Corrigé du TD4 : Généralités sur les revêtements

Exercice 1. Quelques propriétés

1. Soit $x \in B$, U un ouvert trivialisant autour de x, qu'on peut supposer connexe, avec une trivialisation $U \times F \xrightarrow{\psi} p^{-1}(U)$ où F est un espace discret. Comme U est connexe, si $i \in F$ est tel que $\psi(U \times \{i\}) \cap C \neq \emptyset$, alors $\psi(U \times \{i\}) \subset C$, car C est une composante connexe. Posons $F' = \{i \in F,\ \psi(U \times \{i\}) \subset C\}$. C'est encore un espace topologique discret. On a alors une trivialisation $p_{/C}^{-1}(U) \to U \times F'$. Ainsi $p_{/C} : C \to B$ est un revêtement. En particulier, ou bien C est vide ou bien $p_{/C}$ est surjective par la Proposition 3.8 du cours.
2. Soit $x \in B$ et U un ouvert trivialisant de p autour de b, $\{y_1, \cdots, y_n\}$ la fibre de x par p et V_i un ouvert trivialisant de q autour de y_i pour chaque $i = 1, \cdots, n$. Il existe donc des espaces topologiques discrets F, F_i où $F = \{1, \cdots, n\}$ est fini et des homéomorphismes $U \times F \xrightarrow{\psi} p^{-1}(U)$, $V_i \times F_i \xrightarrow{\psi_i} q^{-1}(V_i)$. Quitte à restreindre U, on peut supposer que chaque $U \times \{i\}$ est homéomorphe à V_i via ψ. On a donc un homéomorphisme $(p \circ p)^{-1}(U) = q^{-1}(p^{-1}(U)) \to V_i \times F_i$. D'où $p \circ q$ est bien un revêtement.
3. Comme l'application p n'est pas injective, il existe donc deux points x_1 et x_2 de même image par p. Comme E est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ qui relie x_1 à x_2. Si B était simplement connexe alors le chemin $p \circ \gamma$ serait homotopiquement trivial, ce qui impossible car il admet un relèvement qui n'est pas un lacet. Voir aussi la Proposition 3.10 du cours. (Le relèvement d'un lacet ne dépend que de sa classe d'homotopie à extrémités fixes).
4. Prenons un recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ de B par des ouverts trivialisants. Chaque $p^{-1}(U_\alpha)$ est homéomorphe à $U \times \{1, 2\}$. Soit σ_α l'unique involution de $U \times \{1, 2\}$ qui échange 1 et 2 et agit par l'identité sur U. Elle définit un homéomorphisme involutif de $p^{-1}(U_\alpha)$ tel que $p \circ \sigma = p$. Sur $p^{-1}(U_\alpha) \cap^{-1} (U_\beta)$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ car ils échangent tous les éléments d'une fibre. Ainsi les σ_α se recollent en un homéomorphisme global de E qui vérifie $p \circ \sigma = p$.

   Pour le contre-exemple, rappelons les éléments suivants : un revêtement à n-feuillets détermine un morphisme de groupes $\phi : \pi_1(B, b_0) \to \mathcal{S}_n$ (le groupe symétrique d'indice n) et un morphisme de revêtement détermine par action sur la fibre en b_0 un élément de $\mathcal{S}_3$ qui commute avec l'image de $\pi_1(B, b_0)$. Par ailleurs, le morphisme de groupes $\mathrm{aut}(p) \to \mathcal{S}_n$ est injectif : un automorphisme de revêtement qui agit trivialement sur une fibre est trivial. En effet, soit σ un tel automorphisme, $b \in B$ tel que l'action de σ soit triviale sur la fibre en b. Si U est un ouvert trivialisant, chaque copie de U dans E est stable par σ car b a un unique antécédent dans cette copie. Donc l'action de σ est triviale sur cet ouvert. Par connexité de B, σ est trivial.

