1 Introduction, points fixes et périodiques.

Il y a plusieurs contextes mathématiques que l'on peut qualifier de systèmes dynamiques. Dans tous les cas, il y a un espace X qui décrit les états possible du système, et un temps $\mathbb{T}$. On considérera les cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$.

Le cas $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. On se donne une application $\varphi : X \longrightarrow X$, et on étudie les suites définies par récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Une telle suite est déterminée par sa condition initiale x_0, on dit que c'est l'orbite du point x_0. Dit autrement, on étudie la suite des applications φ^n (φ itérée n fois), pour laquelle $x_n = \varphi^n(x_0)$. On a bien sur $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$.

Si l'application φ est inversible, on peut définir φ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la relation ci-dessus restant vérifiée. C'est le cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on considère un flot $\varphi^t(x) = \varphi(t, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ vérifiant la relation $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$. L'une des manières les plus fréquentes de définir un tel flot est de se donner un champ de vecteurs $V(x)$ sur X. Ceci a un sens si X est une variété, ou un espace $\mathbb{R}^d$. On considère alors l'équation différentielle $x'(t) = V(x(t))$. Si V est assez régulier (C^1 ou même Lipschitz), alors pour toute condition initiale x_0, il y a une et une seule solution maximale de cette équation vérifiant $x(0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ contenant 0. On peut rassembler toutes ces solutions en une application

$$\varphi : \mathbb{R} \times X \supset U \longrightarrow X$$

telle que, pour chaque $x \in X$, L'application $U_x \ni t \longmapsto \varphi(t, x)$ est la solution maximale de l'équation, où $U_x = \{t : (t, x) \in U\}$. Le domaine de définition U est un ouvert de $\mathbb{R} \times X$, et l'application φ est C^r si le champ V est C^r. On dit que le champ V est complet si $U = \mathbb{R} \times X$, c'est à dire si toutes les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$. Alors, $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$ est un flot sur X. On considérera principalement des champs complets. On rappelle quelques résultats utiles à ce propos :

Proposition 1.1. *Tout champ de vecteurs à support compact est complet. En particulier, tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.*

Si V est un champ de vecteurs, il existe une fonction f, strictement positive et lisse, telle que fV est complet.

Si x_0 est un point tel que le temps d'existence T_+ de la solution maximale est fini, alors l'image $x([0, T^+[) \subset X$ de l'orbite n'est pas relativement compacte.

Dans tous les cas, on considère donc une action du (semi)-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace X.

On parle de semi-flot lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$. Même si on considérera plus rarement ce cas, il apparaît de manière naturelle dans les cas suivants :

Dans l'études des équations aux dérivées partielles d'évolution, par exemple de type parabolique. De telles équations induisent souvent un semi-flot sur un espace X de dimension infinie.

Dans l'étude des flots, on est souvent amené à considérer des parties positivement invariantes, c'est à dire des parties $Y \subset X$ pour lesquelles $\varphi^t(Y) \subset Y$ pour tout $t \geqslant 0$ (mais pas forcément pour $t < 0$). La famille des applications $\varphi^t_{|Y}$ est alors un semi-flot. Si le flot φ^t provient d'un champ de vecteurs complet V et que Y est un ouvert de X, le champ $V_{|Y}$ est complet vers le futur, mais pas vers le passé.

Nature des orbites

On dit que x est un point fixe de l'application φ si $\varphi(x) = x$. On dit que x est un point périodique si il existe $n \geqslant 1$ tel que $\varphi^n(x) = x$. L'ensemble des entiers n pour lesquels $\varphi^n(x) = x$ est l'ensemble des multiple d'un entier $T > 0$, que l'on appelle la période minimale de x. Les points fixe sont donc les orbites périodiques dont la période minimale est égale à 1. Il existe trois types d'orbites pour une application φ :

Les orbites périodiques.

Les orbites injectives.

Les orbites préperiodiques (x n'est pas périodique, mais son orbite contient un point périodique). Si φ est inversible, toute orbite préperiodique est périodique.

Considérons maintenant le cas d'un flot engendré par un champ de vecteurs complet V de classe C^1. On dit que x est un point fixe (ou un point critique) si $V(x) = 0$, ou de manière équivalente si $\varphi^t(x) = x$ pour tout t. On dit que x est un point périodique si il existe $t > 0$ tel que $\varphi^t(x) = x$. L'ensemble des périodes est une sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, c'est donc ou bien $\mathbb{R}$ (cas d'un point fixe) ou bien $T\mathbb{Z}$ pour un réel $T > 0$, qui est appelé la période minimale de x.

