

Corrigé du TD2 : Homotopie

Exercice 1.

1. Soit $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie entre f et g . Comme X est connexe par arcs et H est continue, l'image de H est connexe par arcs. Comme $H(0, \cdot) = f$ et $H(1, \cdot) = g$, on déduit que les images de f et g sont dans la même composante connexe par arcs.
2. Fixons $y_0 \in Y$. On va montrer que chaque application $f : X \rightarrow Y$ est homotope à l'application constante $e_{y_0} : X \rightarrow Y$ de valeur y_0 . Comme Y est contractile, il existe $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle $H(y, 0) = y$ et $H(y, 1) = y_0$. L'application $(t, x) \mapsto \tilde{H}(f(x), t)$ est une homotopie entre f et e_{y_0} .
3. L'application continue

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x)$$

est une homotopie entre f et g .

4. On remarque que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les applications $z \mapsto p(z)$ et $z \mapsto \lambda p(z)$ définies sur un cercle $\{|z| = R\}$ avec R supérieur au maximum des modules des racines de p sont homotopes, car reliées par l'homotopie $H(z, t) = \gamma(t)p(z)$ pour un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ reliant 1 à λ . On peut donc supposer que p et q sont unitaires. Alors $p(z) - q(z)$ est de degré $\leq n - 1$, et par conséquent il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module $> r$, $|p(z) - q(z)| < |p(z)|$. En utilisant la question précédente, on conclut.
5. Comme \mathbb{S}^n privé d'un point est homéomorphe à \mathbb{R}^n par projection stéréographique, il est en particulier contractile. On conclut donc par la question 2.
6. Soient $x \in X$, $t \in [0, 1]$ tels que $(1 - t)f(x) + tg(x) = 0$. En prenant les normes, cela signifie que $t = \frac{1}{2}$, d'où $f(x) = -g(x)$, ce qui signifie que $|f(x) - g(x)| = 2|f(x)| = 2$, contradiction. Ainsi, l'homotopie définie par

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{|(1 - t)f(x) + tg(x)|}$$

convient. La deuxième question est une application directe de la première.

Exercice 2. Équivalences d'homotopie

Terminologie : soit X un espace topologique et A une partie de X . Une rétraction de X sur A est une application continue $r : X \rightarrow A$ qui se restreint en l'identité sur A .

1. Soit π la rétraction donnée par

$$\pi : M \rightarrow M$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}, y\right)$$

C'est une équivalence d'homotopie. En effet, une homotopie $H : M \times I \rightarrow M$ entre l'identité de M et π est donnée par :

$$H((x, y), t) = \left((1 - t)x + \frac{t}{2}, y\right).$$

2. Soient $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ des équivalences d'homotopie, de sorte qu'il existe $f' : X' \rightarrow X$ et $g' : Y' \rightarrow Y$ telles que $f' \circ f$ soit homotope à Id_X , $f' \circ f$ à $\text{Id}_{X'}$ etc. On vérifie alors que $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ est une équivalence d'homotopie : si H est une homotopie de $f' \circ f$ vers Id_X et I une homotopie de $g' \circ g$ vers Id_Y , alors

$$H \times I : (t, (x, y)) \mapsto (H(t, x), I(t, y))$$

est une homotopie de $(f' \circ f) \times (g' \circ g) = (f' \times g') \circ (f \times g)$ vers $\text{Id}_{X \times Y}$. De même pour $f \circ f'$ et $g \circ g'$.

3. Par la question précédente, $X \times C$ a le même type d'homotopie que $X \times \{*\}$, et ce dernier a le même type d'homotopie que X .

