermé, d'où $X \setminus C$ fermé, d'où le résultat.

   Reprenons notre récurrence. Pour $n = 0$, X_0 est discret, et compact, donc fini. Supposons le résultat vrai pour n. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des $n+1$-cellules de X, avec $f_i : \mathbb{D}^{n+1} \to X_{n+1}$ l'application caractéristique.

$$V_i = f_i\left(\left\{x \in D^{n+1}, |x| < \frac{3}{4}\right\}\right)$$

   et

$$W_i = f_i\left(\left\{x \in D^{n+1}, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}\right).$$

   La réunion des W_i est fermée dans X_{n+1}. En effet, on sait que X_{n+1} s'identifie au quotient de l'union disjointe de X_n et $\sqcup_i \overline{\mathbb{D}}_{n+1}$ par $\sqcup_i \partial\mathbb{D}_{n+1}$. Or l'image réciproque de $\cup_i W_i$ est $\sqcup_i \mathbb{D}_{n+1}(\frac{1}{2}$ qui est fermé. D'autre part, V_i est ouvert dans e_i car $(f_i)_{|D^{n+1}} : D^{n+1} \to e_i$ est un homéomorphisme. Par le lemme, V_i est ouvert dans X_{n+1}. On pose alors $U = X_{n+1} \setminus \cup_{i \in I} W_i$, qui est un ouvert de X_{n+1}, de sorte que $\{U\} \cup \{V_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert du compact X_{n+1}, ce qui implique que I est fini.

Remarque : la même méthode se généralise pour montrer qu'un compact d'un CW-complexe X est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cellules de X.

6. On sait que $H_0(X,\mathbb{Z}) = H_0(X_1,\mathbb{Z})$ où X_1 est le 1-squelette. Donc X est connexe par arcs si et seulement si $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ donc si et seulement si X_1 est connexe par arcs.

Exercice 2. Espaces projectifs

Remarque : Étant donné un CW complexe X, la différentielle du complexe cellulaire en degré n se calcule comme suit : on sait que $H_n(X_n, X_{n-1},\mathbb{Z})$ est isomorphe à la somme directe $\oplus_i e_n^i$ sur les n-cellules et similairement pour $H_{n-1}(X_{n-1},, X_{n-2},\mathbb{Z}) \simeq \oplus_j e_{n-1}^j$. Alors $\partial e_n^i = \sum_j n_{i,j} e_{n-1}^j$ où l'entier n est déterminé par le degré en homologie de l'application suivante :

$$\mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1} \to X_{n-1}/X_{n-2} \simeq \vee_j \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1},$$

où la première application est celle du rattachement de la n-cellule i et la dernière application est l'écrasement de toutes les sphères sauf celle d'indice j. Voir proposition 7.24 du cours.

1. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admet une décomposition cellulaire avec une cellule en degré $2k$ pour $0 \leq k \leq n$. Le complexe cellulaire est donc donné par :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \cdots 0 \to \mathbb{Z}$$

Ainsi $H_{2k}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et zéro sinon.

2. Même groupes d'homologie qu'en haut avec $k \in \mathbb{N}$.
3. Le complexe cellulaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est donné par $C_k^{cell}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq n$. Pour calculer la différentielle en degré n, on utilise la remarque en haut et la description de la structure de CW complexe sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: c'est le degré en homologie de l'application $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})/\mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{n-1}$ et qui vaut $1 + (-1)^n$. Ainsi, $H_n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si $p = 0$ ou $p = n$ impair, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si p impair entre 1 et $n-1$, et 0 sinon.

Exercice 3. Surfaces classiques

1. On utilise de la description de la surface de genre g comme un polygone à $4g$ côtés avec les identifications $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots$. On trouve alors $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$, $H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ et $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$
2. La surface (compacte connexe) non-orientable de genre g peut être décrite comme un polygone à $2g$ cotés $a_1, b_1, a_2, b_2 \cdots$ avec les identifications $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \cdots$. Le complexe cellulaire est donc

$$\begin{gathered} \mathbb{Z} \to \oplus \mathbb{Z} a_i \oplus \mathbb{Z} \\ 1 \mapsto \sum_i 2a_i \mapsto 0 \end{gathered}$$

Ainsi $H_0(S'_g) = \mathbb{Z}$, $H_1(S'_g) = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_2(S'_g) = 0$.