   On voit donc que $\mathrm{aut}(p)$ est contenu dans le centralisateur de $\pi_1(B, b_0)$ dans $\mathcal{S}_3$. L'idée est alors de trouver un revêtement pour le quel ϕ est surjective (le centre de $\mathcal{S}_3$ étant trivial). Le groupe fondamental d'un bouquet de deux cercles est libre à deux éléments et s'envoie surjectivement donc sur $\mathcal{S}_3$. En particulier, il agit transitivement sur un ensemble à trois éléments et le stabilisateur détermine un revêtement à trois feuillets du bouquet de deux cercles qui n'admet pas d'automorphisme non-trivial.

Exercice 2. Homéomorphismes locaux

1. L'application exponentielle $p :]0, 2[\to \mathbb{S}^1$ est un homéomorphisme local qui n'est pas un revêtment car ne vérifie la propriété de relèvement de chemin par exemple.
2. L'exemple précédent marche en prenant un chemin qui reste proche de 1 dans le cercle.(Faire un dessin)
3. (a) Notons n le cardinal des fibres. Soit $x \in B$ et $y_1, \cdots, y_n$ ses antécédents par p. Comme p est un homéomorphisme local, il existe un ouvert U autour de x et des ouverts V_i autour de chaque y_i homéomorphe à U via p. On a alors $p^{-1}(U) = \cup_i V_i$, car on a exactement n antécédents pour chaque $y \in U$. D'où p est un revêtement. Pour un contre-exemple, dans le cas où les fibres ne sont plus supposées de cardinal fini, on peut prendre la projection de la demi droite ouverte $]0, +\infty[$ donnée par l'application exponentielle, qui est à fibres infinies et n'est pas un revêtement car on ne peut relever un chemin qui part d'un point proche de 0.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

(b) L'image est fermée par hypothèse et ouverte car p est un homéomorphisme local. Donc p est surjective. L'image réciproque de tout singleton est compacte et discrète, donc finie. Pour trouver un ouvert trivialisant de $b \in B$, choisir des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ disjoints de ses antécédents. Montrer que $V = B \setminus p(E \setminus \cup_{i=1}^n U_i)$ est ouvert, et est un ouvert trivialisant de b.

4. Utiliser 3.(a).

Exercice 3. Exemples de revêtements

1. Le quotient de $\mathbb{S}^n$ par l'action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par l'antipodie est égal à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Donc c'est un revêtement à 2 feuillets.
2. Supposons A non-vide. Alors A est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ car revêt $\mathbb{S}^1$, et montrons que A est aussi fermé : si une suite de points $(x_n)_n$ converge vers x, soit U un voisinage ouvert de x tel que $p_{/U}$ est injective. Il existe n_0 tel que $x_{n_0} \in U$. Le chemin qui relie $p(x_{n_0})$ à $p(x)$ se relève à A et par unicité $x \in A$. Donc A doit être égal à $\mathbb{R}$.
3. Le groupe fondamental d'un bouquet de deux cercles est isomorphe au groupe libre à deux générateurs, disons a et b. Se donner un revêtement de degré 2 équivaut à se donner un morphisme de ce groupe vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc à choisir l'image de a et b. Voir *Hatcher, Algebraic Topology*, page 58.
4. Le revêtement universel du ruban de Möbius est donné par $[0, 1] \times \mathbb{R}$ avec l'action du groupe libre $\mathbb{Z}$ engendré par $(x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$. En particulier les revêtements sont donnés par les quotients de $\mathbb{Z}$ et il en existe avec n'importe quel nombre de feuillets. Remarquer qu'un revêtement à nombre fini et impair de feuillets est forcément un ruban de Möbius alors qu'un revêtement par un nombre pair de feuillets est un cylindre.
5. C.f question précédente.
6. La bouteille de Klein est le quotient du groupe topologique $\mathbb{R}^2$ par le groupe de transformations engendrés par $\sigma_1 : (x, ; y) \mapsto (x, y + 1)$ et $\sigma_2 : (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. Remarquer que le quotient par le sous groupe engendré par σ_1 et σ^2 est isomorphe à un tore et c'est un revêtement de la bouteille de Klein.
7. Regarder $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1 \to \mathrm{U}(n)$ défini par $(M, z) \mapsto zM$.
8. Le groupe fondamental de la réunion d'une sphère avec l'un de ses diamètres est $\mathbb{Z}$. En effet, on peut trouver un recouvrement par deux ouverts U et V tels que U est l'hémisphère nord jusqu'au tropique du capricorne et V est l'hémisphère sud jusqu'à l'équateur. L'intersection est connexe par arcs, V est contractile, U a le type d'homotopie d'un cercle et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle qui est trivial en homotopie dans U. Donc par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental est égal à $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Produit de revêtements

