Corrigé du TD5 : Revêtements et groupe fondamental

Exercice 1. Échauffement

1. Pour montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer qu'en enlevant un point à $\mathbb{R}$ on obtient un espace non connexe par arcs, alors que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point reste connexe par arcs. Cette stratégie n'est pas suffisante pour comparer $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$, mais on peut s'en inspirer en comparant plutôt les groupes fondamentaux : $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est homotope à $\mathbb{S}^1$, donc a un groupe fondamental non-trivial, alors que $\mathbb{R}^n$, privé d'un point a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$, qui est simplement connexe pour $n \geq 3$. En effet, on peut écrire $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^-$ où
$$\mathbb{D}^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}, x_1 > -\frac{1}{4}\}$$
et
$$\mathbb{D}^- = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}, x_1 < \frac{1}{4}\}.$$
Alors $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{D}^-$ sont contractiles (on peut le voir par projection stéréographique par exemple), l'intersection $\mathbb{D}^+ \cap \mathbb{D}^-$ se rétracte sur l'équateur $\mathbb{S}^{n-2}$, en particulier elle est connexe par arcs. Ainsi, par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de $\mathbb{S}^{n-1}$ est trivial.
2. Le groupe $\mathbb{Z}$ n'a pas de torsion, donc l'image du groupe fondamental de X par f est triviale dans $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. On peut alors relever $f : X \to \mathbb{S}^1$ en une application $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ telle que $\exp \circ \tilde{f} = f$.

Exercice 2. Classification complète

(a) Le revêtement universel de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est la sphère de dimension n et il est abélien (= galoisien de groupe d'automorphisme abélien, ici égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Donc à isomorphisme près, on n'a que deux revêtement :$\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

(b) Le groupe fondamental du tore est abélien libre de rang 2. Un sous-groupe de ce dernier est soit de rang 2 (revêtement par un tore à nombre de feuillets égal à l'indice du sous groupe), soit de rang 1 (revêtement par un cylindre), soit nul (le revêtement universel $\mathbb{R}^2$).

(c) Le revêtement universel du ruban de Möbius est donné par $[0,1] \times \mathbb{R}$ avec l'action du groupe libre $\mathbb{Z}$ engendré par $(x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$. En particulier les revêtements sont donnés par les quotients de $\mathbb{Z}$ et il en existe avec n'importe quel nombre de feuillets. Remarquer qu'un revêtement à nombre fini et impair de feuillets est forcément un ruban de Möbius alors qu'un revêtement par un nombre pair de feuillets est un cylindre.

Exercice 3. Graphes et groupes libres

1. Soit $p : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ un revêtement d'un graphe $\mathcal{G}$. Notons S' comme l'image réciproque dans $\mathcal{G}'$ de S et A le sous-ensemble des éléments (u, v) de $S' \times S'$ tel que $a = (p(u), p(v)) \in A$ et le relèvement du chemin $\gamma_a : [0,1] \to [0,1] \times \{a\}$ qui part de u arrive en v dans $\mathcal{G}'$. Alors $\mathcal{G}'$ est exactement le graphe de sommets S' et d'arêtes A'. On vérifie alors que l'on a une application surjective $\psi : \coprod_{s \in S'} \{s\} \coprod_{a \in A'} [0,1] \times \{a\} \to \mathcal{G}'$ et qui se factorise en une bijection continue $\mathcal{G}(S', A') \to \mathcal{G}'$. Comme $\mathcal{G}'$ est séparé car $\mathcal{G}$ séparé, étant le quotient d'un espace séparé et compact (cf TD1, Exo 7), et $\mathcal{G}(S', A')$ est compact, alors ψ est un homéomorphisme.
2. L'idée est de remarquer que si l'on écrase une arête avec deux sommets différents, on obtient un nouveau graphe homotopiquement équivalent. Plus généralement, il faut montrer que l'inclusion d'une arête de sommets différents dans un graphe est une *cofibration.*

   Definition 1 *Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$. L'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une cofibration si pour tout espace topologique Z et toute application $f : [0,1] \times A \cup \{0\} \times X$ continue, il existe $\overline{f} : [0,1] \times X \to Z$ continue qui étend f.*

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

C'est un résultat général alors que si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration et A est contractile, alors l'application quotient $X \to X/A$ est une équivalence d'homotopie. En effet, si $H : [0,1] \times A \to A$ est une homotopie entre l'identité de A et une application constante dans A, alors $f : [0,1] \times A \cup \{0\} \times X \to X$ définie par $H \cup Id_X$ admet une extension continue par propriété de la cofibration en $\widetilde{H} : [0,1] \times X \to X$. On vérifie que $\widetilde{H}(1,.) : X \to X$ se factorise en une application continue $F : X/A \to X$. On vérifie aisément que c'est un inverse homotopique de $X \to X/A$.