Exercice 3. Type d'homotopie d'un complémentaire

1. Par changement de coordonnées, on peut supposer que E est l'espace $\{0\} \times \mathbb{R}^k$, de sorte que

$$\mathbb{R}^n \setminus E = \underbrace{(\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\})}_{\sim \mathbb{S}^{n-k-1}} \times \underbrace{\mathbb{R}^k}_{\text{contractile}} \sim \mathbb{S}^{n-k-1}.$$

2. Quitte à appliquer une translation et une homothétie, on peut supposer que C contient 0 et est contenu dans la boule $B(0, \frac{1}{2})$. On considère alors la rétraction $\pi : \mathbb{R}^n \setminus C \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ qui envoie x sur $\frac{x}{|x|}$. On définit l'homotopie

$$H(x, t) = t \frac{x}{|x|} + (1-t)x$$

entre π et $\text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus C}$. Il faut juste vérifier que l'image de H n'intersecte pas C . Or, pour tout x , $H(x, t)$ décrit le segment reliant $\frac{x}{|x|}$ et x . Si C intersecte ce dernier, alors comme il est convexe et contient 0, il doit contenir l'une des deux extrémités x ou $\frac{x}{|x|}$, ce qui est impossible.

3. On considère $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{0\}$ et B la droite $x = 0$. Alors A et B ont même type d'homotopie (A est même un rétracte par déformation forte de B), mais $\mathbb{R}^2 \setminus A$ a le type d'homotopie de \mathbb{S}^1 , alors que $\mathbb{R}^2 \setminus B$ est une union disjointe de deux espaces contractiles, donc a le même type d'homotopie qu'un ensemble de deux points.
4. En utilisant une translation du tore, on peut supposer que le point qu'on enlève est le point $z_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans la description du tore comme quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par les identifications $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$. On rétracte alors l'intérieur du tore sur le bord le long des segments qui joignent le point z_0 et la frontière.

Exercice 4. Homotopies et cônes

Notons que si X est séparé, alors CX aussi : il est aisé de trouver des voisinages saturés disjoints de deux points de $X \times [0, 1]$.

1. On dispose d'une rétraction vers le sommet donnée par $r : CX \rightarrow CX, (x, t) \mapsto (x, 0)$. Elle est homotope à l'identité de CX via l'homotopie :

$$H : [0, 1] \times CX \rightarrow CX \\ (s, [(t, x)]) \mapsto [(st, x)].$$

2. Supposons d'abord qu'une telle F existe. Alors $F \circ q : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ est une homotopie de f vers une application constante. Réciproquement, si f est homotope à une application constante, alors l'homotopie H entre f et l'application constante est une application (continue) $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que $H|_{X \times \{0\}}$ est constante. Donc H se factorise en une application continue $F : CX \rightarrow Y$. L'application F ainsi construite nous convient.
3. Puisque $\partial \mathbb{D}^{n+1} = \mathbb{S}^n$, un point non nul de \mathbb{D}^{n+1} est repéré de manière unique par un élément $\theta \in \mathbb{S}^n$ et un réel $r \in [0, 1]$ (sa norme). On considère alors l'application $\mathbb{D}^{n+1} \rightarrow C\mathbb{S}^n$ qui associe à un point non nul de \mathbb{D}^{n+1} ses coordonnées polaires généralisées (θ, r) , et qui envoie 0 sur la classe de $\{0\} \times \mathbb{S}^n$. C'est une application bijective, continue, donc un homéomorphisme parce que les deux espaces sont compacts.
4. (a) L'idée est d'utiliser la moitié inférieure du cône pour appliquer l'homotopie entre f et g . Soit $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie de f vers g , de sorte que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$. En notant entre crochets la classe d'un élément de $X \times [0, 1] \amalg Y$ dans C_f , on définit une application continue

$$\Phi : \begin{array}{l} X \times [0, 1] \amalg Y \\ y \in Y \\ (x, t) \end{array} \mapsto \begin{array}{l} C_f \\ [y] \\ \left\{ \begin{array}{l} [(x, 2t)] \quad \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ [H(x, 2t-1)] \quad \text{si } t > \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{array}.$$

On note que

— Pour tout $x; x' \in X$, $\Phi(x, 0) = [(x, 0)] = [(x', 0)] = \Phi(x', 0)$.

— Pour tout $x \in X$, $\Phi(x, 1) = [H(x, 1)] = [g(x)] = \Phi(g(x))$.

donc Φ passe au quotient par les relations définissant C_g , et donne une application continue (que l'on appelle encore Φ) $C_g \rightarrow C_f$.

