Corrigé du TD8 : Homologie singulière I

Exercice 1. Quelques propriétés

1. On peut supposer que X est connexe par arcs et alors $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_0(X, A) = H_0(X)/H_0(A)$. Donc $H_0(X, A) = 0$ si, et seulement si $A = \emptyset$.
2. On peut supposer que X est connexe par arcs et on raisonne sur la suite exacte longue de la paire (X, A). Le groupe $H_0(X, A)$ est nul, si et seulement si $H_1(A) \to H_1(X)$ est surjective et $H_0(A) \to H_0(X)$ est injective. Or l'injectivité de cette dernière équivaut au fait que A est connexe par arcs.
3. Le suite exacte longue de la paire (X, A) montre les groupes $H_n(X, A)$ et $H_n(X)$ sont isomorphes en degré strictement positif, et pour $n = 0$, il s'identifie au quotient $H_0(X)/\mathbb{Z}[x_A]$ où $A = \{x_A\}$.
4. En raisonnant sur la suite exacte longue d'homologie de la paire (X, A), l'équivalence est immédiate.
5. Il existe $r : X \to A$ tel que $r \circ i = id_A$. En regardant les applications induites en homologie, on obtient $H(r) \circ H(i) = id_{H_*(A)}$ et ainsi $H(i)$ est injective.

Exercice 2. Suites exactes longues en homologie

1. LE diagramme de complexes suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*(A,B) \arrow[r] & C_*(X,B) \arrow[r] & C_*(X,A) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] \arrow[u] & C_*(X) \arrow[r] \arrow[u] & C_*(X,A) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

   Ce qui donne, en prenant les suites exactes longues en homologie :

$$\begin{tikzcd}
H_k(A,B) \arrow[r] & H_k(X,B) \arrow[r] & H_{k-1}(X,A) \\
H_k(A) \arrow[r] \arrow[u] & H_k(X) \arrow[r] \arrow[u] & H_{k-1}(X,A) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

   La première ligne fait partie de la suite exacte longue cherchée et la propriété demandée sur le connectant résulte de la commutativité du dernier carré.
2. Prendre B réduit à un point.

Exercice 3. Bouquet d'espaces

Soient U et V des ouverts de X et Y qui sont des voisinages se rétractant par déformation forte sur x_0 et y_0 respectivement. Alors $\{X \vee V, U \vee Y\}$ est un recouvrement ouvert de $X \vee Y$. Par ailleurs, $X \vee V$ et $U \vee Y$ ont le même type d'homotopie que X et Y respectivement et$X \vee V \cap U \vee Y$ est contractile. Ainsi, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris donne pour $k \geq 2$:

$$0 \to H_k(X) \oplus H_k(Y) \to H_k(X \vee Y) \to 0,$$

et en degré inférieur à 2, on a :

$$0 \to H_1(X) \oplus H_1(Y) \to H_1(X \vee Y) \to H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{(1)} H_0(X) \oplus H_0(Y) \to H_0(X \vee Y) \to 0$$

On sait par ailleurs (voir l'exercice 1) que (1) est injective, ainsi on a les deux suites exactes courtes :

$$0 \to H_1(X) \oplus H_1(Y) \to H_1(X \vee Y) \to 0,$$

et

$$0 \to H_0(\{x_0\}) \to H_0(X) \oplus H_0(Y) \to H_0(X \vee Y) \to 0.$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 4. Homologie du parachute

Soit U l'intérieur de Δ^2 et V un voisinage ouvert du bord de Δ^2 qui se rétracte par déformation sur le borde de Δ^2 et tel que son intersection avec U soit homotope à un cercle. Notons $\widetilde{V}$ son image dans P, le quotient de Δ^2 par ses sommets et remarquons qu'il a le même type d'homotopie qu'un bouquet de trois cercles. Alors $\{U, \widetilde{V}\}$ est un recouvrement ouvert de P, et la suite exacte Mayer-Vietoris implique

$$\begin{aligned} 0 \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(P), \\ 0 \to 0 \to 0 \oplus 0 \to H_k(P) \to 0, \quad \text{pour} \quad k \geq 2, \\ 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(P) \to 0 \\ 1 \mapsto (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Exercice 5. Suspensions

