THÉORIE SPECTRALE ET FORMES AUTOMORPHES

par

Mathieu Cossutta

Sous la direction de Michael Harris

Table des matières

Cet exposé est une introduction à la notion de représentation automorphe et des propriétés analytiques de leurs fonctions L associées.

1. Le demi-plan de Poincaré et la théorie spectrale du laplacien

1.1. Théorie élémentaire des opérateurs auto-adjoints. — Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert. Un opérateur de $\mathbf{H}$ est la donnée d'un couple $(A, D(A))$, où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel dense de $\mathbf{H}$, et A une application linéaire de $D(A)$ dans $\mathbf{H}$. Un opérateur A est dit non borné s'il n'est pas continu comme application de $D(A)$ dans $\mathbf{H}$. On dit que $A \subset B$ si $D(A) \subset D(B)$ et si pour tout $f \in D(A)$ $Af = Bf$. Soit $(A, D(A))$ un opérateur de $\mathbf{H}$. Nous définissons l'adjoint $(A^*, D(A^*))$ de A. Soit $D(A^*)$ l'espace des $g \in \mathbf{H}$ tels que l'application $f \mapsto \langle Af, g\rangle$ est continue. Alors d'après le théorème de Riesz si $g \in D(A^*)$ il existe un unique vecteur $A^*g \in \mathbf{H}$ tel que pour tout $f \in D(A)$ $\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle$. $(D(A^*), A^*)$ est appelé l'adjoint de A. A est dit auto-adjoint si $D(A^*) = D(A)$ et $A^* = A$. La théorie des opérateurs auto-adjoints est bien connue. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, le nombre complexe λ est dit régulier si, l'application $f \mapsto (A - \lambda)f$ de $D(A) \to \mathbf{H}$ est une bijection d'inverse continue. On appelle spectre de A, noté $\sigma(A)$, l'ensemble des nombres complexes qui ne sont pas réguliers. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ et est fermé.

Exemple : Sur $L^2(\mathbb{R})$, $i\frac{d}{dt}$ est un opérateur auto-adjoint de domaine les fonctions L^2 de dérivée (au sens des distributions) L^2. Son spectre est égal à $\mathbb{R}$, cependant $i\frac{d}{dt}$ n'a pas de vecteur propre. On dit que le spectre est continu.

On appelle spectre discret par rapport à A le sous-espace fermé de $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}_{d,A} = \overline{\oplus_{\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda(A)}$$

Exemple : Sur $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $i\frac{\partial}{\partial x}$ a pour spectre discret l'espace tout entier.

Dans les deux exemples l'opérateur auto-adjoint de dérivation suffit à étudier l'espace considéré. Cependant il est généralement difficile de construire des opérateurs auto-adjoints c'est pourquoi la proposition suivante est très utile. Un opérateur A est dit positif si pour tout $f \in D(A)$ $< Af, f > \geq 0$.

Proposition 1.1. — [**Bump**] *Supposons $A \subset A^*$ (cette propriété est appelée symétrie) et A positif. Alors A admet une extension auto-adjointe (non nécessairement unique).*

1.2. Le demi-plan de Poincaré. — Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{im} z > 0\}$. $\mathcal{H}$ est appelé le demi-plan de Poincaré. Notons $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Et pour $y \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}/2i\pi\mathbb{Z}$:

$$a(y) = \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix},\ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

G agit sur $\mathcal{H} \cup P^1(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On pose : $j(g,z) = cz+d$, alors :

$$j(gg',z) = j(g',z)j(g,g'z) \text{ et } \mathrm{im} g\cdot z = \frac{\mathrm{im} z}{|j(g,z)|^2}$$

L'action de G est transitive sur $\mathcal{H}$, en effet :

$$n(x)a(y).i = x+iy$$

Le stabilisateur de i noté K est un sous-groupe compact maximal de G formé des matrices $r(\theta)$.