Il y a trois types d'orbites pour un flot :

Les points fixes (dits aussi points singuliers).

Les orbites périodiques (de période minimale strictement positive). Si $x(t)$ est une orbite de période $T > 0$, alors la courbe x engendre un plongement du cercle $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans X. Plus précisément, en notant $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, il existe un plongement $\theta : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \longrightarrow X$ tel que $x = \pi \circ \theta$.

Les orbites injectives. Dans ce cas, l'application $t \longmapsto \varphi^t(x)$ est une immersion injective de $\mathbb{R}$ dans X. En effet, $x'(t) = V(x(t))$, et ce vecteur est non-nul pour tout t, sinon l'orbite serait un point fixe.

Dans un semi-flot, il peut aussi exister des orbites prépériodiques.

Conjugaisons Soit $\phi : X \longrightarrow X'$ une bijection. Si $\psi = \phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi$, alors ϕ envoie les orbites de φ sur les orbites de ψ. L'existence d'une telle bijection ϕ implique que les dynamiques de φ et ψ ont certaines similarités (d'autant plus si ϕ a certaines propriétés de régularité). On dit que ϕ conjugue φ et ψ.

On dit que ϕ conjugue les flots φ^t et ψ^t elle conjugue les applications φ^t et ψ^t pour tout t.

Dans le cas où X et X' sont des variétés, et où les flots φ^t et ψ^t sont engendrés par des champs de vecteurs V et W, le difféomorphisme ϕ est une conjugaison si et seulement si

$$W(\phi(x)) = d\phi_x \cdot V(x)$$

pour tout $x \in X$ (on dit que W est l'image directe de V par ϕ).

Une façon d'étudier une système dynamique est de le conjuguer à un système plus simple. C'est souvent difficile globalement, mais la question est aussi intéressante au niveau local. On verra par exemple qu'au voisinage d'un point fixe hyperbolique, un système est conjugué à son linéarisé par un homéomorphisme. En ce qui concerne les points réguliers (points non fixes) des champs de vecteurs, le problème de conjugaison locale est facile :

Proposition 1.2. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit x_0 un point régulier de V, c'est à dire que $V(x_0) \neq 0$. Il existe alors un difféomorphisme local $\phi : X \supset U \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$, où U est un ouvert contenant x_0 et U' est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, qui conjugue V à un champ de vecteurs constant V' sur U'. On peut même demander que $V' = (1, 0, \ldots, 0)$ et que $U' =]-1, 1[\times B$, où B est une boule de $\mathbb{R}^{d-1}$. On dit alors que U est une boite de flot locale de V.*

◄ Soit $f : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow X$ une application telle que $f(0) = x_0$ et $df_{x_0} \cdot \mathbb{R}^{d-1}$ est un supplémentaire de $V(x_0)$ dans $T_{x_0}M$. On considère alors l'application

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \ni (t, y) \longmapsto \varphi^t(f(y)) \in X$$

où φ est le flot de V. On a

$$d\psi_{(y,t)} \cdot (1, 0) = \partial_t \psi(y, t) = V(\psi(y, t))$$

c'est à dire que ψ conjugue le champ constant $(1, 0)$ et le champ V. On constate que

$$d\psi_{(0,0)} \cdot (s, v) = v + sV(x_0),$$

est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ dans $T_{x_0}M$, donc ψ est un difféomorphisme local. Si B est un petite boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et I un petit intervalle ouvert contenant 0, alors ψ est un difféomorphisme de $U' := B \times I$ sur son image U, qui est un ouvert de X. L'inverse $\phi : U \longrightarrow U'$ est le difféomorphisme cherché. ►

On peut obtenir un résultat un peu moins local :

Proposition 1.3. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit $x(t) : [0, T] \longrightarrow X$ un segment d'orbite injectif. Il existe alors un tube de flot contenant $x([0, T])$. Plus précisément, il existe un intervalle ouvert I contenant $[0, T]$, une boule ouverte B de $\mathbb{R}^{d-1}$, un voisinage ouvert U de $x([0, T])$ et un difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow I \times B$ qui conjugue le champ V et le champ $(1, 0)$.*