Soient U et V les images de $X \times [0, \frac{3}{4}]$ et $X \times [\frac{1}{4}, 1]$ respectivement dans SX. Alors $\{U, V\}$ est un recouvrement ouvert de SX, U et V sont contractiles et leur intersection a le même type d'homotopie que X. Par Mayer-Vietoris, $H_k(SX) \simeq H_{k-1}(X)$ pour $k \geq 2$ et comme la suspension est connexe par arcs, on a $H_0(SX) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, la suite de Mayer Vietoris donne en degré 0 et 1 :

$$0 \to H_1(SX) \to H_0(X) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(SX).$$

On écrit X comme la réunion disjointe de ses composantes connexes par arcs X_α et on a donc $H_0(X) = \oplus_\alpha \mathbb{Z} t_\alpha$, chaque t_α s'envoie alors sur $(1, 1)$. Ainsi

$$H_1(SX) \simeq \{\sum_\alpha x_\alpha t_\alpha, \sum_\alpha x_\alpha = 0\}.$$

Exercice 6. Tore et bouquets de sphères

Le bouquet B a pour groupes d'homologie $H_0(B) = \mathbb{Z}$, $H_1(B) = H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}^2$ et $H_2(B) = H_2(\mathbb{S}^1) \oplus H_2(\mathbb{S}^1) \oplus H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$.

En ce qui concerne le tore $T \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, il a également ces mêmes groupes d'homologie : on voit T comme le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ avec les identifications usuelles du bord. On a alors un recouvrement $\{U, V\}$ avec $U =]0, 1[\times]0, 1[$ et V est le complémentaire du point $(1/2, 1/2)$. On voit que U est contractile, V a le même type d'homotopie que l'image du bord de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans T, à savoir un bouquet de deux cercles, $H_1(V, R)$ est abélien libre à deux générateurs a, b et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle c. De plus, l'application $H_1(U \cap V) \to H_1(V)$ envoie c sur $a + b - a - b = 0$. On applique alors la suite exacte de Mayer-Vietoris à ce recouvrement et on obtient l'homologie à coefficients dans un anneau R, on obtient $H_0(K, R) = R$, $H_1(K, R) = R \oplus R$, $H_2(K, R) = R$ et $H_k(K, R) = 0$ pour $k \geq 3$.

En revanche, ces espaces ne sont pas homotopiquement équivalents car ils n'ont pas le même groupe fondamental : $\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$ alors qu'une application de Van Kampen montre que $\pi_1(B)$ est le même que celui du bouquet de 2 cercles, à savoir $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Exercice 7. Théorème de Hurewicz

1. Prenons un 2-simplexe singulier de même image que α, alors α est égal au bord de ce simplexe.
2. Si on un écrase un 2-simplexe sur deux arêtes puis on envoie la première sur α et la deuxième sur β alors le 2 simplexe singulier c obtenu vérifie $\partial c = \alpha + \beta - \alpha\beta$.
3. Le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ est l'union de deux simplexes T_1 et T_2 tels que $\partial(H(T_1) = \alpha - cst + H(\Delta)$ et $\partial(H(T_2)) = H(\Delta) - \beta + cst$, où Δ est la diagonale de $[0, 1] \times [0, 1]$ et H est l'homotopie entre α et β (à extrémités fixes, par définition.).
4. Ce morphisme est bien défini par la question 3, et c'est un morphisme de groupes par la question 2.

5. Commençons par montrer la surjectivité de ϕ. Soit $\sigma = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$ un 1-cycle, c'est-à-dire un élément de $C_1(X;\mathbb{Z})$ de bord nul. En autorisant certains σ_i à être égaux, on peut supposer que pour tout i, $n_i = \pm 1$. Ensuite, puisque $-\sigma_i$ est homologue à $\bar{\sigma}_i$ (le chemin σ_i parcouru en sens inverse), nous pouvons supposer que les n_i sont en fait tous égaux à 1. Nous avons par hypothèse

$$\sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = \partial\sigma = 0,$$

dans le groupe abélien libre $C_0(X;\mathbb{Z})$. En particulier, si σ_i n'est pas un lacet, il existe nécessairement un $j \neq i$ tel que $\sigma_j(0) = \sigma_i(1)$, de sorte que les lacets σ_i et σ_j soient composables. Mais alors d'après la question 2. on peut remplacer $\sigma_i + \sigma_j$ par leur concaténé $\sigma_i\sigma_j$ sans changer la classe d'homologie du 1-cycle considéré. En poursuivant ce processus par récurrence, on se ramène au cas où tous les σ_i sont des lacets. Il reste à en faire des lacets en x_0. Pour cela, pour tout $x \in X$, par connexité par arcs, on choisit un chemin ℓ_x reliant x_0 à x (constant si $x_0 = x$). Alors $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$ est homologue à σ_i pour tout i, donc on peut supposer que chaque σ_i est un lacet en x_0. Finalement, le cycle σ est homologue à l'image du lacet $\sigma_1 \dots \sigma_k$.