Ainsi si $g\in G$, g admet une décompositon unique de la forme :

$$g = a(y)n(x)r(\theta) \text{ avec } y>0, x\in\mathbb{R} \text{ et } \theta\in\mathbb{R}/2i\pi\mathbb{Z}$$

Il existe sur $\mathcal{H}$ une unique mesure non nulle (à multiplication par un nombre réel non nul près) invariante sous l'action de G. C'est la mesure $\frac{dxdy}{y^2}$. Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Exemple : On définit le sous-groupe dit de congruence :

$$\Gamma(N) = \left\{ g\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ g\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ [N] \right\}$$

Un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est dit arithmétique s'il contient un sous-groupe de congruence. Les groupes arithmétiques sont des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Γ agit proprement discontinuement sur $\mathcal{H}$; on a donc une notion de surface de Riemmann quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ et une notion de mesure quotient de la mesure $\frac{dxdy}{y^2}$. Nous supposons dans la suite que la matrice $n(1)\in\mathcal{H}$ et que $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est de volume fini. Dans ce cas $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ ne peut pas être compact.

Remarque : Si Γ est de volume fini et non-compact alors il existe $g\in G$ tel que $g\Gamma g^{-1}$ vérifie cette propriété. Cependant notre étude est restrictive, par exemple définissons :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a+d\sqrt{7} & -c+b\sqrt{7} \\ c+b\sqrt{7} & a-d\sqrt{7} \end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{Z} \text{ et } a^2-7b^2+c^2-7d^2=1 \right\}$$

alors $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est compact.

Le stabilisateur de $+\infty$ est noté B et est appelé le Borélien de G. Un élément de G, est dit parabolique s'il est conjugué dans G a un élément de B non central. On appelle pointe ("cusp" en anglais) de Γ une orbite sous l'action de Γ de $P^1(\mathbb{R})$. Les pointes sont en nombre fini, en bijection avec $\Gamma\backslash G/B$ et avec les classes de conjuguaisons paraboliques de Γ.

Exemple : Soit p un nombre premier le groupe arithmétique :

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{Z} \text{ et } p|c \right\}$$

a deux cusps 0 et $+\infty$ ([**Shimura**]).

Pour toute cusp a de Γ, on choisit un représentant $\sigma_a\in\Gamma\backslash G/B$ de a tel que $n(1)\in\sigma_a^{-1}\Gamma\sigma_a$.

1.3. Différents espaces attachés à $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. — Soit $k \in \mathbb{Z}$. On considère classiquement l'espace $M'_k(\Gamma)$ constitué des fonctions mesurables telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$ $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$. Définissons pour tout $g \in G$:

$$f_{|kg} = \left[\frac{\overline{j(g,z)}}{|j(g,z)|}\right]^k f(gz)$$

Soit $M_k(\Gamma)$ l'espace de fonctions formé des fonctions mesurables telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$ $f_{|k\gamma} = f$. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} M'_k(\Gamma) & \rightarrow & M_k(\Gamma) \\ f & \mapsto & \mathrm{im}(z)^{\frac{k}{2}} f(z) \end{array}$$

est une bijection. On remarque que si $f, g \in M_k(\Gamma)$ alors $f\overline{g}$ est invariant par Γ ; cela permet d'introduire l'espace de fonctions :

$$L^2_k(\Gamma) = \left\{ f \in M_k(\Gamma),\ \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} |f(z)|^2 dz < +\infty \right\}$$

$L^2_k(\Gamma)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire : $(f,g) = \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(z)\overline{g(z)}dz$. Enfin l'opérateur différentiel $\Delta_k = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + iky\frac{\partial}{\partial x}$ vérifie si f est C^∞, $\Delta_k f_{|k\gamma} = (\Delta_k f)_{|k\gamma}$. En particulier Δ_k stabilise $L^2_k(\Gamma) \cap C^\infty_0(\mathcal{H})$.

Proposition 1.2. — **[Bump]**,**[Iwaniec]** $(\Delta_k, C^\infty_0(\mathcal{H}) \cap L^2_k(\Gamma))$ *est un opérateur symétrique non borné de* $L^2_k(\Gamma)$ *et admet un prolongement auto-adjoint.*

Si $k = 0$, on montre que Δ_0 est positif il suffit donc d'appliquer la proposition 1.1. ⊠

Dans la théorie spéctrale de la dérivation dans $L^2(\mathbb{R})$, on doit introduire les vecteurs propres e^{itx} qui ne sont pas de carré intégrable. De façon analogue, Δ_k n'a pas assez de solutions dans $L^2_k(\Gamma)$. Pour remédier à ce problème, nous introduisons la notion de forme automporphe. On appelle forme automorphe de poids k de paramètre s une fonction f de $\mathcal{H}$ telle que :