◄ On poursuit la preuve précédente. Comme $\psi(t + s, y) = \varphi^t \circ \psi(s, y)$, on a $d\psi_{(t,0)} = d\varphi^t_{x_0} \circ d\psi_{(0,0)}$, cette application linéaire est donc un isomorphisme. On peut donc supposer, en choisissant I et B comme dans l'énoncé assez petits, que ψ est un difféomorphisme local sur $I \times B$. Montrons maintenant que l'on peut, quitte à diminuer I et B, le supposer injectif. C'est alors un difféomorphisme sur son image, ce qui termine la preuve.

Si ψ n'est injectif sur aucun voisinage $I \times B$, alors il existe deux suites $(t_n, x_n) \neq (t'_n, x'_n)$telles que $\psi(t_n, x_n) = \psi(t'_n, x'_n)$ et $t_n \longrightarrow t \in [0, T], t'_n \longrightarrow t' \in [0, T]$, $x_n \longrightarrow 0$, $x'_n \longrightarrow 0$. A la limite, par injectivité de l'orbite $x_{|[0,T]}$, on obitent que $t = t'$. Comme ψ est un difféomorphisme local au voisinage de $(t, 0)$, ceci implique que les suites (t_n, x_n) et (t'_n, x'_n) sont égales après un certain rang, une contradiction. ►

Il y a plusieurs façons de faire des liens entre les systèmes à temps continu et à temps discret.

La plus évidente consiste, étant donné un flot φ^t, à considérer l'application φ^T pour un temps T donné. La dynamique du flot φ^t et celle de l'application φ^T sont fortement reliées, on en verra plusieurs exemples.

Une autre méthode pour associer une application à un flot consiste à considérer l'application de retour associée à une section de Poincaré. Cette méthode à l'avantage de diminuer la dimension.

Une section de Poincaré est une sous variété Y de X, de codimension un, transverse au champ de vecteurs, c'est à dire que $T_yX = T_yY \oplus \mathbb{R}V(y)$ pour tout $y \in Y$. Pour $y \in Y$, on dit que $z \in Y$ est le premier retour de y dans Y si il existe $T > 0$ tel que $z = \varphi^T(y)$ et $\varphi^t(y) \notin Y$ pour tout $t \in]0, T[$. On dit que z est un premier retour régulier si de plus $\varphi^t(y) \notin \bar{Y}$ pour tout $t \in]0, T[$.

Proposition 1.4. *Soit Y une section de Poincaré pour le champ V de classe C^r. L'ensemble des points de Y admettant un premier retour régulier est un ouvert Y_1 de Y, et l'application $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$ qui a chaque point de Y_1 associe son premier retour dans Y est C^r. C'est un difféomorphisme sur un ouvert Y_2 de Y.*

En général, Y_1 peut être vide. Il se peut même qu'aucun point de Y ne revienne dans Y. Toutefois, cette construction est souvent très utile. Même si ψ n'est pas une application de Y_1 dans lui-même, on peut souvent penser à ψ comme engendrant un système dynamique discret dont l'étude aide à comprendre le flot de V.

◀ Soit y un point qui admet un premier retour régulier $z = \varphi^T(y)$. Au voisinage de z, soit f une équation de Y, c'est à dire une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r telle que $df_z \neq 0$ et telle que $Y \subset f^{-1}(0)$. Pour chercher les retours dans Y des points voisins de y, on résout l'équation $g(t, x) := f \circ \varphi(t, x) = 0$ au voisinage de sa solution (T, y). On constate que $\partial_t g(T, y) = df_z \cdot V(z) \neq 0$. Il existe donc un voisinage U de y et une fonction $\tau : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r, telle que $\varphi^{\tau(x)}(x) \in Y$ pour tout $x \in U$. De plus, $\tau(x)$ est la seule solution de l'équation $g(t, x) = 0$ proche de T. L'application $\psi(x) := \varphi^{\tau(x)}(x) : U \longrightarrow Y$ est C^r, elle associe à chaque point $x \in U$ un de ses retours dans Y.

