

Corrigé du TD9 : Homologie singulière II

Exercice 1. Calculs d'homologie

- On voit la bouteille de Klein K comme le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ avec les identifications usuelles du bord. On a alors un recouvrement $\{U, V\}$ avec $U =]0, 1[\times]0, 1[$ et V est le complémentaire du point $(1/2, 1/2)$. On voit que U est contractile, V a le même type d'homotopie que l'image du bord de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans K , à savoir un bouquet de deux cercles, $H_1(V, R)$ est abélien libre à deux générateurs a, b et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle c . De plus, l'application $H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$ envoie c sur $2a$. On applique alors la suite exacte de Mayer-Vietoris à ce recouvrement et on obtient l'homologie à coefficients dans un anneau R , on obtient $H_0(K, R) = R$, $H_1(K, R) = R \oplus R/2R$, $H_2(K, R) = \{x \in R, 2x = 0\}$ et $H_k(K, R) = 0$ pour $k \geq 3$. En particulier, si $R = \mathbb{Z}$, on obtient : $H_0(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_k = 0$ pour $k \geq 2$.
- On va utiliser Mayer-Vietoris pour l'espace \mathbb{R}^3 , en prenant pour U un tore plein qui se rétracte par déformation sur un cercle \mathbb{S}^1 , et pour $V = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$. Alors $U \cap V$ se rétracte par déformation sur un tore $T \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dont l'homologie a été calculée dans l'exercice 6 du TD 8.
Par Mayer-Vietoris, on obtient directement $H_i(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1) = 0$ pour $i \geq 3$. Ensuite, en petit degré, \mathbb{R}^3 étant contractile, on obtient des isomorphismes

$$H_2(T) \simeq H_2(\mathbb{S}^1) \oplus H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1)$$

et

$$H_1(T) \simeq H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1).$$

Le premier donne $H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1) \simeq H_2(T) = \mathbb{Z}$. Pour le deuxième on obtient

$$\mathbb{Z} \oplus H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

Ainsi, $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1)$ est un groupe abélien de type fini sans torsion, donc isomorphe à \mathbb{Z} .

Exercice 2. Homologie de la surface de genre g .

- La sphère trouée $X_g = \mathbb{S}^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{2g} D_i^2$ est homotope à un bouquet de $2g - 1$ cercles. En effet, par projection stéréographique, la sphère privée du disque D_{2g} est homéomorphe à un disque dans le plan (théorème de Jordan). Puis, si on enlève $2g - 1$ disques ouverts, on peut raisonner comme suite : sur chaque bord ∂D_i^2 , choisissons deux points distincts A_i, B_i . On trace ensuite un chemin part de A_1 , parcourt le demi-cercle ∂D_1 pour arriver B_1 puis va à A_2 , parcourt le demi-cercle ∂D_2 pour arriver à B_2 puis relie ce dernier à A_3 et ainsi de suite jusqu'à arriver à B_{2g} qu'on relie à A_1 . On le fin de de telle manière à ce que le chemin obtenue ne s'entrecroise pas et soit donc un lacet. Il délimite deux parties dans X_g toutes les deux contractiles et on voit alors qu'en les contractant sur leur bord commun, X_g est homotopique à un bouquet de cercles, voir Figure 1. On obtient alors $H_0(X_g) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(X_g) \simeq \mathbb{Z}^{2g-1}$ et $H_i(X_g) = 0$ pour tout $i \geq 2$. L'application $\mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}$ induite au niveau des H_0 par l'inclusion $\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g$ est $(a_i)_i \mapsto \sum_i a_i$. Si on oriente tous les petits cercles dans le même sens sur la sphère, l'application induite en H_1 est $\mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g-1}$, qui envoie l'élément de base a_i vers a_i pour $i < 2g$, et envoie e_{2g} vers $-\sum_{i=1}^{2g-1} e_i$.
- On a vu comment calculer S_g à partir de la description donnée dans la question en utilisant avec un découpage U et V comme suit : U est un disque, V se déforme sur un bouquet de cercles et l'intersection se déforme sur un cercle, voir le support écrit. On va cependant présenter une autre méthode qui utilise la question précédente et qui repose sur le fait que la surface S_g peut être aussi vue comme la sphère trouée X_g à laquelle on a rattaché g anses sur les bords des g -paires de disques enlevés. On utilise Mayer-Vietoris avec $U = X_g$ et V l'union de g cylindres qu'on recolle chacun sur deux des trous de

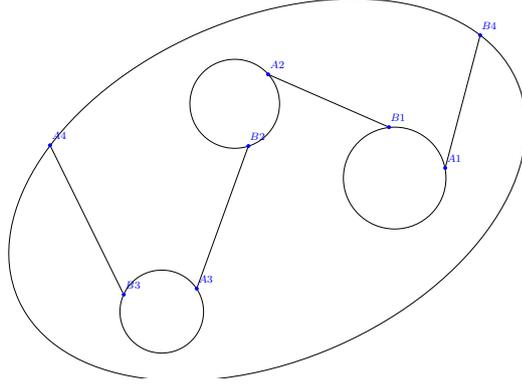


FIGURE 1 – La surface X_4 , image d'artiste.