1. f est C^∞
2. f est dans $M_k(\Gamma)$
3. $\Delta_k f = s(1-s)f$
4. Pour toute pointe a de Γ il existe un entier N tel que :

$$f(z) = O(\mathrm{im}(\sigma_a^{-1}z)^N) \text{ si } z \rightarrow a$$

La condition de croissance, appelée croissance modérée assure que :

Proposition 1.3. — **[HC]** *L'espace des formes automorphes de poids k et de paramètre s est de dimension finie.*

Une forme automorphe n'est pas toujours de carré intégrable. On dit de plus que f est cuspidale si pour toute pointe a de Γ et tout entier $N \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = O(\mathrm{im}(\sigma_a^{-1}z)^{-N}) \text{ si } z \rightarrow a$$

On note C l'espace engendré par les formes automorphes cuspidales de poids k on a : $C \subset L^2_k(\Gamma)$.

Exemple :

1. Pour $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$:

$$\Delta = y^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi z} \prod_1^{\infty} (1 - e^{2i\pi n z}) = y^{\frac{k}{2}} \sum_{n \geq 1} \tau(n) e^{2i\pi n z}$$

   est une forme cuspidale de poids k et de paramètre $\frac{k}{2}$ ([**Serre**]). $\tau(n)$ est la fonction de Ramanujan.

2. Plus généralement si $f = \sum_{n \geq 1} a_n y^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n z}$ est une forme automorphe cuspidale de poids k et de paramètre $\frac{k}{2}$. Définissons la fonction :

$$\Lambda(s) = \Gamma(s)(2\pi)^s \sum_n \frac{a_n}{n^s}$$

   $\lambda(s)$ est appelée la fonction L complétée de f. $\lambda(s)$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe. En effet :

$$\Lambda(s) = \int_0^{\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y}$$

Les formes automorphes les plus importantes du point de vue de la théorie spectrale de Δ_k sont les séries d'Eisenstein définies par :

$$E_{k,a}(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s_{|k\sigma_a^{-1}\gamma}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s j(\sigma_a^{-1}\gamma, z)^{-k} |j(\sigma_a^{-1}\gamma, z)|^{-2s+k}$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et définit une famille de formes automorphes de poids k et de paramètre s de carré en général non intégrable. Les séries d'Eisenstein permettent de comprendre la décompositon spectrale du Laplacien.

Proposition 1.4. — [**Iwaniec**]

– *Les séries d'Eisenstein admettent un prolongement méromorphe au plan complexe, holomorphe sur la droite verticale d'équation Re$(s) = \frac{1}{2}$. De plus, pour $\frac{1}{2} \leq$ Re$(s) \leq 1$, les résidus en s des séries d'Eisenstein sont des formes automorphes de carré intégrable. Notons R le sous-espace du spectre discret de Δ_k engendré par ces formes.*
– *$C \oplus R$ est le spectre discret du Laplacien de poids k. De plus il existe des fonctions $\widehat{f_a}(t)$ tel que tout élément f de l'orthogonal de $C \oplus R$ s'écrive de manière unique :*

$$f(z) = \sum_a \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_a}(t) E_{a,k}(z, \frac{1}{2} + it) dt$$

Cette proposition n'établit pas de différence entre un groupe arithmétique ou un groupe qui ne l'est pas. C est gros quand Γ est arithmétique. De plus, dans ce cas il existe sur $\overline{C}$ une famille commutative d'opérateurs auto-adjoints compacts qui commutent à Δ (c.f [**Shimura**]). Ils sont appelés les opérateurs de Hecke. Soit $f = y^{\frac{k}{2}} \sum_{n \geq 1} a_n e^{2i\pi n z}$ une forme automorphe cuspidale de poids k, de valeur propre

$\frac{k}{2}$, telle que $a_1 = 1$. Supposons f valeur propre des opérateurs de Hecke, alors pour Re(s)»0 :

$$\Lambda(f,s) = \Gamma(s)(2\pi)^s \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}}$$

(c'est vrai sans restriction pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, il manque des hypothèses pour des sous-groupes arithmétiques plus petits).

