Systèmes Dynamiques

Patrick Bernard

26 octobre 2017

Version préliminaire des notes de cours.

Table des matières

1 Introduction, points fixes et périodiques.

Il y a plusieurs contextes mathématiques que l'on peut qualifier de systèmes dynamiques. Dans tous les cas, il y a un espace X qui décrit les états possible du système, et un temps $\mathbb{T}$. On considérera les cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$.

Le cas $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. On se donne une application $\varphi : X \longrightarrow X$, et on étudie les suites définies par récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Une telle suite est déterminée par sa condition initiale x_0, on dit que c'est l'orbite du point x_0. Dit autrement, on étudie la suite des applications φ^n (φ itérée n fois), pour laquelle $x_n = \varphi^n(x_0)$. On a bien sur $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$.

Si l'application φ est inversible, on peut définir φ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la relation ci-dessus restant vérifiée. C'est le cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on considère un flot $\varphi^t(x) = \varphi(t, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ vérifiant la relation $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$. L'une des manières les plus fréquentes de définir un tel flot est de se donner un champ de vecteurs $V(x)$ sur X. Ceci a un sens si X est une variété, ou un espace $\mathbb{R}^d$. On considère alors l'équation différentielle $x'(t) = V(x(t))$. Si V est assez régulier (C^1 ou même Lipschitz), alors pour toute condition initiale x_0, il y a une et une seule solution maximale de cette équation vérifiant $x(0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ contenant 0. On peut rassembler toutes ces solutions en une application

$$\varphi : \mathbb{R} \times X \supset U \longrightarrow X$$

telle que, pour chaque $x \in X$, L'application $U_x \ni t \longmapsto \varphi(t, x)$ est la solution maximale de l'équation, où $U_x = \{t : (t, x) \in U\}$. Le domaine de définition U est un ouvert de $\mathbb{R} \times X$, et l'application φ est C^r si le champ V est C^r. On dit que le champ V est complet si $U = \mathbb{R} \times X$, c'est à dire si toutes les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$. Alors, $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$ est un flot sur X. On considérera principalement des champs complets. On rappelle quelques résultats utiles à ce propos :

Proposition 1.1. *Tout champ de vecteurs à support compact est complet. En particulier, tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.*

Si V est un champ de vecteurs, il existe une fonction f, strictement positive et lisse, telle que fV est complet.

Si x_0 est un point tel que le temps d'existence T_+ de la solution maximale est fini, alors l'image $x([0, T^+[) \subset X$ de l'orbite n'est pas relativement compacte.

Dans tous les cas, on considère donc une action du (semi)-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace X.

On parle de semi-flot lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$. Même si on considérera plus rarement ce cas, il apparaît de manière naturelle dans les cas suivants :

Dans l'études des équations aux dérivées partielles d'évolution, par exemple de type parabolique. De telles équations induisent souvent un semi-flot sur un espace X de dimension infinie.

Dans l'étude des flots, on est souvent amené à considérer des parties positivement invariantes, c'est à dire des parties $Y \subset X$ pour lesquelles $\varphi^t(Y) \subset Y$ pour tout $t \geqslant 0$ (mais pas forcément pour $t < 0$). La famille des applications $\varphi^t_{|Y}$ est alors un semi-flot. Si le flot φ^t provient d'un champ de vecteurs complet V et que Y est un ouvert de X, le champ $V_{|Y}$ est complet vers le futur, mais pas vers le passé.

Nature des orbites

On dit que x est un point fixe de l'application φ si $\varphi(x) = x$. On dit que x est un point périodique si il existe $n \geqslant 1$ tel que $\varphi^n(x) = x$. L'ensemble des entiers n pour lesquels $\varphi^n(x) = x$ est l'ensemble des multiple d'un entier $T > 0$, que l'on appelle la période minimale de x. Les points fixe sont donc les orbites périodiques dont la période minimale est égale à 1. Il existe trois types d'orbites pour une application φ :

Les orbites périodiques.

Les orbites injectives.

Les orbites préperiodiques (x n'est pas périodique, mais son orbite contient un point périodique). Si φ est inversible, toute orbite préperiodique est périodique.

Considérons maintenant le cas d'un flot engendré par un champ de vecteurs complet V de classe C^1. On dit que x est un point fixe (ou un point critique) si $V(x) = 0$, ou de manière équivalente si $\varphi^t(x) = x$ pour tout t. On dit que x est un point périodique si il existe $t > 0$ tel que $\varphi^t(x) = x$. L'ensemble des périodes est une sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, c'est donc ou bien $\mathbb{R}$ (cas d'un point fixe) ou bien $T\mathbb{Z}$ pour un réel $T > 0$, qui est appelé la période minimale de x.

Il y a trois types d'orbites pour un flot :

Les points fixes (dits aussi points singuliers).

Les orbites périodiques (de période minimale strictement positive). Si $x(t)$ est une orbite de période $T > 0$, alors la courbe x engendre un plongement du cercle $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans X. Plus précisément, en notant $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, il existe un plongement $\theta : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \longrightarrow X$ tel que $x = \pi \circ \theta$.

Les orbites injectives. Dans ce cas, l'application $t \longmapsto \varphi^t(x)$ est une immersion injective de $\mathbb{R}$ dans X. En effet, $x'(t) = V(x(t))$, et ce vecteur est non-nul pour tout t, sinon l'orbite serait un point fixe.

Dans un semi-flot, il peut aussi exister des orbites prépériodiques.

Conjugaisons Soit $\phi : X \longrightarrow X'$ une bijection. Si $\psi = \phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi$, alors ϕ envoie les orbites de φ sur les orbites de ψ. L'existence d'une telle bijection ϕ implique que les dynamiques de φ et ψ ont certaines similarités (d'autant plus si ϕ a certaines propriétés de régularité). On dit que ϕ conjugue φ et ψ.

On dit que ϕ conjugue les flots φ^t et ψ^t elle conjugue les applications φ^t et ψ^t pour tout t.