Dans un graphe $\mathcal{G}$, si a est une arête de sommets différens alors a est contractile et $a \to \mathcal{G}$ est une cofibration [1]. De plus $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/a$ est un graphe avec la même caractéristique d'Euler que $\mathcal{G}$. On continue cette opération jusqu'à obtenir un graphe à un seul sommet, le graphe de départ étant supposé connexe. Un graphe où il n'y a qu'un seul sommet et k-arêtes est homéomorphe à un bouquet de k cercles.

3. Le groupe fondamental d'un graphe est donc un groupe libre à un nombre fini de générateurs, par application du théorème de Van Kampen. Soit G un graphe de groupe fondamental L. Le sous-groupe K détermine un revêtement fini M de G à k feuillets, c'est donc un graphe de groupe fondamental égal à K. Ce dernier est donc libre. Remarquer que $\chi(M) = k\chi(G)$. Donc K a $1 - k\chi(G)$ générateurs.
4. Prendre un bouquet de deux cercles et utiliser l'exercice 9.

Exercice 4. Groupe fondamental de la bouteille de Klein

1. Soient M_1 est la partie avec $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ et M_2 est la partie avec $x \geq \frac{3}{4}$ ou $x \leq \frac{1}{4}$. Alors M_1 et M_2 sont deux rubans de Möbius qu'on recolle le long de leur bord pour obtenir K.
2. Comme un ruban de Möbius est homotopiquement équivalent à un cercle (par la rétraction sur le cercle au milieu). En particulier, son groupe fondamental est $\mathbb{Z}$. On note la classe génératrice de $\pi_1(M_1)$ par a, et la classe génératrice de $\pi_1(M_2)$ par b (a est le cercle descendant du segment $x = \frac{1}{4}$, b est le cercle descendant du segment $x = \frac{3}{4}$). Comme $C := M_1 \cap M_2$ est un cercle, dont la classe dans $\pi_1(M_1)$ est a^2 et la classe dans $\pi_1(M_2)$ est b^2, on voit en prenant des petits épaississements de M_1 et M_2 en des ouverts qui leur sont respectivement homotopiquement équivalents et en appliquant le théorème de Van Kampen, que
$$\pi_1(K) = \pi_1(M_1) \times_{\pi_1(C)} \pi_1(M_2),$$
avec les inclusions $1 \mapsto a^2$ et $1 \mapsto b^2$. En conclusion, $\pi_1(K) =< a, b; a^2 = b^2 >$.
3. L'abélianisé de $\pi_1(K)$ est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est bien entendu différent du groupe fondamental du tore.
4. La projection canonique est un revêtement Galoisien de groupe G égal au groupe engendré par σ et s. Comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, on a par l'exercice 6 que le groupe fondamental de la bouteille de Klein est isomorphe à G, ce qui en donne donc une présentation.

Exercice 5. Groupe fondamental d'une variété épointée

On rappelle qu'une variété topologique est un espace toplogique séparé à base dénombrable qui admet un recouvrement par des ouverts $(U_i)_i$ tel que chaque U_i est homéomorphe à un ouvert d'un certain $\mathbb{R}^{n_i}$. La variété est dite de dimension n si pour tout i, $n_i = n$.

Il suffit de traiter le cas où on enlève un seul point x. Soit U un ouvert autour de x homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ et $W = V \backslash \{x\}$. On applique Van-Kampen au recouvrement ouvert de V donné par W et U. Comme $W \cap U$ est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ privée d'un point et qui à on tour se rétracte sur sa frontière en projetant depuis le point enlevé. La frontière est une sphère de dimension $n-1$ et elle est donc simplement connexe pour $n \geq 3$. D'où : $\pi_1(V) = \pi_1(W) \times_{\pi_1(W \cap U)} \pi_1(U) \simeq \pi_1(W)$.

