Corrigé du TD11 : Cohomologie

Exercice 1. Vers le théorème des coefficients universels

1. On note $C_n(X;\mathbb{Z})$ le groupe des chaînes cellulaires de X, Z_n, B_n respectivement les groupes des cycles et des bords dans $C_n(X;\mathbb{Z})$, ainsi que $Z^n(X;G), B^n(X;G)$ respectivement les groupes des cocycles et cobords dans le groupe des cochaînes cellulaires $C^n(X;G) = \mathrm{Hom}(C_n(X;\mathbb{Z});G)$. Par définition du cobord, pour $f \in C^n(X;G)$, nous avons

$$\begin{aligned}\delta(f) = 0 &\iff \forall \sigma \in C_{n+1}(X;\mathbb{Z}),\ \delta f(\sigma) = 0\\ &\iff \forall \sigma \in C_{n+1}(X;\mathbb{Z}), f(\partial\sigma) = 0\\ &\iff f(B_n) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}Z^n(X;G) &= \{f \in C^n(X;G),\ \delta f = 0\}\\ &= \{f \in \mathrm{Hom}(C_n(X;\mathbb{Z});G), f_{|B_n} = 0\}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbb{Z});G) = \mathrm{Hom}(Z_n/B_n;G) = \{f \in \mathrm{Hom}(Z_n;G), f_{|B_n} = 0\}.$$

Ainsi, la restriction à Z_n induit un morphisme $Z^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbb{Z});G)$. D'autre part, si $f = \delta g \in B^n(X;G)$, alors pour tout $\sigma \in Z_n$, on a $f(\sigma) = \delta g(\sigma) = g(\partial\sigma) = 0$, donc f s'annule sur Z_n. Ainsi, le morphisme ci-dessus passe au quotient pour donner un morphisme

$$H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbb{Z});G).$$

Puisque celui-ci a été défini par restriction de C_n à Z_n, pour montrer qu'il est surjectif il suffit de montrer que tout $f \in \mathrm{Hom}(Z_n;G)$ vérifiant $f_{|B_n} = 0$ se prolonge en un morphisme de groupes défini sur C_n tout entier, à valeurs dans G. Pour cela, observons que le morphisme de bord induit une suite exacte courte

$$0 \to Z_n(X;\mathbb{Z}) \to C_n(X;\mathbb{Z}) \to B_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \to 0$$

Le groupe $B_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ est abélien libre, comme sous-groupe du groupe abélien libre $C_{n-1}(X;\mathbb{Z})$. Ainsi, cette suite exacte est scindée, et $C_n(X;Z)$ est isomorphe à la somme directe $Z_n \oplus B_{n-1}$. Il en résulte que le prolongement peut être fait dans tous les cas, en choisissant les images dans G d'un ensemble de générateurs de B_{n-1}.

2. Pour $n = 0$, nous avons $C_0(X;\mathbb{Z}) = Z_0(X;\mathbb{Z})$, donc si $f \in Z^0(X;G)$ a sa restriction à $Z_0(X;\mathbb{Z})$ nulle, elle est elle-même nulle, d'où l'injectivité du morphisme.

En général, pour montrer l'injectivité du morphisme en question pour un certain n, il s'agit de montrer que si la restriction d'un morphisme de groupes $f : C_n \to G$ à Z_n est nulle, alors f est un cobord. Supposons donc donné un tel f. Si on avait $f = \delta g$ avec $g \in C^{n-1}(X;G)$, la seule contrainte que cela impose sur g, c'est que pour tout $\sigma \in C_n(X;\mathbb{Z})$, $f(\sigma) = \delta g(\sigma) = g(\partial\sigma)$ Ainsi, les valeurs de g sur B_{n-1} sont imposées. Il reste à voir si on peut la prolonger à C_{n-1} tout entier (et d'après l'argument ci-dessus, cela équivaut à savoir prolonger à Z_{n-1}). En général, cela n'est pas toujours possible : par exemple, pour $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on a vu que le complexe cellulaire était donné par

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

si bien que $B_1 = 2\mathbb{Z} \subset Z_1 = \mathbb{Z}$, et par exemple le morphisme $B_1 \to \mathbb{Z}$ envoyant 2 sur 1 ne peut être prolongé à Z_1 (sans que son image ne sorte de $\mathbb{Z}$). Plus généralement, nous avons la suite exacte courte

$$0 \to B_{n-1} \to Z_{n-1} \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \to 0$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, $H_0(X;\mathbb{Z})$ est abélien libre, et donc cette suite exacte est scindée et on peut prolonger, ce qui conclut la preuve du point 2.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

En général, un élément de torsion dans $H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ se relève en un élément $a \in Z_{n-1}$ dont un certain multiple est dans B_{n-1} : il n'est donc pas garanti en général de pouvoir lui assigner une valeur dans G. Ainsi, les éléments de torsion dans $H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ fournissent des obstructions à l'existence de notre morphisme g.