X_g . Pour fixer les idées, disons que le i -ème cylindre C_i est recollé sur ∂D_i^2 et ∂D_{i+g}^2 , pour tout i . Alors $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $\sqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2$, d'où : $H_k(S_g) = 0$ pour tout $k \geq 3$, et ensuite, en notant e_i les générateurs des $H_1(\partial D_i^2)$ et f_i les générateurs des $H_1(C_i)$, qu'on oriente par exemple comme les e_1, \dots, e_g :

$$0 \rightarrow H_2(S_g) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}e_i \xrightarrow{\alpha} H_1(X_g) \oplus \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}f_i \rightarrow H_1(S_g) \rightarrow H_0(U \cap V) \xrightarrow{\beta} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

Tout d'abord, la flèche α est donnée par

$$e_i \mapsto \begin{cases} (e_i, f_i) & \text{si } i \leq g \\ (e_i, -f_{i-g}) & \text{si } g+1 \leq i \leq 2g-1 \\ (-e_1 - \dots - e_{2g-1}, -f_g) & \text{si } i = 2g \end{cases}$$

Ainsi, le noyau de α est engendré par le vecteur $e_1 + \dots + e_{2g}$, donc est isomorphe à \mathbb{Z} , d'où on conclut que $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$.

L'image de α est engendrée par les vecteurs

$$(e_1, f_1), \dots, (e_g, f_g), (e_{g+1}, f_1), \dots, (e_{2g-1}, f_{g-1})$$

qui sont linéairement indépendants, et le quotient de $H_1(X_g) \oplus \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}f_i$ par $\text{im } \alpha$ est isomorphe à \mathbb{Z}^g . D'autre part, $H_0(U \cap V) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}[\partial D_i^2]$ est engendré par les classes de ses $2g$ composantes connexes, et l'application β est donnée en envoyant chaque composante sur 1 dans $H_0(U)$ puisque U est connexe par arcs, et sur la composante de $H_0(V) = \bigoplus_{i=1}^g [C_i]$ correspondant au cylindre qui la contient. On obtient donc

$$[\partial D_i^2] \mapsto (1, [C_{i \bmod g}])$$

pour tout i . Le noyau de cette application est donc $\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}([\partial D_i^2] - [\partial D_{i+g}^2])$. Ainsi, nous avons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^g \rightarrow H_1(S_g) \rightarrow \mathbb{Z}^g \rightarrow 0,$$

qui est scindée car tous les groupes qu'elle contient sont abéliens, donc $H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$.

3. (a) On suppose $n \geq 1$. Enlever un point dans S_g correspond à enlever la 2-cellule dans la décomposition cellulaire de S_g , donc on se retrouve avec un bouquet de $2g$ cercles. De plus, chaque point supplémentaire correspond à rajouter une diagonale, donc un cercle au bouquet. Ainsi, $S_g \setminus X$ est homotope à un bouquet de $(2g+n-1)$ cercles, et on a donc $H_0(S_g \setminus X) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(S_g \setminus X) \simeq \mathbb{Z}^{2g+n-1}$ et $H_i(S_g \setminus X) = 0$ pour tout $i \geq 2$.
- (b) En reliant y_1 à y_2 , y_2 à y_3 et ainsi de suite, par des segments à l'extérieur de S_g , on obtient un nouveau espace topologique \tilde{S}_g et on a montré (voir fichier dropbox) que l'inclusion de ces segments

est une cofibration, donc en les contractant on préserve le type d'homotopie et on fait l'espace topologique qu'on obtient est juste S_g/Y . En travaillant un peu plus, on peut montrer que \tilde{S}_g a le même type d'homotopie qu'un bouquet $S_g \vee (\bigvee^{m-1} \mathbb{S}^1)$. Sinon, en appliquant juste Mayer-Vietoris avec U égal à S_g et V l'union des segments qu'on rajoutés et d'un chemin dans S_g qui relie y_1 à y_m en passant par y_2, \dots, y_{m-1} . On obtient alors $H_0(S_g/Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(S_g/Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g+m-1}$, $H_2(S_g/Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_i(S_g/Y, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i \geq 3$.