Dans le cas où X et X' sont des variétés, et où les flots φ^t et ψ^t sont engendrés par des champs de vecteurs V et W, le difféomorphisme ϕ est une conjugaison si et seulement si

$$W(\phi(x)) = d\phi_x \cdot V(x)$$

pour tout $x \in X$ (on dit que W est l'image directe de V par ϕ).

Une façon d'étudier une système dynamique est de le conjuguer à un système plus simple. C'est souvent difficile globalement, mais la question est aussi intéressante au niveau local. On verra par exemple qu'au voisinage d'un point fixe hyperbolique, un système est conjugué à son linéarisé par un homéomorphisme. En ce qui concerne les points réguliers (points non fixes) des champs de vecteurs, le problème de conjugaison locale est facile :

Proposition 1.2. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit x_0 un point régulier de V, c'est à dire que $V(x_0) \neq 0$. Il existe alors un difféomorphisme local $\phi : X \supset U \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$, où U est un ouvert contenant x_0 et U' est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, qui conjugue V à un champ de vecteurs constant V' sur U'. On peut même demander que $V' = (1, 0, \ldots, 0)$ et que $U' =]-1, 1[\times B$, où B est une boule de $\mathbb{R}^{d-1}$. On dit alors que U est une boite de flot locale de V.*

◄ Soit $f : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow X$ une application telle que $f(0) = x_0$ et $df_{x_0} \cdot \mathbb{R}^{d-1}$ est un supplémentaire de $V(x_0)$ dans $T_{x_0}M$. On considère alors l'application

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \ni (t, y) \longmapsto \varphi^t(f(y)) \in X$$

où φ est le flot de V. On a

$$d\psi_{(y,t)} \cdot (1, 0) = \partial_t \psi(y, t) = V(\psi(y, t))$$

c'est à dire que ψ conjugue le champ constant $(1, 0)$ et le champ V. On constate que

$$d\psi_{(0,0)} \cdot (s, v) = v + sV(x_0),$$

est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ dans $T_{x_0}M$, donc ψ est un difféomorphisme local. Si B est un petite boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et I un petit intervalle ouvert contenant 0, alors ψ est un difféomorphisme de $U' := B \times I$ sur son image U, qui est un ouvert de X. L'inverse $\phi : U \longrightarrow U'$ est le difféomorphisme cherché. ►

On peut obtenir un résultat un peu moins local :

Proposition 1.3. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit $x(t) : [0, T] \longrightarrow X$ un segment d'orbite injectif. Il existe alors un tube de flot contenant $x([0, T])$. Plus précisément, il existe un intervalle ouvert I contenant $[0, T]$, une boule ouverte B de $\mathbb{R}^{d-1}$, un voisinage ouvert U de $x([0, T])$ et un difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow I \times B$ qui conjugue le champ V et le champ $(1, 0)$.*

◄ On poursuit la preuve précédente. Comme $\psi(t+s, y) = \varphi^t \circ \psi(s, y)$, on a $d\psi_{(t,0)} = d\varphi^t_{x_0} \circ d\psi_{(0,0)}$, cette application linéaire est donc un isomorphisme. On peut donc supposer, en choisissant I et B comme dans l'énoncé assez petits, que ψ est un difféomorphisme local sur $I \times B$. Montrons maintenant que l'on peut, quitte à diminuer I et B, le supposer injectif. C'est alors un difféomorphisme sur son image, ce qui termine la preuve.

Si ψ n'est injectif sur aucun voisinage $I \times B$, alors il existe deux suites $(t_n, x_n) \neq (t'_n, x'_n)$telles que $\psi(t_n, x_n) = \psi(t'_n, x'_n)$ et $t_n \longrightarrow t \in [0, T], t'_n \longrightarrow t' \in [0, T]$, $x_n \longrightarrow 0$, $x'_n \longrightarrow 0$. A la limite, par injectivité de l'orbite $x_{|[0,T]}$, on obitent que $t = t'$. Comme ψ est un difféomorphisme local au voisinage de $(t, 0)$, ceci implique que les suites (t_n, x_n) et (t'_n, x'_n) sont égales après un certain rang, une contradiction. ►

Il y a plusieurs façons de faire des liens entre les systèmes à temps continu et à temps discret.

La plus évidente consiste, étant donné un flot φ^t, à considérer l'application φ^T pour un temps T donné. La dynamique du flot φ^t et celle de l'application φ^T sont fortement reliées, on en verra plusieurs exemples.

Une autre méthode pour associer une application à un flot consiste à considérer l'application de retour associée à une section de Poincaré. Cette méthode à l'avantage de diminuer la dimension.

Une section de Poincaré est une sous variété Y de X, de codimension un, transverse au champ de vecteurs, c'est à dire que $T_yX = T_yY \oplus \mathbb{R}V(y)$ pour tout $y \in Y$. Pour $y \in Y$, on dit que $z \in Y$ est le premier retour de y dans Y si il existe $T > 0$ tel que $z = \varphi^T(y)$ et $\varphi^t(y) \notin Y$ pour tout $t \in]0, T[$. On dit que z est un premier retour régulier si de plus $\varphi^t(y) \notin \bar{Y}$ pour tout $t \in]0, T[$.

Proposition 1.4. *Soit Y une section de Poincaré pour le champ V de classe C^r. L'ensemble des points de Y admettant un premier retour régulier est un ouvert Y_1 de Y, et l'application $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$ qui a chaque point de Y_1 associe son premier retour dans Y est C^r. C'est un difféomorphisme sur un ouvert Y_2 de Y.*

En général, Y_1 peut être vide. Il se peut même qu'aucun point de Y ne revienne dans Y. Toutefois, cette construction est souvent très utile. Même si ψ n'est pas une application de Y_1 dans lui-même, on peut souvent penser à ψ comme engendrant un système dynamique discret dont l'étude aide à comprendre le flot de V.