Exercice 6. Quelques calculs de groupes fondamentaux

Les deux questions utilisent le théorème de van Kampen : si X est connexe par arcs et s'écrit $X = U \cup V$ avec U et V deux ouverts non-vides simplement connexes tels que $U \cap V$ soit non-vide et connexe par arcs, alors X est simplement connexe.

1. voir notes du TD

1. Par définition, on peut écrire $SX = C^+X \cup C^-X$, où

$$C^+X := X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] / X \times \{0\}, \quad C^-X := X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] / X \times \{1\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on va noter $C^+_\varepsilon X$ (resp. $C^-_\varepsilon X$) un ε-voisinage ouvert de C^+X (resp. C^-X). On remarque que C^+X et C^-X sont des cônes, donc sont contractiles. En particulier, les ouverts $C^+_\varepsilon X$ et $C^-_\varepsilon X$, qui se rétractent par déformation sur ces derniers, sont simplement connexes. De plus, $X_\varepsilon := C^+_\varepsilon X \cap C^-_\varepsilon X$ se rétracte par déformation sur X, qui est connexe par arcs, et donc on peut appliquer le résultat précédent.

2. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ est un point, donc est bien simplement connexe. Supponsons maintenant maintenant que le résultat est vrai pour un $n \geq 1$. On sait que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^1 \backslash \mathbb{S}^{2n+1}$ est réunion disjointe de $\mathbb{C}^n \simeq \{z_n \neq 0\}$ et $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \{z_n = 0\}$. On voudrait alors prendre un voisinage ouvert de ce dernier et appliquer Van Kampen. Regardons alors l'ouvert U qui est la projection des élèments $(z_0, \cdots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ avec $|z_n| < \frac{1}{4}$ et soit V l'ouvert $\{z_n \neq 0\}$. Alors U se rétracte sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, donc est simplement connexe, l'intersection $U \cap V$ est connexe par arcs et V est contractile. Par Van Kampen, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

Exercice 7. Bouquet de deux plans projectifs

1. La première remarque est que si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces topologiques pointés connexes par arcs tels que x_0 et y_0 admettent des voisinages ouverts contractiles U et V dans X et Y respectivement, alors par Van Kampen $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, en prenant le recouvrement $X \vee V$ et $U \vee Y$. Le groupe fondamental en question vaut donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Pour simplifier l'exposition, on colorie un des deux plans projectifs en rouge, et l'autre en bleu. Soient a et b les deux générateurs du groupe fondamental, a celui correspondant au plan projectif rouge, et b celui correspondant au plan projectif bleu.

   Puisque a et b sont d'ordre 2, on a $(ab)^{-1} = ba$. On note $c = ab$. Ainsi, tout mot réduit de longueur paire en a et b est de la forme c^n pour $n \in \mathbb{Z}$. Quant aux mots de longueur impaire, ils sont de la forme $c^n a c^{-n}$ ou $c^{-n} b c^n$ ou $c^n (aba) c^{-n}$ ou $c^{-n} (bab) c^n$ pour $n \geq 0$. Mieux : puisque $aba = cbc^{-1}$ et $bab = c^{-1}ac$, tout mot impair est en fait de la forme $c^n a c^{-n}$ ou $c^n b c^{-n}$.

   Soit H un sous-groupe de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous avons plusieurs cas à distinguer :

   (a) H est trivial

   (b) H est contenu dans le sous-groupe $\langle c \rangle$ engendré par c. Ainsi, il est engendré par c^m pour un certain $m \geq 1$, et est donc d'indice $2m$ dans G.

   (c) $H \cap \langle c \rangle = \{1\}$. Alors H contient un unique mot de longueur impaire, et est d'ordre 2. Quitte à remplacer H par un sous-groupe conjugué, on peut supposer que ce mot est a ou b.

   (d) H n'est pas contenu dans $\langle c \rangle$, et l'intersection $H \cap \langle c \rangle$ est non-triviale. Ainsi, H contient un certain c^m, et quitte à conjuguer par une puissance de c, on peut supposer que H contient a ou b. Si $m = 2k+1$ est impair, on remarque que $ac^m = b(ab)^{2k} = (ab)^{-k} b (ab)^k$, et donc les sous-groupes $\langle a, c^m \rangle$ et $\langle b, c^m \rangle$ sont conjugués. En revanche, si m est pair, leurs classes de conjugaison sont distinctes (cf. les revêtements distincts obtenus plus bas).