Il y a deux problèmes majeurs dans la théorie des formes automorphes. D'un côté, il faut comprendre les propriétés analytiques des fonctions L ; les séries d'Eisenstein jouent un rôle dominant dans cette étude. De l'autre, il faut comprendre arithmétiquement la signification des fonctions L.

Exemple : Illustrons ces deux problémes.

- Probléme analytique. Soient f et g deux formes automorphes de poids k de valeur propre $\frac{k}{2}$ pour le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Définissons :

  $$L(f \times g, s) = \sum_n \frac{a_n \overline{b_n}}{n^s}$$

  Cette série admet un produit Eulerien si f et g sont propres pour les opérateurs de Hecke. De plus :

  $$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f \times g, s) = \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(z)\overline{g(z)}E_\infty(z, s-k+1)\frac{dxdy}{y^2}$$

  On obtient donc le prolongement méromorphe de cette fonction L à l'aide du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein.
- Problème arithmétique. La fonction L d'une forme automorphe de poids 2 est la fonction L d'une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$. Cela veut dire que pour presque tout premier p, a_p le $p^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f est le nombre de points de E à valeur dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ce résultat est du à Shimura. La réciproque est le théorème de Wiles qui a pour conséquence le théorème de Fermat-Wiles.

2. Unification des résultats

2.1. Quelques notions sur les représentations unitaires. — Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert. On note $O(\mathbf{H})$ l'ensemble des isomorphismes unitaires de $\mathbf{H}$. Soit G un groupe localement compact. On appelle représentation unitaire de G la donnée d'un couple $(\pi, \mathbf{H})$ où $\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert et π est un morphisme :

$$G \to O(\mathbf{H})$$

Exemple Soit dg la mesure de Haar à droite de G. Définissons pour $f \in L^2(G, dg)$ et $g \in G$ $\pi(g)f(g') = f(g'g)$. Alors $(\pi, L^2(G, dg))$ est une représentation unitaire de G.

Une représentation unitaire $(\pi, \mathbf{H})$ est dite irréductible, si elle n'admet pas de sous-espace fermé invariant autre que $\{0\}$ et $\mathbf{H}$. On dit que deux représentations $(\pi, \mathbf{H})$ et $(\pi', \mathbf{H}')$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme unitaire $I : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ tel que pour tout $f \in \mathbf{H}$ et tout $g \in G$: $I(\pi(g)f) = \pi'(g)I(f)$. Soit $\mathbf{H}$ une représentation unitaire de G. On appelle spectre discret de $\mathbf{H}$, noté $\mathbf{H}_d$ la somme des sous-espaces irréductibles de $\mathbf{H}$. Soit K un groupe compact alors :

***Thèoreme 2.1* (Peter-Weyl).** — **[Knapp]**
- *Les représentations unitaires et irréductibles de K sont de dimensions finies.*
- *Soit $(\pi, \mathbf{H})$ une représentation unitaire de K. Pour toute représentation unitaire et irréductible τ, soit $\mathbf{H}_\tau$ la somme des sous-espaces irréductibles isomorphe à τ. Alors :*
$$\mathbf{H} = \overline{\oplus^{\perp} \mathbf{H}_\tau}$$
$\mathbf{H}_\tau$ est appelé la composante τ isotypique de $\mathbf{H}$.

Remarque : Ce théorème veut essentiellement dire que toute représentation unitaire de K est égale à son spectre discret. Un vecteur $f \in \mathbf{H}$ est dit K-fini si l'espace vectoriel engendré par les éléments de $\pi(K)v$ est de dimension finie. On remarque que $\oplus \mathbf{H}_\tau$ est l'ensemble des vecteurs K-finis.

Exemple : $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est somme hilbertienne des droites $\mathbb{C}e^{2i\pi kz}$ qui sont invariantes sous l'action de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Par ailleurs il est bien connu que le spectre discret de $L^2(\mathbb{R})$ est nul.