◄ Soit y un point qui admet un premier retour régulier $z = \varphi^T(y)$. Au voisinage de z, soit f une équation de Y, c'est à dire une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r telle que $df_z \neq 0$ et telle que $Y \subset f^{-1}(0)$. Pour chercher les retours dans Y des points voisins de y, on résout l'équation $g(t, x) := f \circ \varphi(t, x) = 0$ au voisinage de sa solution (T, y). On constate que $\partial_t g(T, y) = df_z \cdot V(z) \neq 0$. Il existe donc un voisinage U de y et une fonction $\tau : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r, telle que $\varphi^{\tau(x)}(x) \in Y$ pour tout $x \in U$. De plus, $\tau(x)$ est la seule solution de l'équation $g(t, x) = 0$ proche de T. L'application $\psi(x) := \varphi^{\tau(x)}(x) : U \longrightarrow Y$ est C^r, elle associe à chaque point $x \in U$ un de ses retours dans Y.

Il reste à montrer que, si U est un voisinage de y assez petit, alors c'est bien le premier retour et qu'il est régulier. Il faut donc montrer que $\varphi^t(x) \notin \bar{Y}$ pour tout $x \in U$ et tout $t \in]0, \tau(x)[$. Supposons, par contradiction, que cette propriété ne soit satisfaite sur aucun voisinage U de y. Il existe alors une suite x_n tendant vers y, et pour chaque n un temps $t_n \in]0, \tau(x_n)[$ tel que $\varphi^{t_n}(x_n) \in Y$. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que la suite t_n converge vers une limite $s \in [0, T]$, pour laquelle $\varphi^s(y) \in \bar{Y}$. Comme z est un retour régulier de y, on ne peut pas avoir $s \in]0, T[$. Si l'on a $s = T$, alors pour n grand t_n est une solution de l'équation $g(t_n, x_n) = 0$ qui est proche de T, mais différente de $\tau(x_n)$, ce qui contredit la conclusion du théorème des fonctions implicites. Une application similaire du théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, y)$ montre que 0 est localement l'unique solution de l'équation $\varphi^t(x) \in Y$. On ne peut donc pas avoir $s = 0$.

On peut renverser le temps en considérant le champ $-V$. Y est une section de Poincaré pour $-V$. Notons Y_2 l'ensemble des points de Y qui admettent un premier retour régulier pour $-V$. On montre comme ci-dessus que Y_2 est un ouvert de Y et que l'application de retour ϕ est C^r. Il est clair que z est un premier retour régulier de y pour V si et seulement si y est un premier retour régulier de z pour $-V$. On a donc $Y_2 = \psi(Y_1)$ et $\phi = \psi^{-1}$. ►

Définition 1.5. *Soit φ une application C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x de φ est non dégénéré si le linéarisé $L = d\varphi_x$ n'admet pas 1 pour valeur propre.*

Le linéarisé L est un endomorphisme de l'espace tangent T_xX. Le système linéarisé $v_{n+1} = Lv_n$ est une approximation du système φ au voisinage du point fixe x.

Proposition 1.6. *Soit $\varphi_\mu(x) = \varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ une application C^1, que l'on voit comme une famille d'applications C^1 de X. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de φ_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de φ_μ dans U.*

◄ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $F(\mu, x) := \varphi(\mu, x) - x = 0$ (on se place dans une carte en x_0 pour écrire cette différence). L'hypothèse de non-degenerescence est en effet exactement l'inversibilité de $\partial_x F(0, x_0)$. ►

Le cas des orbites périodiques est similaire. On dit que x est un point périodique non dégénéré de période n si c'est un point fixe non dégénéré de φ^n. Un point périodique non dégénéré de période n est isolé (parmi les points périodiques de période n) et survit à une perturbation de l'application.

Dans les cas des flots, il est utile de distinguer les cas des points fixes et le cas des orbites périodiques.

Définition 1.7. *Soit V un champ de vecteurs C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x_0 de V est non dégénéré si le linéarisé $L = dV_{x_0}$ est inversible.*

Si $X = \mathbb{R}^d$, le champ de vecteurs V est simplement une application $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, on définit alors le linéarisé par la formule $L = dV_{x_0}$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. On a alors $(d\varphi^t)_{x_0} = e^{tL}$ pour tout t, ceci explique pourquoi la valeur propre 1 dans le cas des applications correspond à la valeur propre 0 pour le champ de vecteurs. Dans le cas où X est une variété, il n'est pas clair que le linéarisé L est bien défini en tant qu'endomorphisme de T_xX (en fait, il n'est bien défini que lorsque $V(x) = 0$). Une façon de le définir est de poser $L = \frac{d}{dt}_{|t=0} d\varphi^t_x$ en remarquant que $d\varphi^t_x$ est bien un endomorphisme de T_xM pour tout t (car $\varphi^t(x) = x$). Plus classiquement, on peut calculer le linéarisé L en exprimant le champ de vecteurs V dans des cartes. Soient W^1 et W^2 les expressions de V dans deux cartes différentes

Proposition 1.8. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X = \mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de V_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de V_μ dans U.*

◀ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $V(\mu, x) = 0$. ▶

Considérons maintenant le cas d'une orbite périodique d'un champ de vecteurs V, de période minimale $T > 0$. Les points de cette orbite sont des points fixes de l'application φ^T. Il faut noter cependant que ce ne sont jamais des points fixes non dégénérés. En effet, comme chacun des points de l'orbite périodique du flot est un point fixe de φ^T, ils ne sont pas isolés. Plus directement, l'hypothèse de non dégénerescence n'est pas satisfaite en raison de l'égalité suivante :

$$d\varphi^T_x \cdot V(x) = V(x).$$

$V(x)$ est donc un vecteur propre de $d\varphi^T_x$ associé à la valeur propre 1. Pour démontrer l'égalité, on observe que $\varphi^T \circ \varphi^t(x) = \varphi^t(x)$ pour tout t, et on dérive par rapport à t en $t = 0$.