Remarque : Le fait que les deux descriptions utilisées les mêmes surfaces reposent sur le théorème de classification des surfaces topologiques, voir ce lien `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Huang.pdf`

Exercice 4. Points antipodaux

1. Une décomposition cellulaire est donnée en prenant une 0-cellule e^0, une 1-cellule e^1, puis deux 2-cellules D_+ et D_- dont le bord est recollé sur la 1-squelette $\mathbb{S}^1$ suivant l'application $z \mapsto z^2$, dont le degré est 2 (autrement dit, cet espace est $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur lequel on a recollé deux 2-cellules suivant $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$, c'est-à-dire c'est $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ avec une 2-cellule supplémentaire). Ainsi, le complexe cellulaire s'écrit

$$0 \to \mathbb{Z}[D_+] \oplus \mathbb{Z}[D_-] \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

l'application f étant donnée par $[D_+] \mapsto 2$ et $[D_-] \mapsto 2$. Ainsi, les groupes d'homologie sont

$$H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

et $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ pour $k \geq 3$.

2. Cet espace est $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sur lequel on a recollé deux 3-cellules D_+ et D_- suivant l'application quotient $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\{\pm 1\}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ avec une 3-cellule supplémentaire. On en déduit le complexe cellulaire

$$0 \to \mathbb{Z}[D_+] \oplus \mathbb{Z}[D_-] \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

D'où les groupes d'homologie

$$H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_2(X;\mathbb{Z}) = 0, \quad H_3(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$$

et $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ pour $k \geq 4$.

Exercice 5. Espaces de Moore

1. On commence par prendre une 0 cellule et on lui rattache une sphère $\mathbb{S}^n$. On prend une application $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de degré m et on fait un rattachement d'une $n+1$-cellule selon g. Le complexe cellulaire obtenu en degré $n+1, n, n-1$ est le suivant

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} .$$

En calculant l'homologie de ce complexe, on voit bien que l'espace obtenu est un espace de Moore pour $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n)$.

2. Si X est un espace de Moore de (G, n) et Y un espace de Moore de (G', n), alors le bouquet $X \vee Y$ (selon un sommet pour les structures de CW complexes) est un espace de Moore de $(G \oplus G', n)$. Le résultat découle alors du 1 et du fait que la sphère en dimension n est un espace de Moore de $(\mathbb{Z}, n)$.

3. Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille de générateurs de G. On a une suite exacte courte

$$0 \to K \to \mathbb{Z}^{(I)} \to G \to 0$$

où K est le noyau de l'application canonique $\mathbb{Z}^{(I)} \to G$. En tant que sous-groupe d'un groupe abélien libre, K est abélien libre également, de la forme $\mathbb{Z}^{(J)}$, avec des générateurs $(h_j)_{j\in J}$. On écrit $h_j = \sum_{i\in I} d_{j,i}\widetilde{g}_i$ où $(\widetilde{g}_i)_i$ est une base de $\mathbb{Z}^{(I)}$ qui s'envoie sur $(g_i)_i$.
Notre espace est construit comme suit : On prend une 0-cellule, et on y recolle une n-cellule pour chaque $i \in I$: on obtient un bouquet $\bigvee_{i\in I} S_i^n$. Ensuite, pour tout $j \in J$, on va attacher une $(n+1)$ -cellule e_j^{n+1} par l'application $\mathbb{S}^n \to \bigvee_i \mathbb{S}_i^n$ suivante : le complémentaire de $\sum_i |d_{j,i}|$ disques $\mathbb{D}^n$ est envoyé sur la 0-cellule, de sorte que l'application à définir devient une application du bouquet de $\sum_i |d_{j,i}|$ sphères $\mathbb{S}^n$ vers le bouquet $\bigvee_{i\in I} \mathbb{S}_i^n$. Puis, pour tout $i \in I$, on envoie $|d_{j,i}|$ de ces sphères sur $\mathbb{S}_i^n$, avec l'identité si $d_{j,i} > 0$, et avec une application de degré -1 sinon. On vérifie que cela donne bien un complexe cellulaire dont toutes les applications sont nulles, sauf d_{n+1} qui est exactement l'inclusion $K \to \mathbb{Z}^I$ ci-dessus, d'où le résultat.