Montrons maintenant que le noyau de ϕ est exactement l'ensemble des commutateurs

$$[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Tout d'abord, comme $H_1(X;\mathbb{Z})$ est abélien, ϕ se factorise par celui-ci, pour donner un morphisme surjectif

$$\phi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} \to H_1(X;\mathbb{Z})$$

que nous noterons $\widetilde{\phi}$. Nous allons construire un morphisme $\widetilde{\psi}$ dans l'autre sens tel que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi} = \mathrm{Id}$, ce qui impliquera que $\widetilde{\phi}$ est injectif. On utilisera la notation additive pour les éléments de $\phi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$.

On conserve la notation ℓ_x introduite ci-dessus. Par propriété universelle des produits abéliens libres, l'application qui à tout 1-simplexe singulier σ associe la classe dans $\pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$ du lacet $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$ s'étend en un morphisme de groupes

$$\psi : C_1(X;\mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}.$$

Faisons quelques remarques à propos de ce morphisme :

(a) Puisque nous avons choisi ℓ_{x_0} constant, un lacet en x_0 est envoyé exactement sur sa classe dans $\pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$.

(b) Pour tout σ, nous avons

$$\psi(\bar{\sigma}) = -\psi(\sigma).$$

En effet, la classe du lacet $\ell_{\sigma(1)}\bar{\sigma}\overline{\ell_{\sigma(0)}}$ est l'inverse de la classe de ce lacet parcouru dans l'autre sens, à savoir $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$.

(c) Pour tous les 1-simplexes singuliers σ, τ tels que $\sigma(1) = \tau(0)$, l'image de $\sigma\tau$ est la classe de

$$\ell_{\sigma(0)}\sigma\tau\overline{\ell_{\tau(1)}},$$

qui est homotope à la concaténation

$$\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}\ell_{\tau(0)}\tau\overline{\ell_{\tau(1)}},$$

de sorte qu'on a $\psi(\sigma\tau) = \psi(\sigma) + \psi(\tau)$.

Revenons à la démonstration. Nous devons montrer que ψ passe au quotient par l'image de l'application de bord ∂. Soit donc $c : \Delta^2 \to X$ un 2-simplexe. Alors son bord est

$$\partial c = c \circ T_{(e_1,e_2)} - c \circ T_{(e_0,e_2)} + c \circ T_{(e_0,e_1)}.$$

D'après les remarques (b) et (c), l'image de ∂c par ψ est égale à celle du lacet

$$c \circ T_{(e_1,e_2)} \overline{c \circ T_{(e_0,e_2)}} c \circ T_{(e_0,e_1)}$$

Puisque Δ^2 se rétracte par déformation sur e_1, ce lacet est homotope au lacet constant égal à $c(e_1)$, et l'image de ce lacet par ψ est triviale. Finalement, ψ induit donc un morphisme

$$\widetilde{\psi} : H_1(X;\mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}.$$

D'autre part, d'après la remarque (a), nous avons bien $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi} = \mathrm{Id}$.

Exercice 8. Applications de paires

Notons H l'homotopie entre f et g et H_A sa restriction à $A \times [0,1]$ qui est donc par définition une homotopie entre f_A et g_A, les restrictions à A de f et g respectivement. En cours, (prop 6.9) on montre que les applications

$$C_*(f), C_*(g) : C_*(X) \to C_*(Y)$$

sont homotopes, par une homotopie qui par construction se restreint en une homotopie entre

$$C_*(f_A), C_*(g_A) : C_*(A) \to C_*(B).$$

On obtient donc par passage au quotient, une homotopie entre

$$C_*(f), C_*(g) : C_*(X, A) \to C_*(Y, B)$$

de telle sorte que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*(A) \otimes I_* \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X) \otimes I_* \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X,A) \otimes I_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(B) \otimes I_* \arrow[r] & C_*(Y) \otimes I_* \arrow[r] & C_*(Y,B) \otimes I_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ce qui donne le résultat.