Il est utile pour décrire cette situation d'introduire une section de poincaré locale en x, c'est à dire un petit disque plongé $Y \subset X$, centré en x et transverse à V. Comme l'orbite O de x est une partie compacte de X on peut supposer que $\bar{Y} \cap O = \{x\}$, c'est à dire que T est le temps de premier retour de x dans Y, et que ce retour est régulier. Il existe alors un voisinage Y_1 de x dans Y est une application de premier retour régulière $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$, qui vérifie $\psi(x) = x$.

Propriété 1.9. *La multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi^T_x$ est exactement un de plus que la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\psi_x$.*

On dit que x est une orbite périodique non dégénérée si c'est un points fixe non dégénéré de ψ, c'est à dire si la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi^T_x$ est égale à 1.
◀ On a $\varphi^T(x) = \varphi^{T-\tau(x)} \circ \psi(x)$ pour tout $x \in Y$. On a déjà vu que $d\varphi^T_x \cdot V(x) = V(x)$. Dans une base de T_xX constituée de $V(x)$ et d'une base de T_xY, on a la décomposition par blocs

$$d\varphi^T_x = \begin{bmatrix} 1 & -\partial_x \tau(x) \\ 0 & d\psi_x \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

Proposition 1.10. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X = \mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point périodique non dégénéré de V_0 de période minimale $T > 0$. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, un intervalle ouvert J contenant T, et une application $I \ni \mu \longmapsto (x_\mu, T_\mu) \in U \times J$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, un point périodique de période minimale T_μ de V_μ. De plus, l'orbite de x_μ est la seule orbite périodique de V_μ qui entre dans U et dont la période minimale appartient à J.*

◀ Soit Y une section de Poincaré locale en x_0. Le point x_0 est un point fixe non dégénéré de l'application de premier retour ψ. Montrons que l'application de retour $\psi_\mu(x) = \psi(\mu, x)$ et le temps de retour $\tau(\mu, x)$ sont C^1.

On peut considérer l'application $V(\mu, x)$ comme une champ de vecteurs $\tilde{V}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dont la première composante est nulle. Son flot est alors $\tilde{\varphi}^t(\mu, x) = (\mu, \varphi^t_\mu(x))$, où φ^t_μ est le flot du champ V_μ sur $\mathbb{R}^d$. Si I est un intervalle ouvert contenant 0, alors $\tilde{Y} := I \times Y$ est une section de poincaré locale pour $\tilde{V}$ en $(0, x_0)$, qui est une orbite périodique de période T. Les fonctions $\tau(\mu, x)$ et $\psi(\mu, x)$ sont les temps et les applications de retour associées à la section $\tilde{Y}$. De plus, si J est un petit intervalle contenant T, pour tout $(\mu, y) \in I \times Y$, $\tau(\mu, y)$ est l'unique temps $t \in J$ pour lequel $\varphi^t(\mu, y) \in \tilde{Y}$.

Comme x_0 est un point fixe non dégénéré pour ψ_0, il existe une application $\mu \longrightarrow x_\mu$ et un voisinage W de x_0 dans Y tel que x_μ est le seul point fixe de ψ_μ dans W, c'est alors un point périodique de période $T_\mu = \tau(\mu, x_\mu)$ pour V_μ.

Il existe un voisinage U de x dans X qui a la propriété que toute orbite de U passe par W (on peut prendre par exemple une petite boite de flot). La propriété d'unicité de l'énoncé en découle : Si $x \in U$ est périodique pour V_μ, de période S contenue dans J, alors l'orbite de x intersecte W en un point y qui est lui aussi S-périodique. Il vérifie donc $\varphi_\mu^S(y) = y$, ce qui implique que $y = \psi(y)$ et donc $y = x_\mu$. ►

Considérons une dernière situation, celle d'un champ de vecteur laissant invariante une fonction h. Si $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 sur X, on dit que h est invariante par le champ de vecteurs V si $h \circ \varphi^t = h$ pour tout t. Ceci est équivalent à demander que la fonction $dh \cdot V$ soit identiquement nulle. En effet,

$$\partial_t(h \circ \varphi^t(x)) = dh_{\varphi(x)} \cdot V(\varphi^t(x)) = (dh \cdot V)(\varphi^t(x)).$$

On rencontre souvent des fonctions invariantes, c'est par exemple le cas de l'énergie dans de nombreux systèmes issus de la physique.

Considérons une valeur régulière e de la fonction h, de sorte que $h^{-1}(e)$ est une sous-variété de X. Considérons maintenant un point périodique x_e dans $h^{-1}(e)$, de période minimale $T > 0$.

L'orbite de x_e ne peut pas être non dégénérée au sens ci-dessus. Considérons en effet une section de Poincaré locale Y en x_e et l'application de retour ψ. Le point x_e est un point régulier pour la restriction de h à Y. Notons $\ell := d(h_{|Y})_{x_e}$, c'est une forme linéaire sur $T_{x_e}Y$. Comme $h \circ \psi = h$, on a $\ell \circ L = \ell$, où $L = d\psi_{x_e}$. Ceci implique que 1 est valeur propre de L^*, donc de L.

Proposition 1.11. *Supposons que 1 est valeur propre simple de $d\psi_{x_e}$. Alors, il existe un intervalle I contenant e et une application $(x(a), T(a)) : I \longrightarrow X$ telle que, pour chaque $a \in I$, le point $x(a)$ est périodique de période $T(a)$ et contenu dans $h^{-1}(a)$.*

L'application

$$I \times \mathbb{S}^1 \ni (a, \theta) \longmapsto \varphi^{\theta T(a)}(x(a)) \in X$$

est un plongement du cylindre dans X dont l'image est invariante.