- (c) On suppose $n \geq 1$ et $m \geq 2$, les cas complémentaires étant traités par les questions précédentes. Alors on peut faire la construction précédente en remplaçant S_g par $(S_g \setminus X)$ et on voit alors que $(S_g \setminus X)/Y$ est homotope à un bouquet de $(2g+n+m-2)$ cercles. D'où les groupes d'homologie : $H_0((S_g \setminus X)/Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1((S_g \setminus X)/Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g+m+n-2}$ et $H_i((S_g \setminus X)/Y, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Exercice 3. Degré d'une application

1. On a vu comment résoudre cette question en utilisant Mayer-Vietoris, on va ici présenter une autre méthode.

Pour tout espace topologique X , une application $f : X \rightarrow X$ induit une application

$$f \times \text{Id}_I : X \times I \rightarrow X \times I$$

qui passe au quotient en $Cf : CX \rightarrow CX$, qui est en fait même une application de paires $(Cf, f) : (CX, X) \rightarrow (CX, X)$. Elle induit donc un morphisme de complexes sur la suite exacte longue associée à la paire (Cf, f) : pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(CX) & \longrightarrow & H_{n+1}(CX, X) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(CX) \\ \downarrow (Cf)_* & & \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow (Cf)_* \\ H_{n+1}(CX) & \longrightarrow & H_{n+1}(CX, X) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(CX) \end{array}$$

Nous avons $CX/X = SX$, et par passage au quotient, l'application de paires (Cf, f) induit la suspension $f : SX \rightarrow SX$.

Remarquons ensuite que la paire (CX, X) est une bonne paire au sens de la Définition 7.11 du cours (l'ouvert U peut être choisi comme étant égal à $X \times [0, \frac{1}{2}]$). Il résulte alors du théorème 7.16 du cours l'isomorphisme $H_{n+1}(CX, X) \simeq H_{n+1}(SX)$, d'où un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(SX) & \xrightarrow{\sim} & H_n(X) \\ \downarrow (Sf)_* & & \downarrow f_* \\ H_{n+1}(SX) & \xrightarrow{\sim} & H_n(X) \end{array}$$

Ainsi, notant δ l'isomorphisme dans les lignes de ce carré, nous avons

$$(Sf)_* = \delta^{-1} f_* \delta.$$

Dans le cas où $X = \mathbb{S}^n$, cela implique que $\text{deg } Sf = \text{deg } f$.

2. Le morphisme en question s'appelle le *morphisme d'Hurewicz* et peut être défini pour tout espace topologique X connexe par arcs de deux manières : la première en voyant la sphère comme union de deux simplexes Δ^1 et Δ^2 (hémisphères nord et sud), puis on associe à toute application continue $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ la chaîne singulière $\phi_{\Delta^1} + \phi_{\Delta^2}$ qui est automatiquement un bord et définit donc une classe d'homologie. Ce morphisme passe au quotient et induit un morphisme de $\pi_n(X)$ vers $H_n(X, \mathbb{Z})$. Pour voir que c'est un morphisme de groupes, on peut utiliser la description de l'addition dans $\pi_n(X)$ donnée par l'exercice 2 du TD 6. LA deuxième manière est la suivante : si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ application continue, l'image de $f \in \pi_n(X)$ dans $H_n(X, \mathbb{Z})$ est $f_*([\mathbb{S}^n])$ où $[\mathbb{S}^n]$ est une *classe fondamentale* : i.e., un générateur de $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$. Remarquons alors que l'application $\text{Id} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ est de degré 1. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et la suspension de Id_n est égale à Id_{n+1} , donc on peut conclure par la question précédente. Par ailleurs, cette application peut être vue comme un élément de $\pi_n(\mathbb{S}^n)$. Son image est donc un générateur de $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$, d'où la surjectivité.

3. Si f n'est pas surjective alors son image contractile, donc nulle homotopiquement ce qui contredit l'hypothèse sur le degré. La réciproque est fautive comme on le voit en sommant une application de degré 1 et une application de degré -1 .
4. On rappelle (Feuille 2, Exercice 1 question 6) que si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ est sans point fixe, alors f est homotope à l'application antipodale. Or l'application antipodale

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, \dots, -x_n)$$

est la composée de $(n + 1)$ réflexions

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Une telle réflexion est de degré -1 (on peut le voir par récurrence en utilisant la question 1), donc $\deg f = (-1)^{n+1}$.