4. Le bouquet $\bigvee_{i\geq 1} M(G_i, i)$ convient.

Exercice 6. Homologie avec coefficients

1. Le complexe cellulaire à coefficients dans G de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est nul en degré impair et vaut G en degré pair. Donc $H_n(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), G) = 0$ en degré impair et G sinon.

2. Le complexe cellulaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ à coefficients dans G est le suivant

$$\cdots \xrightarrow{\times 0} G \xrightarrow{\times 2} G \xrightarrow{0} G.$$

Donc $H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), G) = G$ si $k = 0$ ou $k = n$ impair, $H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), G) = G/2G$ pour k impair entre 0 et $n-1$,et 0 sinon.

3. Le plan projectif et le point.

4. Le plan projectif et $\mathbb{S}^1$

Exercice 7. Caractéristique d'Euler

1. Cela vient de l'exercice 5 de la feuille 6 appliqué au complexe de chaînes cellulaires de X à coefficients dans F. Notons qu'en particulier cela implique que χ ne dépend pas de la décomposition cellulaire choisie.
2. On a $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ et $\chi(S'_g) = 1 - g + 1 = 2 - g$.
3. Soit $f : S_h \to S_g$ un revêtement à d feuillets (le nombre de feuillets doit être fini par compacité des surfaces considérées). L'intérieur de la 2-cellule de S_g est simplement connexe, donc c'est un ouvert trivialisant : son image réciproque par f est une réunion disjointe de d disques ouverts. Reste à comprendre f sur le 1-squelette, qui est un graphe : par le même raisonnement, l'image réciproque des intérieurs des 1-cellules est une union d'arêtes ouvertes. Finalement, l'image réciproque de chaque 0-cellule est constituée de d points. Ainsi, f détermine une décomposition cellulaire sur S_h, telle que $\chi(S_h) = d\chi(S_g)$.
   Ainsi, nous devons avoir la relation $1-h = d(1-g)$, donc h doit être de la forme $h = 1+d(g-1)$. (En particulier, on retrouve le fait que la seule surface compacte qui revêt le tore est le tore lui-même).
   Réciproquement, si $h = 1+d(g-1)$, construisons un revêtement à d feuillets de S_g par S_h. On démarre avec un revêtement à d feuillets du tore S_1 par lui-même. L'image réciproque d'un petit disque du tore sera l'union disjointe de d petits disques, si bien que nous avons un revêtement à d feuillets du tore privé d'un disque par le tore privé de d disques.
   La surface S_g est obtenue à partir du tore en enlevant un petit disque à S_1 et à S_{g-1} et en recollant les deux surfaces trouées suivant le bord de leur trou. On recolle de même une copie de S_{g-1} privée d'un disque sur le bord de chaque trou du tore privé de d disques, de sorte à obtenir S_h. Notre revêtement ci-dessus se prolonge alors de manière naturelle en un revêtement de S_g par S_h, en envoyant chaque copie de S_{g-1} privée d'un disque dans S_h identiquement sur la copie de S_{g-1} privée d'un disque dans S_g.
4. Pour chaque entier n, si A est un sous-CW complexe de X, alors si l'intérieur d'une cellule intersecte non-trivialement A, la cellule en entier est contenue dans A. Ainsi les n-cellules de X est la réunion des n-cellules de A et de B. Ainsi, on a $c_n(X) = c_n(A) + c_n(B) - c_n(A \cap B)$.
5. La formule portant sur les caractéristiques d'Euler résulte simplement de la formule Künneth. On va donner ici une autre démonstration qui repose sur une décomposition cellulaire de $X \times Y$. Soient $X = \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_i e_i^n$ et $Y = \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_j f_j^n$ des décompositions cellulaires de X et Y, avec $(\phi_i^n)_{i,n}$ et $(\psi_{i,j})_{i,n}$ les applications caractéristiques correspondantes. Montrons alors qu'en définissant les n-cellules de $X \times Y$ comme étant les produits $e_i^k \times f_j^{n-k}$ pour tous i, j et pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit bien une structure de complexe cellulaire. Pour une telle cellule, on a une application
$$\phi_i^k \times \psi_j^{n-k} : \bar{\mathbb{D}}^k \times \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \to X \times Y.$$
   On peut trouver un homéomorphisme $\bar{\mathbb{D}}^k \times \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \simeq \bar{\mathbb{D}}^n$ qui induit des homéomorphismes
$$\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \simeq \mathbb{D}^n,$$
   et
$$(\partial\bar{\mathbb{D}}^k) \times \bar{\mathbb{D}}^{n-k} \cup \bar{\mathbb{D}}^k \times \partial\bar{\mathbb{D}}^{n-k} \to \partial\bar{\mathbb{D}}^n.$$
   (Pour s'en convaincre, remplacer toutes les boules par des cubes : on a un homéomorphisme canonique $I^k \times I^{n-k} \to I^n$, et un point appartient à la frontière de I^n si et seulement si au moins une de ses coordonnées vaut 0 ou 1. Si cette coordonnée est parmi les k premières, alors il appartient à $(\partial I^k)\times I^{n-k}$, sinon il appartient à $I^k \times (\partial I^{n-k})$.)
   Ainsi, $\phi_i^k \times \psi_j^{n-k}$ fournit bien une application caractéristique $\bar{\mathbb{D}}^n \to X$ dont la restriction à $\mathbb{D}^n$ induit un homéomorphisme avec $e_i^k \times f_j^{n-k}$. De plus, l'image de $\partial\bar{\mathbb{D}}^n$ est
$$\phi_i^k(\partial\bar{\mathbb{D}}^k) \times \psi_j^{n-k}(\bar{\mathbb{D}}^{n-k}) \cup \phi_i^k(\bar{\mathbb{D}}^k) \times \psi_j^{n-k}(\partial\bar{\mathbb{D}}^{n-k}),$$
   qui est bien contenue dans une union finie de cellules de dimension au plus $n-1$. On vérifie également que la topologie est la bonne. La vérification de l'identité $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ est alors immédiate.