◄ Donnons d'abord une démonstration légèrement informelle. L'orbite de x_e est non dégénérée en tant qu'orbite du champ V sur la variété $h^{-1}(e)$. Pour a voisin de e, la restriction V_a de V à $h^{-1}(a)$ est une perturbation de V_e. On applique alors le théorème précédent qui nous donne une orbite périodique x_a de V_a. On est toutefois pas exactement dans le cadre du théorème précédent car l'espace $h^{-1}(a)$ dépend du paramètre a. Même si cette preuve peut être rendue rigoureuse, il est plus simple d'utiliser une section de Poincaré.

On considère une section de Poincaré locale Y en x_e et l'application de retour ψ. On a $h \circ \psi = h$. On veut montrer qu'il existe un intervalle I contenant e et un courbe régulière $a \longmapsto x_a$ de points fixes de ψ tels que $h(x_a) = a$. On se place dans une carte locale en x_e pour laquelle la fonction h est la dernière coordonnée. On a dont $Y = \mathbb{R}^{d-2} \times \mathbb{R}$, et, en notant $y = (z, a)$ les points de ce produit, on a $h(z, a) = a$. Comme l'application de retour ψ préserve a, elle est de la forme $\psi(z, a) = (F(z, a), a)$ où $F : Y \longrightarrow \mathbb{R}^{d-2}$ est régulière. En notant $F_a(z) = F(z, a)$ et $x_e = (z_e, e)$, on a $F_e(z_e) = z_e$, et ce point fixe est non dégénéré pour l'application F_e. On déduit donc l'existence d'une courbe $a \longmapsto z_a$ telle que $F_a(z_a) = z_a$. On pose alors $x_a = (z_a, a)$.

Concernant le dernier point, il faut d'abord remarquer que l'application $F(a, \theta) = \varphi^{\theta T(a)}(x(a))$ est bien définie sur $I \times \mathbb{S}^1$ car $x(a)$ est $T(a)$-périodique. De plus, elle est injective, et c'est un difféomorphisme local. Si on considère un intervalle ouvert J dont la fermeture est contenue dans I, alors l'application F restreinte au compact $\bar{J} \times \mathcal{S}^1$ est donc un plongement topologique, c'est à dire un homéomorphisme sur son image. La restriction de F à $J \times \mathcal{S}^1$ est donc un difféomorphisme local et un plongement topologique, c'est à dire un plongement. ►

2 Points fixes asymptotiquement stables des systèmes discrets

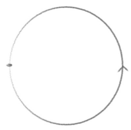
Notion de stabilité d'un point fixe. On se place dans le contexte d'une application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ où X est un espace métrique.

Le point fixe x_0 est dit *Lyapounov stable* si, pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le point fixe x_0 est dit *asymptotiquement stable* si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de x_0 tel que toute orbite partant dans W converge vers x_0.

Le bassin de x_0 est l'ensemble des points x tels que $\varphi^n(x) \longrightarrow x_0$ en $+\infty$. Si x_0 est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x_0.

La stabilité de Lyapounov est une hypothèse nécessaire (le point fixe ci-dessous n'est pas asymptotiquement stable).



Les contractions (applications de constante de Lipschitz strictement inférieure à 1) fournissent des exemples de points asymptotiquement stables :

Théorème 2.1. *Soit X un espace métrique complet et φ une contraction. Alors φ admet un unique point fixe x_0. Ce point fixe est asymptotiquement stable et son bassin est X entier.*

Quand on s'intéresse au comportement asymptotique, ces dynamiques sont les plus simples que l'on puisse imaginer : toutes les orbites convergent vers x_0.

◄ On considère n'importe quel point y_0, et la suite $y_n = \varphi^n(y_0)$ associée. On a alors $d(y_{n+1}, y_n) \leqslant bd(y_n, y_{n-1})$, où b est la constante de Lipschitz de φ. Ceci implique que

$$d(y_n, y_m) \leqslant \sum_{i \geqslant n} b^i d(y_0, y_1) \leqslant \frac{b^n}{1-b} d(y_0, y_1)$$

pour tout $m \geqslant n$. On en déduit que la suite y_n est de Cauchy, et donc qu'elle a une limite x_0. En passant à la limite dans l'égalité $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, on obtient que $x_0 = \varphi(x_0)$: x_0 est un point fixe. Si z est une autre condition initiale, alors $d(z_n, x_0) \leqslant b^n d(z, x_0) \longrightarrow 0$: toutes les orbites convergent vers x_0. Pour vérifier la stabilité de Lyapounov de x_0, il suffit de constater que les boules centrées en x_0 sont invariantes par φ. ►

Exercice 2.1. *Soit φ une application continue de X. Supposons que il existe N tel que φ^N est une contraction. Posons*

$$d_1(x, y) = d(x, y) + d(\varphi(x), \varphi(y)) + \cdots + d(\varphi^{N-1}(x), \varphi^{N-1}(y)).$$

Montrer que d_1 est une distance sur X, équivalente à d, que (X, d_1) est complet, et que φ est une contraction pour d_1. Conclure qu'il existe un unique point fixe de φ, qui est asymptotiquement stable et attire X entier.

On peut poursuivre l'étude des contractions en s'intéressant au problème de conjugaison :

Proposition 2.2. *Soit X un espace métrique complet et soit φ un homéomorphisme de X qui est une contraction. Soit ψ un homéomorphisme qui est une contraction égale à φ en dehors d'une boule de rayon fini. Alors ψ est conjuguée à φ, c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme h de X tel que $h \circ \varphi = \psi \circ h$.*

On peut penser à h comme à un changement de coordonnées qui transforme φ en ψ. Si l'on ne suppose pas que ψ est un homéomorphisme, on obtient quand même une application continue h, on dit que c'est une semi-conjugaison.