5. **Groupe agissant librement** On rappelle que G agit librement sur un espace X signifie que pour tout $g \in G$ différent de 1, g agit par un homéomorphisme sans point fixe. Soient g, g' deux éléments non-triviaux de G . Puisque G agit librement, g et g' induisent des homéomorphismes $g, g' : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ sans points fixes. Ainsi, par la question précédente, $\deg g = \deg g' = -1$. Mais alors $\deg(g \circ (g')^{-1}) = 1$, et encore par la question précédente, l'homéomorphisme $g \circ (g')^{-1}$ doit avoir un point fixe. Puisque G agit librement, cela veut dire que le produit gg'^{-1} est égal à l'élément neutre 1, c'est-à-dire que $g = g'$. Ainsi, nous avons montré que G avait un seul élément non-trivial, donc $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

6. Champs de vecteurs.

- (a) Sur \mathbb{S}^1 , on observe que le champ de vecteurs $v(x, y) = (-y, x)$ fonctionne. Ceci se généralise sans problème à toute sphère de dimension impaire $n = 2k - 1$:

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

- (b) Soit $x \mapsto v(x)$ un tel champ de vecteurs, qui ne s'annule pas. Alors quitte à le diviser par la norme $\|v(x)\|$, on peut de plus supposer que pour tout x , $v(x)$ est unitaire. On définit alors l'application

$$H(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x).$$

Pour tout t et pour tout x , $H(x, t)$ est bien un point de \mathbb{S}^n puisque $v(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x . On obtient ainsi homotopie entre l'identité et l'application antipodale. Or cette dernière est de degré $(-1)^{n+1} = -1$ puisque n est impair. Contradiction.

7. **Perron-Frobenius** Notons Δ^{n-1} le simplexe standard de \mathbb{R}^n , alors A induit une application continue

$$\tilde{A} : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^{n-1}$$

qui à un élément $x \in \Delta^{n-1}$, l'élément $A.x/s(A.x)$ où $s(y) = y_1 \cdots + y_n$. Le simplexe Δ^{n-1} est topologiquement une boule fermée de dimension $n - 1$ et on va montrer que toute application continue $f : B^r \rightarrow B^r$ admet un point fixe. Sinon, pour tout point x , la demi-droite $[x, f(x))$ intersecte le bord de la boule en un point et on construit ainsi une application $\mathbb{S}^{r-1} \rightarrow \mathbb{S}^{r-1}$ homotopiquement triviale (donc de degré nul!) et sans point fixe. Ceci contredit la question 4.

Exercice 4. Produit de sphères

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On va calculer les groupes d'homologie du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$. Ce calcul peut se faire par diverses récurrences. On exclut le cas où n ou m est nul, dans lequel on obtient simplement l'union disjointe de deux sphères, dont l'homologie est connue. Ainsi, nous aurons affaire à des espaces connexes par arcs, et nous ne nous occuperons pas du H_0 .

Etape 1 : Calcul dans le cas où $n = 1$ ou $m = 1$. On connaît déjà l'homologie du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Pour calculer celle de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, on utilise le recouvrement de \mathbb{S}^2 par les ouverts contractiles D_+^2 et D_-^2 obtenus en retirant à \mathbb{S}^2 respectivement son pôle sud et son pôle nord. L'intersection $D_+^2 \cap D_-^2$ se rétracte par déformation sur l'équateur, c'est-à-dire \mathbb{S}^1 . Ainsi, Mayer-Vietoris pour les groupes d'homologie réduits avec le recouvrement par les deux ouverts $\mathbb{S}^1 \times D_+^2$ et $\mathbb{S}^1 \times D_-^2$ homotopes à \mathbb{S}^1 nous donne un isomorphisme

$$H_3(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \simeq H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$$

ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$

Il faut déterminer le morphisme $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ du milieu, donné par $(i_{+,*}, -i_{-,*})$, où $i_+ : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times D_+^2$ et $i_- : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times D_-^2$ sont les deux inclusions. On voit que par ces inclusions, le premier générateur de $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ est envoyé sur un générateur de $H_1(\mathbb{S}^1)$, alors que le deuxième est envoyé sur 0. Le morphisme cherché est donc donné par

$$(a, b) \mapsto (a, -a).$$

Son noyau comme son image sont par conséquent isomorphes à \mathbb{Z} , et on obtient

$$H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}.$$

On suppose maintenant par récurrence qu'on a montré que, pour un $n \geq 2$, $H_k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ pour $k \in \{0, 1, n, n+1\}$, et 0 sinon.