Exercice 8. Homologie cellulaire d'un produit

D'après la dernière question de l'exercice précédent, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ peut se munir, si $n > m$, d'une structure de complexe cellulaire avec une 0-cellule, une m-cellule, une n-cellule et une $n+m$-cellule. Si $n = m$, on aura une 0-cellule, deux n-cellules et une $2n$-cellule. On obtient donc un complexe cellulaire d'homologie $\mathbb{Z}$ en degré $0, n, m, n+m$ et 0 sinon dans le premier cas et dans le second cas, l'homologie vaut $\mathbb{Z}^2$ en degré n, $\mathbb{Z}$ en degré 0 et $2n$ et 0 sinon. Les résultats sont bien conformes à ceux trouvés dans l'exercice 9 de la feuille 7.

Exercice 9. Complexes simpliciaux

Note : l'hypothèse de la *locale finitude* garantit par exemple que le segment $[0,1]$ vu comme réunion de points, n'est pas un complexe simplicial.

1. Un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe est un segment, un 2-simplexe est un triangle, un3-simplexe est un tétraèdre.
2. Soit S un p-simplexe. Pour tout sous-ensemble I de $[p] := \{0, \cdots, p\}$, notons S_I la face correspondante à I, c'est-à-dire :
$$S_I = \{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1]\}.$$
La première et dernière condition sont clairement vérifiées, il reste à vérifier que l'intersection de deux simplexes est encore un simplexe, mais cela résulte du fait que $S_I \cap S_J = S_{I \cap J}$.
3. On rappelle que l'intérieur relatif d'un p-simplexe σ de sommets $x_0, \ldots, x_p$ est l'ensemble
$$\mathrm{Intrel}(\sigma) = \left\{ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_p > 0, \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$
Ainsi, un simplexe est la réunion de son intérieur relatif et de ses faces. L'intersection de deux simplexes de K est ou bien vide, ou bien une face de chacun des deux, donc l'intersection des intérieurs relatifs de deux simplexes quelconques est nécessairement vide. Puisque chaque face d'un élément de K est encore dans K, nous avons que $|K|$ est la réunion disjointe des intérieurs relatifs des simplexes de K. Un p-simplexe étant homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}^p$, fixons, pour tout p et pour chaque p-simplexe σ de K, un homéomorphisme $f_\sigma : \overline{\mathbb{D}}^p \to \sigma$ (induisant un homéomorphisme $\mathbb{D}^p \to \mathrm{Intrel}(\sigma)$). Cela fournit une décomposition cellulaire de $|K|$ telle que la cellule de dimension k est la réunion des k-simplexes de K et en tenant compte du fait que $f_\sigma(\partial \mathbb{D}^k)$ est la réunion des faces de σ, qui sont des cellules de dimension inférieure.