Corrigé du TD6 : Groupes d'homotopie supérieurs

Exercice 1. Exercice

Cet exercice est un cas particulier de l'exercice 9 de la feuille 5. Notons D et D' les deux droites en question et X le complémentaire de leur réunion. On distingue plusieurs cas :

Premier cas : les droites D et D' sont confondues, dans ce cas le complémentaire a le même type d'homotopie qu'un cercle par rétraction sur un cylindre d'axe D. Le groupe fondamental est donc égal à $\mathbb{Z}$.

Deuxième cas : les deux droites D et D' s'intersectent en un unique point O. En prenant la sphère de centre O et de rayon 1, on voit que X a le même type d'homotopie que cette sphère privée de quatre points, elle même ayant le même d'homotpie que la plan privé de trois points et par van Kampen, le groupe fondamental est égal au produit libre de trois copies de $\mathbb{Z}$.

Troisième cas : les deux droites sont d'intersection vide. Notons P et P' deux points de D et D' tels que la droite D" qui les lient soit orthogonale à D et D'. Ces deux points sont uniques si D et D' ne sont pas parallèles. Notons K un plan affine qui contient les vecteurs dirigeants de D et D' U V les ouverts obtenus en faisant le produit de K par deux demi-droites $D"_1$ et $D"_2$ qui recouvrent D" et dont l'intersection est un segment ouvert strictement contenu dans $[P, P']$. Notons enfin $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ leur intersection avec X. C'est un recouvrement ouvert de X et on applique Van Kampen comme dans le corrigé de l'exerice 9 de la feuille 5.

Exercice 2. Sphéroïdes

Remarquer que le quotient de I^k où $I = [0, 1]$, par son bord est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^k$, par exemple via l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : I^k &\to \mathbb{S}^k \\ (t_1, \cdots, t_n) &\mapsto \left(\frac{\sin(\pi||t||_\infty)}{||t||} \underline{t}, \cos\left(\pi||t||_\infty\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, toute application $\sigma : I^k :\to X$ qui envoie ∂I^k sur x_0 se factorise à travers une application continue pointée $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^k \to X$. Soient $\phi_i : (\mathbb{S}^k, s_0) :\to (X, x_0)$ deux applications pointées et E un équateur passant par s_0 qui sépare la sphère en deux parties A_1 et A_2. L'opération de groupe se décrit par la composition

$$\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k \xrightarrow{\phi_1 \vee \phi_2} X,$$

où la première flèche est la contraction de l'équateur. Or, on peut construire une homotopie

$$H : \mathbb{S}^k \times [0, 1] \to \mathbb{S}^k.$$

qui préserve le point base s_0 et fait tourner l'équateur E. On définit alors l'application suivante $\psi(x, t) = \phi_1(x)$ si $x \in H(., t)(A_1)$, et $\psi(x, t) = \phi_2(x)$ si $x \in H(., t)(A_2)$. C'est une homotopie entre $\phi_1 * \phi_2$ et $\phi_2 * \phi_1$

Exercice 3. Point base

1. Voir page 49 de https ://webusers.imj-prg.fr/ ilia.itenberg/enseignement/poly.pdf. Il reste à vérifier que l'application $\phi_\gamma : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, x_1)$ est un morphisme de groupes, où γ est un chemin qui relie x_0 à x_1. Soient f et g deux applications continues de I^k vers X qui envoient ∂I^k vers x_0. Soit l'homotopie définie par

$$\begin{aligned} H : [0,1] \times I^k &\to X \\ (t, x) &\mapsto \phi_\gamma(f + 0)((2 - t)s_1, s_2, \cdots, s_n), \text{ si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ &\quad \phi_\gamma(0 + g)((2 - t)t_1 + t - 1, s_2, \cdots, s_n) \text{ si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

   C'est l'homotopie qui correspond au dessin de la page 49 *loc.cit.*.
2. Voir exercice 2 TD 3

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 4. Groupes d'homotopie des graphes

Soit $g : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)$.

Première remarque : Par compacité, l'image de $\mathbb{S}^n$ sera incluse dans un nombre fini de sommets et d'arêtes de X. Démontrons ce fait : si on a un nombre infini de sommets dans l'image g, on peut en extraire une sous suite convergente, soit vers un point à l'intérieur d'une arête, soit vers un sommet. Dans les deux cas, on peut trouver un ouvert quicontient la limite et au plus un autre sommet du graphe, ce qui contredit la convergence. Si l'image contient un nombre infini d'arêtes, on peut trouver un sommet x dans l'image de g et une suite infini de points x_n distincts dans des arêtes distinctes reliées à x et qui sont dans l'image de g. Par compacité, la suite converge vers un point y. Il existe au plus un indice n_0 tel que $y = x_{n_0}$. Donc pour $n > n_0$, dans chaque arête correspondant à $x_n$un peut trouver un ouvert U_n qui contient y, au plus un sommet et pas x_n. L'image des réunion disjointe des ouverts U_n dans le graphe fournit un ouvert autour de y qui ne contient aucun x_n, ce qui contredit la convergence. Donc pour montrer que g est homotopiquement triviale, il suffit de montrer qu'elle l'est quand X est supposé fini.