Soient $b \in B$, $b' \in B'$ et U, U' des ouverts trivialisants autour de b et b' respectivement avec des homéomorphismes $p^{-1}(U) \simeq U \times F$ et ${p'}^{-1}(U') \simeq U' \times F'$ où F et F' sont des espaces topologiques discrets. On a alors $(p \times p')^{-1}(U \times U') \simeq U \times U' \times F \times F'$, ce qui montre que c'est bien un revêtement. Pour le contre-exemple, considérer un produit infini de copies du revêtement $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ et remarquer que par définition de la topologie produit, un ouvert en haut est produit d'ouverts de $\mathbb{R}$ et qui sont égaux à $\mathbb{R}$, sauf un nombre fini.

Exercice 5. Tiré en arrière d'un revêtement

Soit $b \in B$, et U un voisinage de b trivialisant p, et soit F la fibre au-dessus de b, de sorte qu'on ait un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$. L'ouvert $f^{-1}(U)$ est trivialisant pour $f^*(p)$. En effet, on a un homéomorphisme

$$f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times F$$

en envoyant $(x, e) \in f^*(p)^{-1}(f^{-1}(U))$ sur $(x, \mathrm{pr}_2 \circ \phi(e))$, où $\mathrm{pr}_2 : U \times F \to F$ est la projection.

Exercice 6. Actions de groupes

On va montrer que le groupe agit totalement discontinûment. Soit $x \in X$, et soit K un voisinage compact de x. Écrire $\{g_1, \ldots, g_n\} = \{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$. Prendre des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ disjoints de $g_1x, \ldots g_nx$, et montrer que

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(U_i)$$

convient.

Pour le caractère séparé, soient $x, x' \in X$ tels que $p(x) \neq p(x')$. On veut construire des voisinages V et V' de x et x' tels que pour tout $g, g' \in G$, $gV \cap g'V' = \emptyset$. On commence par choisir un voisinage U de x tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq e$, et de même un voisinage U' de x'.

1. Montrer que quitte à réduire U', on peut supposer qu'il ne contient aucun point de l'orbite de x.
2. Montrer que quitte à réduire U, on peut supposer qu'il n'intersecte aucun gV, $g \in G$. Conclure.

Exercice 7. Revêtement à nombre infini de feuillets

On écrit $U \cap V$ comme une union disjointe de deux ouverts non-vides C_0 et C_1. Considérer le sous-espace de $X \times \mathbb{Z}$ défini par

$$Y = \{(x, k), x \in U,\ k \text{ pair}\} \cup \{(x, k), x \in V, k \text{ impair}\},$$

que l'on quotiente par les relations

$$(x, k) \sim (x, k-1) \text{ si } x \in C_0,\ k \text{ pair}$$

et

$$(x, k) \sim (x, k-1) \text{ si } x \in C_1,\ k \text{ impair}$$

(faire un dessin). Montrer que l'espace obtenu, avec l'application induite par la projection $X \times \mathbb{Z} \to X$, donne bien un revêtement de X.