3. Cette obstruction n'en est pas une dans le cas où le groupe G est divisible, c'est-à-dire si pour tout $x \in G$ et pour tout entier $k \geq 2$, il existe $y \in G$ tel que $ky = x$. C'est en particulier le cas lorsque G est un corps de caractéristique nulle : on peut alors prolonger g à Z_{n-1} de la manière suivante : on choisit un système de générateurs du groupe abélien libre Z_{n-1}. Pour un générateur $a \in Z_{n-1}$, s'il existe k tel que $ka \in B_{n-1}$, on prend le k minimal vérifiant cela, et on pose $g(a) = \frac{1}{k}g(ka)$. Sinon, on choisit une valeur arbitraire pour $g(a)$.

Exercice 2. Cup-produit

1. L'opération est clairement bilinéaire et pour tout σ $(p+q+1)$-simplexe, on a :

$$\begin{aligned}\delta(a \smile b)(\sigma) = (a \smile b)(\delta\sigma) &= \sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i(a \smile b)(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+q+1}})\\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i a(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+1}})b(\sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,e_{p+q+1}})\\ &+ \sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i a(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,e_i,\cdots,e_p})b(\sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+q+1}})\\ &= (\delta a \smile b)(\sigma) + (-1)^p(a \smile \delta b)(\sigma)\end{aligned}$$

2. Soit σ un $(p+q+r)$-simplexe et calculons :

$$\begin{aligned}a \smile (b \smile c)(\sigma) &= a(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,e_i,\cdots,e_p})(b \smile c)(\sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,e_{p+q+r}})\\ &= a(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,e_i,\cdots,e_p})b(\sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,e_{p+q}})c(\sigma \circ \Delta_{e_{p+q+1},\cdots,e_{p+q+r}}).\end{aligned}$$

   On calcule de manière similaire $(a \smile b) \smile c)(\sigma)$ et le résultat s'ensuit.

3. (a) Soit σ un $(p+q)$-simplexe de X et calculons :

$$\begin{aligned}g^\sharp(a \smile)b(\sigma) &= (a \smile b)(g \circ \sigma)\\ &= a(g \circ \sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,e_i,\cdots,e_p})b(g \circ \sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,e_{p+q}})\\ &= (g^\sharp(a) \smile g^\sharp(b))(\sigma).\end{aligned}$$

   (b) Si σ est un $(p+q)$-simplexe, on a :

$$\begin{aligned}h \circ (a \smile b)(\sigma) &= h\left(a(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,e_i,\cdots,e_p})b(\sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,e_{p+q}})\right)\\ &= h\left(a(\sigma \circ \Delta_{e_0,\cdots,e_i,\cdots,e_p})\right) h\left(b(\sigma \circ \Delta_{e_{p+1},\cdots,e_{p+q}})\right)\\ &= ((h \circ a) \smile (h \circ b))(\sigma)\end{aligned}$$

4. Par 1), si a et b sont des cocycles, alors $a \smile b$ aussi. Si a ou b est un cobord, alors on voit aussi par 1) que $a \smile b$ l'est aussi. Ainsi on récupère une application bilinéaire. Pour montrer qu'elle coïncide avec celle construite dans le cours quand R est un corps, nous aurons besoin d'introduire l'application d'Alexander-Whitney

$$\begin{gathered}AW_X : C_*(X \times X) \to C_*(X) \otimes C_*(X)\\ \sigma \otimes \tau \mapsto \sum_{p+q=n} \sigma \circ \Delta_{0,\cdots,p} \otimes \tau \circ \Delta_{p,\cdots,n}\end{gathered}$$

et notons

$$EZ_X : C_*(X) \otimes C_*(X) \to C_*(X \times X)$$

l'application d'Eilenberg-Zilber construite dans le cours. Alors on peut prouver par un calcul direct que $AW_X \circ EZ_X = Id_{C_*(X) \otimes C_*(X)}$. Puis, $EZ_X \circ AW_X$ est homotope à l'identité de $C_*(X \times X)$ via une homotopie dont on peut trouver une expression dans la page 7 de `https://arxiv.org/pdf/math/0110308.pdf`. [1]

