Corrigé du TD7 : Complexes et homologie

Exercice 1. Premiers calculs d'homologie

1. Si X est un point, alors pour tout entier $k \geq 0$, le groupe des k-chaînes singulières sur X est libre de rang 1. Il est engendré par l'unique application constante $\Delta_k \to X$, où Δ_k est le simplexe standard de dimension k. Remarquer par ailleurs que $\partial_k = 0$ si k impair, et c'est un isomorphisme sinon. Ainsi $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$ si $k \geq 1$ et $H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
2. Le morphisme $\partial_1 : C_1(X) \to C_0(X)$ associe à toute application continue $\gamma : \Delta = [0, 1] \to X$ l'élément $\gamma(0) - \gamma(1)$. Ainsi l'image de ∂_1 dans $C_0(X)$ est le sous groupe engendré par $\{\gamma(0) - \gamma(1),\, \gamma : [0, 1] \to X\}$. Comme X est connexe par arcs, on en déduit que
$$H_0(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x / < \gamma(0) - \gamma(1),\, \gamma : [0, 1] \to X > \simeq \mathbb{Z}.$$
3. Le morphisme
$$f_* : C_0(X, \mathbb{Z}) \to H_0(Y, \mathbb{Z})$$
est surjectif, car Y est connexe par arcs et se factorise à travers $H_0(X, \mathbb{Z})$ en un isomorphisme.

Exercice 2. Sommes directes de complexes

1. Il suffit de vérifier que $\ker(\partial_n \oplus \partial'_n) = \ker(\partial_n) \oplus \ker(\partial'_n)$ et que $\mathrm{Im}(\partial_n) \oplus \mathrm{Im}(\partial_n) = \mathrm{Im}(\partial_n \oplus \partial'_n)$. On remarque que cela marche pour une somme quelconque de complexes.
2. On vérifie d'abord que $C_*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_\alpha C_*(X_\alpha, \mathbb{Z})$, puis on applique la question précédente.

Exercice 3. Suites exactes courtes

Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens.

1. $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$ sont claires. Pour $(b) \Rightarrow (a)$, définir le morphisme
$$\begin{array}{ccc} A \oplus C & \to & B \\ (a, c) & \mapsto & f(a) + s(c) \end{array}$$
et montrer que c'est un isomorphisme, en utilisant le lemme des cinq par exemple, donnant le diagramme souhaité. Pour $(c) \Rightarrow (a)$ faire pareil avec
$$\begin{array}{ccc} B & \to & A \oplus C \\ b & \mapsto & (r(b), g(b)) \end{array}$$
2. Si C est un groupe abélien libre, alors la condition (b) est satisfaite : envoyer chaque générateur de C sur n'importe lequel de ses antécédents.

Exercice 4. Complexes sur un corps

1. Voir preuve de la Proposition 5.7 dans le cours.
2. Pour tout complexe C_*, notons $i_*^C : C_* \to C_*$ le morphisme homotope à l'identité donné par la question précédente. La composition
$$C_* \xrightarrow{i_*^C} C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{i_*^D} D_*$$
est homotope à f et c'est un isomorphisme de complexes.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.fr, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 5. Exemples élémentaires de complexes

1. On peut prendre $C_n = A_n$ pour la première question, avec $d = 0$. Pour la deuxième question, on peut écrire chaque A_n comme le quotient d'un groupe abélien libre par un sous groupe libre [1] : $0 \to F_n \to G_n \to A_n \to 0$. On définit $C_n = F_{n-1} \oplus G_n$ avec $d_n(g, f) = (0, i_{n-1}(f))$, où i_{n-1} est l'inclusion $F_{n-1} \to G_{n-1}$.
2. Considérer par exemple le complexe

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbf{Q} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Q} \xrightarrow{0} \mathbf{Q} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Q} \xrightarrow{0} \ldots.$$

Tous ses groupes d'homologie sont nuls.

Exercice 6. Caractéristique d'Euler d'un complexe

Pour tout entier $n \geq 0$, d'après le théorème du rang :

$$\dim C_n = \dim \ker d_{n-1} + \mathrm{rg}\, d_{n-1}.$$

D'autre part, par définition,

$$\dim H_n(C) = \dim \ker d_{n-1} - \mathrm{rg}\, d_n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_n (-1)^n \dim H_n(C) &= \sum_n (-1)^n \dim \ker d_{n-1} + \sum_n (-1)^n \mathrm{rg}\, d_n \\
&= \sum_n (-1)^n (\dim \ker d_{n-1} - \mathrm{rg}\, d_{n-1}) \\
&= \sum_n (-1)^n C_n
\end{aligned}$$

Exercice 7. Un exemple de complexe en théorie des groupes

1. Il faut vérifier que $\partial_{-n-1} \circ \partial_{-n} = 0$. Remarquer que dans la double somme les termes (i, j) et (j, i) se simplifient.
2. On a $C_0(G, M) \simeq M$ et $\mathrm{Ker}(\partial_0) \simeq \{x \in M, g.x_x = 0, \forall g \in G\} = M^G$.
3. Si l'action est triviale alors ∂_0 est nulle et $(\partial_{-1}.f)(g_1, g_2) = f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$.
4. On a une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_*(G, M') \to C_*(G, M) \to C_*(G, M'') \to 0,$$

qui donne une suite exacte longue en homologie.

1. Regarder par exemple le livre "Algebra" de Serge Lang, page 880.