Il reste à montrer que, si U est un voisinage de y assez petit, alors c'est bien le premier retour et qu'il est régulier. Il faut donc montrer que $\varphi^t(x) \notin \bar{Y}$ pour tout $x \in U$ et tout $t \in]0, \tau(x)[$. Supposons, par contradiction, que cette propriété ne soit satisfaite sur aucun voisinage U de y. Il existe alors une suite x_n tendant vers y, et pour chaque n un temps $t_n \in]0, \tau(x_n)[$ tel que $\varphi^{t_n}(x_n) \in Y$. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que la suite t_n converge vers une limite $s \in [0, T]$, pour laquelle $\varphi^s(y) \in \bar{Y}$. Comme z est un retour régulier de y, on ne peut pas avoir $s \in]0, T[$. Si l'on a $s = T$, alors pour n grand t_n est une solution de l'équation $g(t_n, x_n) = 0$ qui est proche de T, mais différente de $\tau(x_n)$, ce qui contredit la conclusion du théorème des fonctions implicites. Une application similaire du théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, y)$ montre que 0 est localement l'unique solution de l'équation $\varphi^t(x) \in Y$. On ne peut donc pas avoir $s = 0$.

On peut renverser le temps en considérant le champ $-V$. Y est une section de Poincaré pour $-V$. Notons Y_2 l'ensemble des points de Y qui admettent un premier retour régulier pour $-V$. On montre comme ci-dessus que Y_2 est un ouvert de Y et que l'application de retour ϕ est C^r. Il est clair que z est un premier retour régulier de y pour V si et seulement si y est un premier retour régulier de z pour $-V$. On a donc $Y_2 = \psi(Y_1)$ et $\phi = \psi^{-1}$. ▶

Définition 1.5. *Soit φ une application C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x de φ est non dégénéré si le linéarisé $L = d\varphi_x$ n'admet pas 1 pour valeur propre.*

Le linéarisé L est un endomorphisme de l'espace tangent T_xX. Le système linéarisé $v_{n+1} = Lv_n$ est une approximation du système φ au voisinage du point fixe x.

Proposition 1.6. *Soit $\varphi_\mu(x) = \varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ une application C^1, que l'on voit comme une famille d'applications C^1 de X. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de φ_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de φ_μ dans U.*

◀ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $F(\mu, x) := \varphi(\mu, x) - x = 0$ (on se place dans une carte en x_0 pour écrire cette différence). L'hypothèse de non-degenerescence est en effet exactement l'inversibilité de $\partial_x F(0, x_0)$. ▶

Le cas des orbites périodiques est similaire. On dit que x est un point périodique non dégénéré de période n si c'est un point fixe non dégénéré de φ^n. Un point périodique non dégénéré de période n est isolé (parmi les points périodiques de période n) et survit à une perturbation de l'application.

Dans les cas des flots, il est utile de distinguer les cas des points fixes et le cas des orbites périodiques.

Définition 1.7. *Soit V un champ de vecteurs C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x_0 de V est non dégénéré si le linéarisé $L = dV_{x_0}$ est inversible.*

Si $X = \mathbb{R}^d$, le champ de vecteurs V est simplement une application $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, on définit alors le linéarisé par la formule $L = dV_{x_0}$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. On a alors $(d\varphi^t)_{x_0} = e^{tL}$ pour tout t, ceci explique pourquoi la valeur propre 1 dans le cas des applications correspond à la valeur propre 0 pour le champ de vecteurs. Dans le cas où X est une variété, il n'est pas clair que le linéarisé L est bien défini en tant qu'endomorphisme de T_xX (en fait, il n'est bien défini que lorsque $V(x) = 0$). Une façon de le définir est de poser $L = \frac{d}{dt}_{|t=0} d\varphi^t_x$ en remarquant que $d\varphi^t_x$ est bien un endomorphisme de T_xM pour tout t (car $\varphi^t(x) = x$). Plus classiquement, on peut calculer le linéarisé L en exprimant le champ de vecteurs V dans des cartes. Soient W^1 et W^2 les expressions de V dans deux cartes différentes

Proposition 1.8. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X = \mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de V_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de V_μ dans U.*

◄ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $V(\mu, x) = 0$. ►

Considérons maintenant le cas d'une orbite périodique d'un champ de vecteurs V, de période minimale $T > 0$. Les points de cette orbite sont des points fixes de l'application φ^T. Il faut noter cependant que ce ne sont jamais des points fixes non dégénérés. En effet, comme chacun des points de l'orbite périodique du flot est un point fixe de φ^T, ils ne sont pas isolés. Plus directement, l'hypothèse de non dégénerescence n'est pas satisfaite en raison de l'égalité suivante :

$$d\varphi^T_x \cdot V(x) = V(x).$$

$V(x)$ est donc un vecteur propre de $d\varphi^T_x$ associé à la valeur propre 1. Pour démontrer l'égalité, on observe que $\varphi^T \circ \varphi^t(x) = \varphi^t(x)$ pour tout t, et on dérive par rapport à t en $t = 0$.