◄ Soit x_0 le point fixe de φ, y_0 le point fixe de ψ. Il existe $R > 0$ tel que $\psi = \varphi$ en dehors de la boule $B(x_0, R)$. Pour tout $x \neq 0$, on a $d(\varphi^{-1}(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)/b$ donc $\varphi^{-n}(x)$ n'appartient pas à la boule $B(x_0, R)$ pour n assez grand. On déduit que la suite $\psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ se stabilise pour n grand. Posons $h(x) := \lim \psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ pour $x \neq x_0$, et $h(x_0) = y_0$. Montrons que h est continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $h = \psi^N \circ \varphi^{-N}$ en dehors de $B(x_0, \epsilon)$. La continuité de h dans le complémentaire de x_0 en découle. Il reste à montrer que $h(x_n) \longrightarrow y_0$ lorsque $x_n \longrightarrow x_0$. On note k_n le plus grand entier pour lequel $\varphi^{-k_n}(x_n) \in B(x_0, R)$. La suite k_n tend vers l'infini. Pour tout $i \geqslant 0$, on a $\psi^i \circ \varphi^{-i} \circ \varphi^{-k_n}(x) = \varphi^{-k_n}(x_n)$, donc $h(x_n) = \psi^{k_n} \circ \varphi^{-k_n}(x_n)$ donc $d(x_0, h(x_n)) \leqslant b^{k_n} R$ où $b =$ Lip (ψ). On déduit que h est continue.

On a $\psi \circ h(x_0) = \psi(y_0) = y_0 = h(x_0) = h(\varphi(x_0)$. Pour $x \neq x_0$, il existe N tel que $h(x) = \psi^n \circ \varphi^n(x)$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $x \neq x_0$, on a

$$h(\varphi(x)) = \lim \psi^n \circ \varphi^{1-n}(x) = \psi(\lim \psi^{n-1} \circ \varphi^{1-n}(x)) = \psi \circ h(x).$$

On a montré que h est une semi-conjugaison. Dans le cas où ψ est un homéomorphisme, on pose de la même façon $g := \lim \varphi^n \circ \psi^{-n}$. C'est une application continue.

On a $g \circ h(x_0) = x_0$ et, pour $x \neq x_0$, il existe N tel que $h(x) = \psi^N \circ \varphi^{-N}(x)$ et $g(h(x)) = \varphi^N \circ \psi^{-N}(h(x))$, ce qui implique que $g \circ h(x) = x$. On montre de même que $h \circ g = id$. Donc h est un homéomorphisme. ►

Pour montrer que le point fixe x_0 d'une contraction est asymptotiquement stable, on a utilisé la fonction $f(x) := d(x, x_0)$. On a $f \circ \varphi \leqslant bf$, ce dont on conclut que $f(x_n) \longrightarrow 0$. On peut généraliser un peu cette méthode.

Théorème 2.3. *Supposons que X est localement compact et que x_0 est un point fixe de φ. Supposons de plus qu'il existe une fonction de Lyapounov stricte en x_0, c'est à dire une fonction continue $f : U \longrightarrow [0, \infty)$, où U est un voisinage de x_0, telle que les fonctions f et $f - f \circ \varphi$ sont strictement positives sur un voisinage pointé $V - \{x_0\}$ de x_0.*

Alors x_0 est asymptotiquement stable.

Quelques digressions sont utiles avant de démontrer ce résultat. On dit que f est une fonction de Lyapounov si $f \circ \varphi - f \leqslant 0$. Le point x est dit strict si $f \circ \varphi(x) < f(x)$, il est dit neutre en cas d'égalité. Le point x est dit totalement neutre si $f \circ \varphi^n(x) = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur (totalement) neutre de f si il existe un point (totalement) neutre x de f tel que $f(x) = a$.

On définit, pour tout point x, l'omega-limite $\omega(x) \subset X$ comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $\varphi^n(x), n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, c'est l'ensemble des limites de sous-suites de la forme $\varphi^{n_k}(x)$, $n_k \longrightarrow \infty$. Dans le cas inversible, on définit $\alpha(x)$ comme l'ensemble des points d'accumulations en $-\infty$.

Lemme 2.4. *L'ensemble $\omega(x)$ est fermé et positivement invariant. Si l'espace X est compact, alors $\omega(x)$ est non-vide pour tout x et $\varphi(\omega(x)) = \omega(x)$.*

◄ Tout point y de $\omega(x)$ est la limite d'une suite de la forme $\varphi^{n_k}(x)$. Alors, $\varphi(y)$ est la limite de la suite $\varphi^{n_k+1}(x)$, il appartient donc à $\omega(x)$. On a

$$\omega(x) = \cap_{n \geqslant 0} \overline{\{\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x), \ldots\}},$$

c'est donc une intersection de fermés, et, dans le cas où X est compact, une intersection décroissante de compacts non vides. Finalement, si $y = \lim \varphi^{n_k}(x)$ est un point de $\omega(x)$, alors toute valeur d'adhérence de la suite $\varphi^{n_k-1}(x)$ est une préimage de y contenue dans $\omega(x)$. ►

Proposition 2.5. *Si f est une fonction de Lyapounov, chaque ensemble limite $\omega(x)$ est contenu dans un niveau totalement neutre de f.*

◄ Si $\omega(x)$ est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on considère un point $y \in \omega(x)$ qui est donc la limite d'une sous-suite $\varphi^{n_k}(x)$. La suite $f \circ \varphi^n(x)$ étant décroissante, elle tend vers $a := f(y)$. L'ensemble $\omega(x)$ est donc contenu dans $f^{-1}(a)$. Comme c'est un ensemble positivement invariant, ses points sont donc totalement neutres. ►

Revenons à la démonstration du théorème.

◄ On considère la fonction $f : U \longrightarrow [0, \infty)$ et le voisinage $V \subset U$ tel que $f > 0$ et $f - f \circ \varphi > 0$ sur $V - \{x_0\}$.