   Les revêtement correspondant à ces classes de conjugaison de sous-groupes sont :

   (a) On considère l'espace topologique obtenu comme union d'une sphère de centre $(k, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si on colorie toutes les sphères « paires » en rouge et les sphères « impaires » en bleu, on obtient un revêtement en envoyant les sphères bleues sur la partie bleue de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et les sphères rouges sur la partie rouge. Cet espace est bien le revêtement universel car il est simplement connexe, comme on peut le voir par exemple en appliquant Van Kampen. Notons que tout élément de G induit un automorphisme de ce revêtement : l'élément a envoie la sphère k sur la sphère $-k$ par l'application antipodale, et l'élément b envoie la sphère $1+k$ sur la sphère $1-k$ par l'application antipodale. Par conséquent, l'élément ab agit comme la translation qui envoie la sphère k sur la sphère $k+2$ (par l'application identité).

(b) Le revêtement correspondant doit être de degré $2m$. On l'obtient en identifiant dans le revêtement précédent la sphère correspondant à l'entier k avec celle correspondant à l'entier $k+2m$, pour tout m, de sorte à obtenir un « collier » de $2m$ sphères, les paires étant bleues et les impaires étant rouges.

(c) Si $H = \langle a \rangle$, alors le revêtement est obtenu en quotientant le revêtement universel par la réflexion par rapport au plan $x = 0$: on obtient une demi-droite de sphères, avec un plan projectif rouge au bout. De même, si $H = \langle b \rangle$, on obtient une demi-droite de sphères avec un plan projectif bleu au bout.

(d) Si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m pair, le revêtement est obtenu en identifiant dans celui de (b) la sphère k avec la sphère $2m - k$ par l'application antipodale : on le voit comme une chaîne de $m - 1$ sphères, avec un plan projectif rouge à chaque extrémité. De même, si $H = \langle b, c^m \rangle$ avec m pair, on l'obtient en identifiant la sphère $1+k$ avec la sphère $2m+1-k$ (modulo $2m$) par l'application antipodale : c'est une chaîne de $m-1$ sphères avec un plan projectif bleu à chaque extrémité. Enfin, si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m impair, ce sera une chaîne de $m - 1$ sphères avec un plan projectif rouge à une extrémité, et un plan projectif bleu à l'autre.

Exercice 8. Bouquets de cercles

Voir `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf` page 60

Exercice 9. Complémentaire de deux espaces affines

Commençons par le cas $n = 2$: on enlève deux points au plans $\mathbb{R}^2$ et on voit alors la surface obtenue a le même d'homotopie qu'un bouquet de deux cercles. En particulier, le groupe fondamental est le produit libre de deux copies de $\mathbb{Z}$. Passons au cas général : on va construire deux ouverts U et V tels que $U\backslash A_1$ et $V\backslash A_2$ se rétractent sur $\mathbb{R}^n\backslash A_1$ et $\mathbb{R}^n\backslash A_2$ respectivement et recouvrent $\mathbb{R}^n\backslash(A_1 \cup A_2)$ et l'intersection $U\backslash A_1 \cap V\backslash A_2$ est contractile. Modulo ce résultat, on voit que $U\backslash A_1$ et $V\backslash A_2$ ont le même d'homotopie que $\mathbb{R}^n\backslash A_1$ et $\mathbb{R}^n\backslash A_2$ respectivement et on applique alors Van Kampen qui le groupe fondamental cherché est le produit libre du groupe fondamental de $\mathbb{R}^n\backslash A_1$ et de $\mathbb{R}^n\backslash A_2$. Or, on a vu que $\mathbb{R}^n\backslash A_i$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n_i-1}$ où n_i est la codimension de A_i, donc $\pi_1(\mathbb{R}^n\backslash A_i)$ est égal à $\mathbb{Z}$ si la codimension de A_i vaut 2 et trivial sinon.

Revenons maintenant à la construction des deux ouverts U et V. Quand $n = 2$, on peut prendre deux demi-plans qui se coupent en une bande contractile. Pour n plus grand, on peut toujours supposer que A_1 est l'espace linéaire $\mathbb{R}^{n-n_i}$. Donc A_2 est contenu dans $A_1 \times \mathbb{R}^{n_1}\backslash\{0\}$. La projection de $p(A_2)$ sur $\mathbb{R}^{n_1}$ est encore un espace affine (fermé !) qui évite 0, donc de distance strictement positive à 0. On peut alors trouver T_1 et T_2 deux demi-espaces ouverts de $\mathbb{R}^{n_1}$ d'intersection une bande contractile, $T1$ contient 0 mais pas $p(A_2)$ et T_2 contient $p(A_2)$ mais pas 0 : ceci est possible car $n_1 \geq 2$. Soit $U = A_1 \times T_1$ et $V = A_1 \times T_2$: ce sont deux demi-espaces dans $\mathbb{R}^n$, $A_2 \subset V$ et vérifient les conditions souhaitées.