De même, on construit une application continue $\Psi : C_f \rightarrow C_g$, en utilisant l'homotopie inverse $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$. Il reste à montrer que $\Phi \circ \Psi : C_f \rightarrow C_f$ est homotope à l'identité de C_f (et de même $\Psi \circ \Phi$ homotope à l'identité de C_g). Pour cela, on peut utiliser l'homotopie définie de la manière suivante :

$$U : \begin{array}{l} [0, 1] \times C_f \rightarrow C_f \\ y \in Y \mapsto [y] \\ (x, t) \mapsto \begin{cases} [(x, \frac{(3s+1)t}{4})] & \text{si } t \leq \frac{3s+1}{4} \\ [H(x, 4t - 3s - 1)] & \text{si } [\frac{3s+1}{4}, \frac{s+1}{2}] \\ [H(x, 2 - 2t)] & \text{si } [\frac{s+1}{2}, 1] \end{cases} \end{array} .$$

On vérifie alors que c'est une homotopie entre l'identité de C_f et $\Phi \circ \Psi$. De manière similaire, on construit une homotopie entre $\Psi \circ \Phi$ et l'identité de C_g .

Exercice 5. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels

On rappelle que la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est engendrée par les parties de la forme

$$V(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y), f(K) \subset U\}$$

où $K \subset X$ est compact et $U \subset Y$ est ouvert.

Le résultat de l'énoncé est immédiat une fois qu'on a montré le résultat général suivant :

Lemme Soient X, Y, Z des espaces topologiques, avec X localement compact. Alors on a une bijection bien définie

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}(X \times Z, Y) \rightarrow \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)) \\ f \mapsto z \mapsto f_z \end{array}$$

où $f_z : X \rightarrow Y$ est l'application $x \mapsto f(x, z)$.

C'est un très bon exercice pour réviser la topologie compacte-ouverte! Indication : commencer par montrer que l'application d'évaluation

$$\begin{array}{l} \text{ev} : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y \\ (f, x) \mapsto f(x) \end{array}$$

est continue (on suppose toujours X localement compact).

Référence : Hatcher prop. A.14

Exercice 6. Lacets remplissant la sphère

1. Voir la question 5 de l'exercice 1.
2. Oui : soit γ un lacet tel que $\gamma([0, 1]) = \mathbb{S}^n$. On considère le lacet $\gamma' : t \mapsto \gamma(1 - t)$ (c'est-à-dire γ' parcouru à l'envers). Alors le lacet qui consiste à parcourir γ puis γ' , donné par :

$$\gamma' \circ \gamma : t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2(t - \frac{1}{2})) & \text{pour } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est homotope au lacet constant (voir cours sur le groupe fondamental).

3. Soit x un point quelconque de \mathbb{S}^n , et soient les deux ouverts de \mathbb{S}^n donnés par $U = \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{-x\}$. Par compacité de $[0, 1]$, il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$ de $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, l'image $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit incluse dans U ou dans V . Soit par exemple i tel que $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ soit incluse dans U . Or U est homéomorphe à \mathbb{R}^n , donc $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ est homotope (relativement à a_i et a_{i+1}) à tout chemin reliant a_i et a_{i+1} et contenu dans U , par exemple un arc du grand cercle contenant a_i et a_{i+1} . Puisque $n \geq 2$, ce dernier est nulle part dense dans \mathbb{S}^n .

4. D'après la question 3, tout lacet surjectif est homotope à un lacet non surjectif. La question 1. permet alors de conclure. Le résultat est faux pour $n = 1$: comme on le verra en cours, le lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$ dans le cercle \mathbb{S}^1 n'est pas homotope au lacet constant (et donc à aucun lacet non surjectif).

Exercice 7. Décomposition de \mathbb{S}^3 en tores pleins

1. Il est facile de vérifier que ϕ est une bijection continue de source compacte et de but séparé. L'application ψ se construit en inversant les rôles de (x_1, x_2) et (x_3, x_4) .
2. Utiliser le fait que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.