Soit K un compact maximal de G (on suppose que cela existe) alors une représentation unitaire $(\pi, \mathbf{H})$ de G est dite admissible, si ses composantes K-isotypiques sont de dimension finie. Soit Δ un opérateur auto-adjoint de $\mathbf{H}$. Supposons Δ invariant sous l'action de G, c'est à dire que, $D(\Delta)$ est stable sous l'action de G et que pour tout $g \in G$ et pour tout $f \in \mathbf{H}_i$: $\Delta(\pi(g)f) = \pi(g)\Delta(f)$.

Proposition 2.1. — **[Bump]** *Supposons $(\pi, \mathbf{H})$ admissible. Alors :*
$$\mathbf{H}_d \subset \mathbf{H}_{d,\Delta}$$

Les auto-adjoints invariants d'une représentation unitaire π permettent d'en construire le spectre discret.

2.2. Passage au groupe. — Sur G la mesure de Haar est donné par $\frac{dydxd\theta}{y^2}$. Dans le sens où
$$\int_G f(g)dg = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f(n(x)a(y)r(\theta)) \frac{dy}{y^2} dxd\theta$$
L'opérateur différentiel $\Delta = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial\theta}$ sur $C^\infty(G)$ est invariant par translation à droite. On étudie la représentation unitaire de G d'espace $L^2(\Gamma\backslash G)$. D'après le théorème 2.1 si pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on définit l'espace :
$$L^2_k(\Gamma\backslash G) = \left\{ f \in L^2(\Gamma\backslash G),\ f(gr(\theta)) = e^{2i\pi k\theta} f(g) \right\}$$
Alors :
$$L^2(\Gamma\backslash G) = \overline{\oplus_{k\in\mathbb{Z}} L^2_k(\Gamma\backslash G)}$$
On remarque que : $\Gamma\backslash\mathcal{H} = \Gamma\backslash G/K$. Soit f une fonction de $\mathcal{H}$. Posons ϕ_f la fonction de G définie par :
$$\phi_f(a(y)n(x)r(\theta)) = e^{ik\theta} f(x+iy)$$
On montre que l'application :
$$\begin{array}{ccc} L^2_k(\Gamma) & \to & L^2_k(\Gamma\backslash G) \\ f & \mapsto & \phi_f \end{array}$$

est un isomorphisme unitaire. De plus si on suppose f régulière de poids k alors :

$$\phi_{\Delta_k f} = \Delta \phi_f$$

La theorie spectrale de Δ_k correspond à la théorie spectrale de Δ dans $L^2_k(\Gamma\backslash G)$. D'après la partie précédente $L^2_d(\Gamma\backslash G) \subset L^2_{d,\Delta}$.

Proposition 2.2. — [**Bump**] *On a :* $L^2_d(\Gamma\backslash G) = L^2_{d,\Delta}$.

Cette proposition explique l'importance du Laplacien dans la théorie spectrale de $L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$. Le passage au groupe est utile dans la mesure ou il exprime des symétries cachées des espaces $L^2_k(\Gamma)$ et permet d'utiliser toute la machinerie des représentations unitaires des groupes de Lie. On obtient par exemple le résultat suivant :

Thèoreme 2.2. — [**Knapp**] *Il y a une unique représentation irréductible de dimension finie de G qui apparait dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ c'est la représentation triviale d'espace les fonctions constantes.*

Faire agir $G(\mathbb{R})$ sur les formes automorphes permet de bien comprendre leurs propriétés analytiques. Cependant, on ne peut pas encore faire apparaître les opérateurs de Hecke de manière naturelle. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3. Adèles et groupes de congruences

3.1. Groupes algébriques et points adéliques. — On rappelle la construction des adèles de $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier. Soit $x, y \in \mathbb{Q}$. Posons $|x|_p = p^{-val_p(x)}$ et $d_p(x,y) = |x-y|_p$. On appelle $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à d_p. Il y a une unique extension de la norme $|.|_p$ à $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathbb{Z}_p$ les éléments de $\mathbb{Q}_p$ de norme plus petite que 1. $\mathbb{Z}_p$ est un anneau topologique compact. Soit S un ensemble fini de nombre premiers. Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},S} = \mathbb{R} \times \prod_{v\in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p$, muni de la topologie produit, c'est un groupe localement compact. On définit $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, les adèles de $\mathbb{Q}$, comme la limite inductive topologique des $A_{\mathbb{Q},S}$. $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ est donc un anneau topologique localement compact. D'un point de vue ensembliste :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{(x_\infty, (x_p)_p), \text{ tel que pour presque tout p } x_p \in \mathbb{Z}_p\}$$