On considère un voisinage compact $K \subset V$ de x_0. On considère un voisinage ouvert W de x_0 tel que $\varphi(\bar{W}) \subset K$. On pose $a = \min_{K-W} f$, on a $a > 0$. On pose $Y = \{x \in \bar{W}, f(x) \leqslant a\}$, qui est un voisinage compact de x_0. L'ensemble Y est positivement invariant. En effet, si $x \in Y$, alors $\varphi(x) \in K$ et $f \circ \varphi(x) < f(x) = a$. Ceci implique que x est dans W, donc dans Y. En appliquant la proposition à $\varphi_{|Y}$, on conclut que $\omega(x) \subset \{x_0\}$ pour tout $x \in Y$. Comme Y est compact, on a donc $\omega(x) = \{x_0\}$, c'est à dire que toutes les orbites de Y tendent vers x_0. Si U' est un voisinage de x_0 contenu dans U, on construit comme ci-dessus un voisinage de x_0 positivement invariant Y' contenu dans U', ce qui montre la stabilité de Lyapounov. ►

Exercice 2.2. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f > 0$ sur $X - \{x_0\}$. Supposons de plus que f est propre (c'est à dire que les ensembles $f^{-1}([0, a])$ sont compacts) et stricte en dehors de x_0. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable de bassin X entier.*

Exercice 2.3. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x) \geqslant h(d(x_0, x))$, où $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ est une fonction continue strictement croissante. Supposons de plus qu'il existe une fonction continue $\phi :]0, \infty) \longrightarrow]0, \infty)$ telle que $f \circ \varphi \leqslant f - \phi \circ f$. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable de bassin X entier.*

Le théorème admet une réciproque :

Théorème 2.6. *On suppose X localement compact. Soit x_0 un point fixe asymptotiquement stable, de bassin B. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ qui a les propriétés suivantes : $f = 1$ sur $X - B$, $f \in]0, 1[$ sur $B - \{x_0\}$, $f(x_0) = 0$, $f \circ \varphi - f < 0$ sur $B - \{x_0\}$.*

On commence par quelques lemmes :

Lemme 2.7. *On suppose X localement compact. Le point fixe x_0 est asymptotiquement stable si et seulement si il existe un voisinage U de x_0 qui converge uniformément vers x_0 au sens suivant : pour tout voisinage W de x_0 il existe N tel que $\varphi^n(U) \subset W$ pout tout $n \geqslant N$.*

◄ Supposons que U existe. Il est alors clair que toutes les orbites de U tendent vers x_0. Fixons maintenant un voisinage W de x_0. Il existe N tel que $\varphi^n(U) \subset W$ pour tout $n \geqslant N$. D'autre part, la continuité de φ implique l'existence d'un voisinage $V \subset U$ de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \leqslant N$. On a donc $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$, donc x_0 est Lyapounov stable.

Réciproquement, supposons que x_0 est asymptotiquement stable. Soit B le bassin de x_0, et U un voisinage compact de x_0 contenu dans B. Soit W un voisinage de x_0, et V un voisinage ouvert de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout voisinage ouvert W de x_0, les préimages $\varphi^{-n}(V), n \in \mathbb{N}$ recouvrent B, donc elles recouvrent U. Par compacité, il existe N tel que les préimages $\varphi^{-n}(V), n \leqslant N$ recouvrent U. Pour tout $x \in U$, il existe donc $k \leqslant N$ tel que $\varphi^(x) \in V$, et alors $\varphi^n(x) \in W$ pour tout $n \geqslant k$, en particulier pour tout $n \geqslant N$. ►

Lemme 2.8. *Soit U un ouvert. Supposons que $\overline{\varphi(U)} \subset U$ et notons $A := \cap_{n \geqslant 0} \varphi^n(U)$ et $B := \cup_{n \geqslant 0} \varphi^{-n}(U)$. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes : $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = X - B$, $f \circ \varphi - f < 0$ sur $B - A$.*

◄ Pour chaque n, on considère ne fonction continue $g_n : X \longrightarrow [0, 1]$ telle que $g_n^{-1}(0) = \overline{\varphi^n(U)}$ et $g_n^{-1}(1) = X - U$. On constate que $g_n \circ \varphi^n \leqslant g_n$, avec une inégalité stricte sur $\varphi^{-n}(U) - \overline{\varphi^n(U)}$. En effet, si $x \in U$, alors $g_n \circ \varphi^n(x) = 0 \leqslant g_n(x)$, et cette inégalité est stricte si $x \in U - \overline{\varphi^n(U)}$. Si $x \notin U$, alors $g_n(x) = 1 \geqslant g_n \circ \varphi^n(x)$, et cette inégalité est stricte pour $x \in \varphi^{-n}(U)$.

Pour chaque n, on pose $f_n := (g_n + \ldots + g_n \circ \varphi^{n-1})/n$. La fonction $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ est continue, elle vérifie $f_n \circ \varphi - f_n = (g_n \circ \varphi^n - g_n)/n \leqslant 0$, avec inégalité stricte sur $\varphi^{-n}(U) - \overline{\varphi^n(U)}$. De plus, $f_n(x) = 1$ si et seulement si $g_n(x) = g_n \circ \varphi(x) = \cdots = g_n \circ \varphi^n(x) = 1$, c'est à dire si et seulement si $x \in X - \varphi^{-n}(U)$. D'autre part, $f_n(x) = 0$ si et seulement si $g_n(x) = g_n \circ \varphi(x) = \cdots = g_n \circ \varphi^n(x) = 0$, c'est à dire si et seulement si $x \in \overline{\varphi^n(U)}$.

On considère maintenant une suite $a_n, n \geqslant 0$, à terme strictement positifs, et telle que $\sum a_n = 1$. On pose $f := \sum a_n f_n$. Comme $f(x)$ est une somme de termes positifs, $f(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$ pour tout n, c'est à dire si et seulement si $x \in A$. De la même façon, on a $f(x) \leqslant \sum a_n = 1$ sauf si $g_n(x) = 1$ pour tout n, c'est à dire si $x \notin \cup \varphi^{-n}(U)$. Finalement, $f \circ \varphi - f = \sum a_n(f_n \circ \varphi - f_n) \leqslant 0$. Cette inégalité est stricte si et seulement si l'un des termes est strictement négatif, c'est à dire pour $x \in B - A$. ►

Concluons la preuve du théorème :

◄ Soit x_0 un point fixe asymptotiquement stable. Il existe alors un voisinage relativement compact U qui converge uniformément vers x_0. En particulier, il existe N tel que $\overline{\varphi^N(U)} \subset U$, $\cap \varphi^{nN}(U) = \{x_0\}$, et $\cup \varphi^{-nN}(U) = B$, le bassin de x_0.