On procède par un découpage similaire de \mathbb{S}^{n+1} en deux ouverts D_+ et D_- dont l'intersection se rétracte par déformation sur \mathbb{S}^n . En appliquant Mayer-Vietoris (en homologie réduite), nous avons pour tout $k \geq 2$

$$H_{k+1}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}) \simeq H_k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n)$$

ainsi que

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1) \oplus H_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}) \rightarrow 0$$

Cette fois-ci, le morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ au milieu est donné par $a \mapsto (a, -a)$, et est donc injectif d'image \mathbb{Z} . Nous avons donc bien $H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}) = 0$ et $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+1}) = \mathbb{Z}$.

Etape 2 : On suppose $n \geq m \geq 2$ et on fait une récurrence sur $n+m$. On suppose que pour $n+m = N$ fixé, nous savons que

- si $n \neq m$, alors $H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$ pour $k \in \{0, n, m, n+m\}$ et 0 sinon.
- $H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ pour $k \in \{0, 2n\}$, \mathbb{Z}^2 pour $k = n$ et 0 sinon.

Soient $n > m \geq 2$. En découpant \mathbb{S}^m en deux ouverts contractiles comme précédemment, pour tout k , nous avons la suite exacte

$$H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-1}) \rightarrow H_k(\mathbb{S}^n) \oplus H_k(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n)$$

Pour $k \neq n, n+1$, cela nous donne directement un isomorphisme

$$H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \simeq \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-1})$$

qui nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Pour $k = n+1$, nous obtenons, puisque $n \neq m$, une suite exacte

$$0 \rightarrow H_{n+1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-1}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \rightarrow 0$$

Le morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ du milieu, comme précédemment, est donné par $a \mapsto (a, -a)$, et donc $H_{n+1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) = 0$ et $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$.

Reste à traiter le cas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$. Une nouvelle application de Mayer-Vietoris donne la suite exacte

$$H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_k(\mathbb{S}^n) \oplus H_k(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n) \oplus \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^n)$$

Le cas $k \neq n, n+1$ se traite comme ci-dessus. Pour $k = n+1$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H_{n+1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Le morphisme $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n)$ est encore une fois $a \mapsto (a, -a)$. Cela nous donne l'annulation de $H_{n+1}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n)$, ainsi qu'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

d'où $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}^2$.

Exercice 5. Homologie de quelques espaces « pathologiques »

1. Pour la droite à deux origines D , obtenue en recollant deux copies de \mathbb{R} suivant \mathbb{R}^* , on prend pour ouverts les images U et V des deux copies de \mathbb{R} . Alors U et V sont contractiles et $U \cap V$ est homotope à deux points. On obtient donc par Mayer-Vietoris en homologie réduite : $H_i(D) = 0$ pour $i \geq 2$, et

$$0 \rightarrow H_1(D) \rightarrow \tilde{H}_0(U \cap V) \rightarrow 0$$

de sorte que $H_1(D) = \mathbb{Z}$. Enfin, $H_0(D) = \mathbb{Z}$.

Pour la droite à n origines D_n , obtenue en recollant n copies de \mathbb{R} suivant \mathbb{R}^* , on procède par récurrence en prenant pour U l'image de $(n-1)$ copies de \mathbb{R} et pour V l'image de la copie de \mathbb{R} restante. On suppose par hypothèse de récurrence que

$$H_1(U) = \mathbb{Z}^{n-1} \quad \text{et} \quad H_i(U) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 2.$$

On a de nouveau $U \cap V = \mathbb{R}^*$ homotope à deux points. On écrit donc la suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie réduite :

$$0 \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(D_n) \rightarrow \tilde{H}_0(U \cap V) \rightarrow 0$$

Autrement dit, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow H_1(D_n) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

qui est scindée car \mathbb{Z} est abélien libre (cf feuille 6 exercice 3). Donc $H_1(D_n) = \mathbb{Z}^n$. Enfin, on a $H_i(D_n) = 0$ pour $i \geq 2$, et $H_0(D_n) = \mathbb{Z}$.

2. Cet espace Γ a deux composantes connexes par arcs contractiles : le segment $\{0\} \times [-1; 1]$ ainsi que le graphe de la fonction, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ via la projection sur l'axe des abscisses. On a donc $H_i(\Gamma) = 0$ pour $i \geq 1$ et $H_0(\Gamma) = \mathbb{Z}^2$.

Exercice 6. Cônes et équivalences d'homologie

1. Immédiat.
2. La première flèche est l'inclusion de D_* dans le second facteur et la deuxième est la projection sur le premier facteur.
3. Utiliser la description explicite du connectant.
4. Immédiat par la suite exacte longue en homologie.
5. Utiliser les composantes de l'homotopie pour construire des inverses homotopiques à gauche et à droite.