En admettant ce résultat, montrons que les deux produits sont les mêmes : soit $a : H_p(X, K) \to K$ et $b : H_q(X, K) \to K$ des classes de cohomologies et soit $\sigma \in H_{p+q}$ une $(p+q)$ classe d'homologie. Alors rappelons est défini par la composition :

$$H_{p+q}(X, K) \to H_{p+q}(X \times X, K) \xrightarrow{EZ_X^{-1}} \bigoplus_{i+j=p+q} H_i(X, K) \otimes H_j(X, K) \to H_p(X, K) \otimes H_q(X, K) \xrightarrow{a \otimes b} K$$

Or la remarque d'en haut montre que $EZ_X^{-1} = AW_X$ et

$$AW_X(\sigma) = \sum_{i,j} \sigma \circ \Delta_{e_0, \cdots, e_i} \otimes \sigma \circ \Delta_{e_{i+1}, \cdots, e_{p+q}},$$

dont la projection sur $H_p(X, K) \otimes H_q(X, K)$ est tout simplement $\sigma \circ \Delta_{e_0, \cdots, e_p} \otimes \sigma \circ \Delta_{e_{p+1}, \cdots, e_{p+q}}$ et donnant bien la même relation de produit.

Exercice 3. Anti-commutativité du cup-produit

On pose $\epsilon_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

1. Soit σ un n-simplexe : on

$$\begin{aligned}
\partial\rho(\sigma) &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ w \circ \Delta_{e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n} \\
&= \sum_{i=0} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \Delta_{e_0, \cdots, \widehat{e}_{n-i}, \cdots, e_n} \circ w \\
&= \sum_{i=0} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \Delta_{e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n} \circ w \\
&= \rho(\partial\sigma)
\end{aligned}$$

2. La construction d'une homotopie entre ρ_* et Id_* est délicate et repose sur une subdivision de $\Delta_n \times I$ en $(n+1)$-simplexes avec des sommets $\{v_0, \cdots, v_n\}$ de $\{0\} \times \Delta_n$ et $\{w_0, \cdots, w_n\}$ de $\{1\} \times \Delta_n$ avec v_i et w_i ayant la même image sous la projection $\Delta_n \times I \xrightarrow{\pi} \Delta_n$. Notons $[v_0, \cdots, v_i, w_n, \cdots, w_i]$ le $(n+1)$-simplexe de sommets $v_0, \cdots, v_n, w_n, \cdots, w_i$ et définissons $P : C_n(X, R) \to C_{n+1}(X, R)$

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)([v_0, \cdots, v_i, w_n, \cdots, w_i])$$

On vérifie alors par un calcul direct que $\partial \circ P + P \circ \partial = \rho - Id$.

Un calcul détaillé est fait dans le livre d'Allen Hatcher, Algebraic Topology, Theorem 3.14. `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

3. La question précédente montre que $\rho(\sigma) = \sigma$ en homologie. Donc si a et b sont deux classes de cohomologies, σ une $(p+q)$-classe d'homologie, on a

$$\begin{aligned}
(a \smile b)(\sigma) &= (a \smile b)(\rho(\sigma)) \\
&= \epsilon_{p+q} a(\sigma \circ w \circ \Delta_{e_0, \cdots, e_p}) b(\sigma \circ w \circ \Delta_{e_{p+1}, \cdots, e_{p+q}}) \\
&= \epsilon_{p+q} \epsilon_p \epsilon_q (b \smile a)(\rho(\sigma))
\end{aligned}$$

et on vérifie par un calcul immédiat que $\epsilon_{p+q} \epsilon_p \epsilon_q = (-1)^{pq}$.

1. On peut également consulter "Lectures on Algebraic Topology", d'Albrecht Dold pp 178.

Exercice 4. Cap-produit

Voir le corrigé détaillé dans Algebraic topology d'Allen Hatcher, page 239.