Il est utile pour décrire cette situation d'introduire une section de poincaré locale en x, c'est à dire un petit disque plongé $Y \subset X$, centré en x et transverse à V. Comme l'orbite O de x est une partie compacte de X on peut supposer que $\bar{Y} \cap O = \{x\}$, c'est à dire que T est le temps de premier retour de x dans Y, et que ce retour est régulier. Il existe alors un voisinage Y_1 de x dans Y est une application de premier retour régulière $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$, qui vérifie $\psi(x) = x$.

Propriété 1.9. *La multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi^T_x$ est exactement un de plus que la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\psi_x$.*

On dit que x est une orbite périodique non dégénérée si c'est un points fixe non dégénéré de ψ, c'est à dire si la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi^T_x$ est égale à 1.

◄ On a $\varphi^T(x) = \varphi^{T-\tau(x)} \circ \psi(x)$ pour tout $x \in Y$. On a déjà vu que $d\varphi^T_x \cdot V(x) = V(x)$. Dans une base de T_xX constituée de $V(x)$ et d'une base de T_xY, on a la décomposition par blocs

$$d\varphi^T_x = \begin{bmatrix} 1 & -\partial_x \tau(x) \\ 0 & d\psi_x \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

Proposition 1.10. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X = \mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point périodique non dégénéré de V_0 de période minimale $T > 0$. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, un intervalle ouvert J contenant T, et une application $I \ni \mu \longmapsto (x_\mu, T_\mu) \in U \times J$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, un point périodique de période minimale T_μ de V_μ. De plus, l'orbite de x_μ est la seule orbite périodique de V_μ qui entre dans U et dont la période minimale appartient à J.*

◄ Soit Y une section de Poincaré locale en x_0. Le point x_0 est un point fixe non dégénéré de l'application de premier retour ψ. Montrons que l'application de retour $\psi_\mu(x) = \psi(\mu, x)$ et le temps de retour $\tau(\mu, x)$ sont C^1.

On peut considérer l'application $V(\mu, x)$ comme une champ de vecteurs $\tilde{V}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dont la première composante est nulle. Son flot est alors $\tilde{\varphi}^t(\mu, x) = (\mu, \varphi^t_\mu(x))$, où φ^t_μ est le flot du champ V_μ sur $\mathbb{R}^d$. Si I est un intervalle ouvert contenant 0, alors $\tilde{Y} := I \times Y$ est une section de poincaré locale pour $\tilde{V}$ en $(0, x_0)$, qui est une orbite périodique de période T. Les fonctions $\tau(\mu, x)$ et $\psi(\mu, x)$ sont les temps et les applications de retour associées à la section $\tilde{Y}$. De plus, si J est un petit intervalle contenant T, pour tout $(\mu, y) \in I \times Y$, $\tau(\mu, y)$ est l'unique temps $t \in J$ pour lequel $\varphi^t(\mu, y) \in \tilde{Y}$.

Comme x_0 est un point fixe non dégénéré pour ψ_0, il existe une application $\mu \longrightarrow x_\mu$ et un voisinage W de x_0 dans Y tel que x_μ est le seul point fixe de ψ_μ dans W, c'est alors un point périodique de période $T_\mu = \tau(\mu, x_\mu)$ pour V_μ.

Il existe un voisinage U de x dans X qui a la propriété que toute orbite de U passe par W (on peut prendre par exemple une petite boite de flot). La propriété d'unicité de l'énoncé en découle : Si $x \in U$ est périodique pour V_μ, de période S contenue dans J, alors l'orbite de x intersecte W en un point y qui est lui aussi S-périodique. Il vérifie donc $\varphi^S_\mu(y) = y$, ce qui implique que $y = \psi(y)$ et donc $y = x_\mu$. ►