$\mathbb{Q}$ se plonge diagonalement dans $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$. On note $\mathbb{A}^f$ les adèles x tels que $x_\infty = 1$. Les idèles de $\mathbb{Q}$ notés $\mathbb{A}^\times_{\mathbb{Q}}$ sont les éléments inversibles de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{Q}^\times$ se plonge diagonalement dans $\mathbb{A}^\times_{\mathbb{Q}}$. Soit x un idèle de $\mathbb{Q}$. On définit $|x|_{\mathbb{A}} = |x_\infty| \prod_p |x_p|_p$, cette norme est bien définie et est triviale sur $\mathbb{Q}^\times$.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. On appelle groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ un sous-groupe de $GL_n(\overline{\mathbb{Q}})$ défini par des équations polynômiales en les coefficients et l'inverse du déterminant.

Exemple :

$$G_n = Sp_n(\overline{\mathbb{Q}}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{Q}}),\ {}^t g \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On remarque que $\mathrm{Sp}_1 = \mathrm{SL}_2$. Soit $(V, (\,,\,))$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénrée. On définit :

$$0(V)(\overline{\mathbb{Q}}) = \left\{g \in \mathrm{GL}(V)(\overline{\mathbb{Q}}),\ \forall x, y \in V\ (gx, gy) = (x, y)\right\}$$

Dans toute la suite on supposera que G est un groupe du type précédent. Pour n'importe quelle $\mathbb{Q}$-algèbre R on peut définir les R-points de G comme les éléments de $GL_n(R)$ satisfaisant les équations définissant G. En particulier on peut définir $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et $G(\mathbb{Q})$ et on a un morphisme canonique de $G(\mathbb{Q})$ dans $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

Proposition 3.1. — [**Shimura**] $G(\mathbb{Q})$ *est discret dans* $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

Le groupe $G(\mathbb{A}^f)$ est totalement discontinu. Les fonctions de $G(\mathbb{A}^f) \to \mathbb{C}$ localement constantes sont donc continues. On note leur ensemble $C^\infty(G(\mathbb{A}^f))$. Le sous-ensemble de $C^\infty(G(\mathbb{A}^f))$ constitué des fonctions à support compact est noté $S(G(\mathbb{A}^f))$. On définit l'espace $C^\infty(G(\mathbb{A}))$ constitué des fonctions $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe des fonctions $\phi_{i,\infty} \in C^\infty(G(\mathbb{R}))$ et $\phi_{f,i} \in C^\infty(G(\mathbb{A}^f))$ telles que :

$$\phi(x_\infty, x_f) = \sum_i \phi_{\infty,i}(x_\infty)\phi_{f,i}(x_f)$$

$C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ est une algèbre pour la convolution et agit, de manière non nécessairement unitaire, sur $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ par :

$$\pi(\phi)f(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \phi(g)f(xg)dg$$

3.2. La notion de forme automorphe et de série d'Eisenstein. — Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G_1(\mathbb{R})$. Soit $\overline{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans $G_1(\mathbb{A}^f)$. On a :

$$\Gamma\backslash G_1(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q})\backslash G_1(\mathbb{A})/\overline{\Gamma}$$

Ainsi, comme dans la partie précédente, on ramène l'étude de $L^2(\Gamma\backslash(G_1(\mathbb{R}))$ à celle de :

$$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G_1(\mathbb{A}))$$

qui est égalemment muni de l'opérateur auto-adjoint Δ agissant sur la coordonnée réelle de $G(\mathbb{A})$. Soit K_∞ un compact maximal de $G(\mathbb{R})$ et K_p un compact maximal de $G(\mathbb{Q}_p)$. $K = K_\infty \times \prod_p K_p$ (resp. $K_f = \times \prod_p K_p$) est un sou-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ (resp. $G(\mathbb{A}^f)$).