Nous allons construire un revêtement de X par un arbre. Pour toute arête orientée a de X, on note $d(a)$ (resp. $f(a)$) le sommet d'où a démarre (resp. celui où elle finit). On note a^{-1} la même arête parcourue dans l'autre sens.

Soit $\tilde{X}$ le graphe construit de la manière suivante : son ensemble de sommets est l'ensemble des mots $a_1 \dots a_n$ avec $n \geq 0$, et $a_1, \dots, a_n$ des arêtes orientées de X, tels que

— $d(a_1) = x_0$;

— Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $f(a_i) = d(a_{i+1})$;

— Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ (c'est-à-dire que les mots sont réduits).

En particulier, cet ensemble comprend le mot vide ϵ. On place une arête entre les mots $a_1 \dots a_n$ et $a_1 \dots a_n a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et tous les $a_1, \dots, a_{n+1}$ vérifiant ces propriétés.

Ainsi, les sommets de $\tilde{X}$ correspondent exactement aux chemins dans X qui démarrent en x_0 et qui ne « retournent pas en arrière » . Deux sommets sont reliés si les chemins correspondants diffèrent d'une seule arête. L'espace $\tilde{X}$ obtenu est un graphe connexe sans cycle, c'est donc un arbre.

On définit une application $p : \tilde{X} \to X$ en envoyant

— le mot vide sur x_0 ;

— le sommet $a_1 \dots a_n$ pour $n \geq 1$ sur $f(a_n)$.

— l'arête orientée allant du sommet $a_1 \dots a_n$ vers le sommet $a_1 \dots a_n a_{n+1}$ sur l'arête orientée a_{n+1} de X.

C'est un revêtement : l'existence d'un voisinage trivialisant pour un point à l'intérieur d'une arête est claire par définition. Soit maintenant un sommet $s \in X$, et soit $(b_i)_{i \in I}$ la famille de toutes les arêtes orientées partant de s. Soit U un petit voisinage contractile de s tel que s soit le seul sommet de X contenu dans U. Nous allons montrer que U est un voisinage trivialisant de s pour p.

Soit $x = a_1 \dots a_n$ un mot non vide tel que $f(a_n) = s$. Ainsi, il existe $j \in I$ tel que $a_n = b_j^{-1}$. Alors par définition, les arêtes orientées partant de x dans $\tilde{X}$ sont :

— celles allant vers $a_1 \dots a_n b_i$ pour tout $i \neq j$.

— celle allant vers le mot $a_1 \dots a_{n-1}$.

On a donc une bijection entre l'ensemble des arêtes orientées partant de s et celui des arêtes partant de x (le cas du mot vide se traite de manière similaire) : ainsi, la composante de $p^{-1}(U)$ contenant s est bien homéomorphe à U.

Par le théorème du relèvement, g se relève en une application continue $\tilde{g} : S^n \to \tilde{X}$. Par compacité, l'image de $\tilde{g}$ est incluse dans un sous-arbre fini de $\tilde{X}$, or un arbre fini est contractile. Ainsi, $\tilde{g}$ est homotopiquement triviale, et donc f l'est aussi.

Remarque En fait n'importe quel arbre, même infini, est contractile. En effet, si A est un arbre et $x \in x_0$ un point fixé on peut construire une homotopie entre l'identité de A et l'application constante égale à x_0 de la manière suivante : pour chaque sommet v de A, on fixe un chemin $\gamma(v) : I \to A$ tel que $\gamma_v(0) = v$ et $\gamma_v(1) = x_0$. Pour toute arête a de A, d'extrémités v_1 et v_2, on définit une application F sur le bord du carré $a \times I$ par

$$F_{|a \times \{0\}} = \mathrm{Id}_a$$

$$F_{|v_i \times I} = \gamma_{v_i}$$

$$F_{|a\times\{1\}} = x_0$$

On utilise alors le lemme suivant pour prolonger F à tout le carré $a \times I$ (en considérant le carré comme homéomorphe au disque $\bar{D}^2$) pour toute arête a, et ainsi en une homotopie $F : A \times I \to A$ entre Id_A et x_0.

Lemme Soit X un espace topologique et $f : S^n \to X$ une application continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est homotope à une application constante.

(b) f se prolonge en une application continue $\tilde{f} : \bar{D}^{n+1} \to X$.

Montrons $(a) \Rightarrow (b)$ (nous n'avons besoin que de ce sens-là). Soit F une homotopie entre f et l'application constante égale à $x_0 \in X$. On pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} F(\frac{x}{||x||}, 2(1 - ||x||)) & \text{pour } ||x|| \geq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{pour } ||x|| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 5. Lemme des cinq

C'est une exemple de chasse au diagramme : prenons x dans le noyau de φ_3. Son image dans G_4 s'envoie vers 0 par φ_4, donc est zéro et x a un antécédent y dans G_2. De même, y s'envoie vers un u dans H_2 qui s'envoie vers zéro dans H_3, donc u provient d'un u' dans H_1, lui même d'un v dans G_1. l'image de v dans G_2 et y ont la même image dans H_2 par φ_2, donc sont égaux, d'où x provient de G_1, donc nul. La surjectivité se traite similairement.