Exercice 10. Espaces topologiques finis

1. Il y a trois topologies possibles sur un ensemble à deux éléments : la topologie discrète, la topologie grossière, et la topologie pour laquelle un des deux éléments de l'ensemble constitue un ouvert. Le premier n'est pas connexe, mais les deux autres sont même connexes par arcs (le vérifier !). Celui avec la topologie grossière est simplement connexe d'après l'exercice 2 de la feuille 3. Soit maintenant $X = \{a, b\}$ un espace dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{a\}$ et $\{a, b\}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ soit $s \mapsto \gamma_t(s)$ le lacet qui envoie $[0, \frac{s}{2}] \cup [1 - \frac{s}{2}, 1]$ sur b et $]\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}[$ sur a. Alors l'application $H : (s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ fournit une homotopie de γ_0 vers γ_1, qui est le lacet constant égal à b. Vérifier que le fait que γ_0 soit homotopiquement trivial implique que X est simplement connexe.

   Ces idées permettent également de traiter le cas des ensembles de cardinal 3.

2. S'inspirer de l'exercice 7 pour construire un revêtement de fibre isomorphe à $\mathbb{Z}$, et montrer qu'il est simplement connexe (utiliser la simple connexité des espaces topologiques de 3 éléments).

3. Construire un espace bien choisi à 5 éléments à partir du précédent, recouvert par deux ouverts avec la même topologie que le précédent, et utiliser Van Kampen.

Exercice 11. Espaces topologiques à groupe fondamental donné

Le groupe G admet une présentation de la forme $G =< a_1, \cdots , a_n, r_1, \cdots , r_s >$. On prend un bouquet de n cercles correspondant aux générateurs. Puis, on attache s 2-cellules correspondantes aux relations de la façon déterminée par l'expression de r_j par g_i.

Exercice 12. Pour aller plus loin

1. Notons U l'image de la première copie du cercle et V l'image de la seconde copie. L'intersection est contractile, donc le groupe fondamental est un groupe libre à deux générateurs.
2. Le groupe fondamental de la droite à deux origines, que l'on va noter $D_{:}$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Deux preuves possibles :
   — Soit C un cercle, x, x' deux points diamétralement opposés du cercle, et $U = C \setminus \{x'\}$. On choisit un homéomorphisme $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = 0$, et on recolle C sur $D_{:}$ en recollant U sur le complémentaire d'une des deux origines, suivant ϕ. L'intersection est homéomorphe à $\mathbb{R}$, contractile, et l'union homéomorphe au cercle à deux origines : le théorème de Van Kampen fournit alors

   $$\pi_1(D_{:}, x) * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

   Dès lors, $\pi_1(D_{:}, x)$ est un groupe libre et en abélianisant on voit qu'il est de rang 1.

   — On peut aussi utiliser une déformation d'homotopie pour se ramener au groupe fondamental d'un cercle. Soient H^+, H^- les demi-plans fermés supérieur et inférieur respectivement. On note L^+, L^- les bords de H^+, H^-, ainsi que O^+, O^- les origines de L^+, L^-, et x^+, x^- les coordonnées de L^+, L^- respectivement. Comme H^+ (resp. H^-) se rétracte par déformation sur L^+ (resp. L^-), on sait que le groupe fondamental de la droite à deux origines est isomorphe à celui de $H^+ \coprod H^- / \{x^+ \sim x^-,\ x \neq 0\}$. On remarque que l'inclusion $H^+ \smallsetminus \{O^+\} \hookrightarrow H^+$ est une équivalence d'homotopie. Donc on a

   $$\pi_1(D_{:}, x) = \pi_1\Big(\big(H^+ \smallsetminus \{O^+\}\big) \coprod \big(H^- \smallsetminus \{O^-\}\big) \Big/ \{x^+ \sim x^-;\ x \neq 0\}, x\Big).$$

   Or l'espace à droite est $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{O\}$, dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
3. C'est le groupe libre sur $\mathbb{N}$.