Soit Z l'algèbre des opérateurs différentiels sur $G(\mathbb{R})$ invariant par l'action à droite et à gauche de G. Une fonction C^∞, $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ est appelée une fonction automorphe si :

1. f est K_∞-finie (analogue à de poids k)
2. Il existe un idéal de codimension finie de A tel que $I \cdot f = 0$ (analogue de vecteur propre du Laplacien)
3. Pour tout $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ et pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, $f(\gamma g) = f(g)$. f est K_f-fini (analogue de la condition invariante par un sous-groupe arithmétique)
4. f est à croissance modérée (condition de croissance technique)

Exemple : Soit χ un caractère d'ordre fini de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$. Notons si $a \in GL_n(\mathbb{A})$, $X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{A})$ les matrices :

$$m(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } n(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce sont des éléments de $G_n(\mathbb{A})$. Comme pour G_1 tout élément g appartenant à $G_n(\mathbb{A})$ admet une décomposition (non nécessairement unique) de la forme :

$$g = n(b)m(a)k$$

Soit $a(g) = |\det a|_{\mathbb{A}}$. $a(g)$ ne dépend pas du choix de la décompostion. Définissons l'espace suivant :

$$I_P^G(\chi) = \left\{ f \in C^{\infty}(G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})),\ f(n(a)m(x)g) = \chi(\det a)|\det a|_{\mathbb{A}}^{\frac{n+1}{2}} f(g) \right\}$$

Soit $\Phi \in I_P^G \chi$. On définit la série d'Eisenstein associée à Φ par :

$$E(g, s, \Phi) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \Phi(\gamma g) a(\gamma g)^s$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) >> 0$ et admet un prolongement méromorphe au plan complexe [**MoWa**]. De plus, pour $n = 1$, en choisissant Φ et χ correctement, on retrouve les séries d'Eisenstein du demi-plan de Poincaré (à l'aide du passage au groupe du paragraphe 2.2).

Remarque : Les exemples de groupes algébriques donnés sont tous de centre fini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour un groupe quelconque, dont le centre n'est pas trivial, il faut modifier (un peu) la notion de forme automorphe. Cela nous permettrait de définir la notion de formes automorphes pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$.

On peut aussi définir la notion de forme automorphe cuspidale. Ce sont les formes automorphes à décroissance rapide dans un sens adéquate. On note C l'ensemble des formes automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A})$ les éléments de C sont de carré intégrable. On appelle représentation automorphe cuspidale une sous-représentation irréductible de C. Pour tout groupe G il existe encore un analogue de la proposition 1.4 en fonction de séries d'Eisenstein, plus générale que celles définies dans l'exemple. En particulier les résidus et valeurs spéciales des séries d'Eisenstein jouent un rôle analytique très important. Cette fois-ci les opérateurs de Hecke sont clairs ce sont les $\pi(\phi)$ pour les fonctions $\phi \in S(G(\mathbb{A}_f))$ qui sont K_f-invariantes à droite et à gauche. 0n montre que les opérateurs de Hecke commutent deux à deux et sont compacts sur l'espace des fonctions cuspidales. En particulier, ils sont diagonalisables sur une représentation automorphe cuspidale π. Cette propriété permet d'associer à la représentation automoprhe π un produit Eulérien appelé fonction L, noté $L(\pi, s)$, en analogie avec le cas G_1. La fonction $L(\pi, s)$, qui est à priori convergeante pour $\mathrm{Re}(s) >> 0$, admet un prolongement méromorphe au plan complexe (c'est un théorème de Langlands).

4. Correspondance théta

La correspondance théta est un moyen (un des seuls connus) de construire explicitement des représentations automorphes cuspidales de $G_n(\mathbb{A})$. De plus c'est une construction arithmétique dans le sens où l'action des opérateurs de Hecke, sur les formes ainsi construite, est assez bien comprise.

4.1. Représentation de Weil et formule de Siegel-Weil. — Soit ψ un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Soit $(V, (.,.))$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Notons H le groupe $O(V)$. Soit $S(V(\mathbb{A})^n)$ l'espace des fonctions de constitué des $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, telles qu'il existe des fonctions $\varphi_{i,\infty} \in S(V(\mathbb{R})^n)$ et $\varphi_{f,i} \in S(V(\mathbb{A}^f)^n)$ telles que :

$$\varphi(x_\infty, x_f) = \sum_i \varphi_{\infty,i}(x_\infty)\varphi_{f,i}(x_f)$$

La représentation de Weil est une représentation de $G_n(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A})$, notée ω, unitaire d'espace $S(V(\mathbb{A})^n)$. Cette représentation est explicite, notamment :

$$\begin{aligned} \omega(g,h)\varphi(x) &= \omega(g)\varphi(h^{-1}x) \\ \omega(m(a),1)\varphi(x) &= \chi_V(\det a)a(g)^{\frac{m}{2}}\varphi(xa) \\ \omega(n(b))\varphi(x) &= \psi(\mathrm{tr}(b\mu(x)))\varphi(x) \end{aligned}$$

où χ_V est un certain caractère de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times$ dépendant uniquement de V et $\mu(x)$ est la matrice $n \times n$ d'entrées $\frac{(x_i,x_j)}{2}$. Définissons pour $\varphi \in S(V(\mathbb{A})^n)$ la fonction :

$$\theta(g,h,\varphi) = \sum_{x \in V(\mathbb{Q})^n} \omega(g)\varphi(h^{-1}x)$$

Proposition 4.1. — **[KuRa]** *Pout tout $h \in H(\mathbb{A})$ et pour tout $\varphi \in S(V(\mathbb{A})^n)$, $\theta(g,h,\varphi)$ est une forme automorphe.*

Exemple : Supposons $V \otimes \mathbb{R}$ définie postive. Soit L un réseau de $V(\mathbb{R})$ contenu dans $V(\mathbb{Q})$. Soit K l'adhérence de L^n dans $V(\mathbb{A}^f)^n$. Considérons :

$$\varphi_L(x_\infty, x_f) = e^{-\pi(x_\infty,x_\infty)}1_K(x_f)$$

Alors :

$$\theta(n(x)a(y), \varphi_L) = \sum_{x \in L^n} e^{2i\pi \mathrm{tr}((x+iy)\mu(x))}$$

On retrouve les fonctions thétas usuelles. Le fait que ces fonctions soient des formes automorphes est classique. Si V n'est pas définie positive, on peut toujours faire cette de construction et dans ce cas le résultat n'est pas vraiment classique même s'il est ancien. La formule de Siegel-Weil, objet de mon DEA, établit un lien entre ces formes automorphes et les séries d'Einsenstein du type précédent.

Proposition 4.2. — **[KuRa]** *Supposons $m = n+1$. Soit $\varphi \in S(V(\mathbb{A})^n)$. Posons $\Phi(g) = \omega(g)\varphi(0)$. Alors $\Phi \in I_P^G(\chi_V)$ est :*

$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \theta(g,h,\varphi)dh = E(g,0,\Phi_s)$$

On a donc identifié un objet analytique et un objet arithmétique. Cela ne peut qu'être utile.

Exemple : Une conséquence simple de cette formule est la formule (103) page 176 de [**Serre**]. De manière plus amusante, cette formule permet de compter des nombres de points de formes quadratiques. Par exemple soit :

$$q(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{8} x_i)^2 - x_1x_2 - x_2x_8$$

On a si $n > 0$:

$$|\{x \in Z^n | \ q(x) = n\}| = 240 \sum_{d|n} d^3$$

Références

[Bump] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge University Press, 1997

[CKM] J.Cogdell, H.H.Kim, M.R. Murty, Lectures om automorphic L functions, AMS, 2004

[HC] Harmonic analysis on semisimple Lie groups, Moscow, 1966

[Iwaniec] H. Iwaniec, Spectral methods of automorphic forms, AMS, 2002

[Knapp] A.W. Knapp, Representation theory of semisimple groups. An overview based on exeamples, Princeton University Press, 1986

[KuRa] S.S. Kudla, S. Rallis, On the Siegel-Weil formula : the first term identity, Ann. of Math.(2) 140, 1994

[MoWa] C. Moeglin, J.L. Waldspurger, Décompositions spectrales et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'Ecriture, Birkhäuser, 1994

[Serre] J.P. Serre, Cours d'arithmétique, PUF, 1970

[Shimura] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton University Press, 1994

[Waldspurger] J.-L. Waldspurger, Correpsondance de Shimura, J.Math.Pures Appl. 59, 1980

---

19 juin 2006

MATHIEU COSSUTTA