Il existe alors une fonction de Lyapounov continue $g : X \longrightarrow [0, 1]$ pour φ^N, telle que $g^{-1}(0) = \{x_0\}$, $g \circ \varphi^N - g < 0$ sur $B - A$, $g^{-1}(1) = X - B$.

La fonction $f := (g + g \circ \varphi + \cdots + g \circ \varphi^{N-1})/N$ vérifie alors $f \circ \varphi - f = (g \circ \varphi^N - g)/N \leqslant 0$, avec inégalité stricte sur $B - A$, ainsi que les autres propriétés demandées. ►

Si X est une variété, la fonction de Lyapounov peut être choisie de classe C^∞. C'est une conséquence du résultat suivant :

Proposition 2.9. *Soit X une variété C^∞ de dimension finie et $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue. Soit $f : X \longrightarrow [0, 1]$ une fonction de Lyapounov continue. Supposons que les ensembles $A := f^{-1}(0)$, et $B := X - f^{-1}(1)$ son positivement invariants. Supposons finalement que f est stricte sur $B - A$. Alors il existe une fonction de Lyapounov g, de classe C^∞, telle que $g^{-1}(1) = X - B$, $g^{-1}(0) = A$ et g est stricte sur $B - A$.*

◄ Comme $f \circ \varphi < f$ sur l'ouvert $B - A$, il existe une fonction $\tilde{g} : B - A \longrightarrow]0,1[$ de classe C^∞ et telle que $f \circ \varphi < \tilde{g} < f$. Ceci implique que $\tilde{g} \circ \varphi < f \circ \varphi < \tilde{g}$, donc $\tilde{g}$ est une fonction de Lyapounov stricte sur $B - A$.

On prolonge $\tilde{g}$ par les valeurs 1 sur $X - B$ et 0 sur A. On obtient une fonction de Lyapounov continue sur X, qui est stricte et C^∞ sur $B - A$.

Il existe alors une fonction $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, strictement croissante, lisse sur $]0,1[$, et telle que $g := \phi \circ \tilde{g}$ est C^∞ (il faut prendre ϕ très plate en 0 et en 1). Cette fonction remplit toutes les conditions demandées. ►

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^d$ (ou plus généralement une variété) et où φ est C^1, on considère le linéarisé $L = d\varphi_{x_0}$.

On note R le *rayon spectral* de L, c'est à dire le maximum des modules de ses valeurs propres complexes (L est un endomorphisme réel).

Théorème 2.10. *Si $R < 1$, alors x_0 est asymptotiquement stable. On dit que le point fixe est linéairement stable. Si $R > 1$, alors x_0 n'est pas Lyapounov stable (donc pas asymptotiquement stable).*

Comme le montre la preuve ci-dessous, il suffit de supposer que φ est différentiable en 0 (pas necessairement C^1).

On rappelle la formule du rayon spectrale : $R = \lim \|L^n\|^{1/n}$.

Nous baserons la preuve du théorème sur le lemme suivant, qui est important en lui-même :

Lemme 2.11. *Soit $L : B \longrightarrow B$ un endomorphisme de l'espace de Banach $(B, |.|)$, soit R le rayon spectral de L et $b > R$. Il existe une norme $\|.\|$ de Banach sur B, équivalente à la norme $|.|$, pour laquelle $\|L\| \leqslant b$. Si la norme $|.|$ est Hilbertienne, alors la norme $\|.\|$ l'est aussi.*

Si L est un isomorphisme de Banach, si r est l'inverse du rayon spectral de L^{-1} (c'est donc l'infimum des modules des éléments du spectre de L), et si $0 < a < r$, alors il existe une norme $[.]$ pour laquelle

$$a[v] \leqslant [Av] \leqslant b[v]$$

pour tout $v \in B$.

◄ Il existe N tel que $\|A^N\| \leqslant b^N$ (par la formule du rayon spectral). On pose

$$\|v\| := \left(\sum_{i=0}^{N-1} b^{-2i} |A^i v|^2 \right)^{1/2},$$

de sorte que

$$\|Av\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} b^{-2i} |A^{i+1} v|^2 = b^2 \sum_{i=1}^{N} b^{-2i} |A^i v|^2 = b^2 (\|v\|^2 - |v|^2 + b^{-2N} |A^N v|^2) \leqslant b^2 \|v\|^2.$$

Dans le cas où L est inversible, on choisit M tel que $\|A^{-M}\| \leqslant a^{-M}$ et on pose

$$[v]^2 := \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} \|A^{-i} v\|^2.$$

Par un calcul identique au précédent, on obtient que $[A^{-1}v] \leqslant a^{-1}[v]$ pour tout v, donc que $a[v] \leqslant [Av]$. Par ailleurs,

$$[Av]^2 = \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} \|A \circ A^{-i} v\|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} b^2 \|A^{-i} v\| = b^2 [v]^2. ►$$

Montrons maintenant le théorème :

On suppose que $R(L) < 1$, et on choisit $b \in]R, 1[$. Il existe une norme $\|.\|$ pour laquelle $\|L\| < b$. Il existe alors un petit voisinage convexe de x_0 sur lequel $\|d\varphi\| \leqslant b$. Sur ce voisinage, l'application φ est donc b-Lipschitzienne. En particulier, on a

$$\|\varphi(x) - x_0\| \leqslant b\|x - x_0\|$$

ce dont on déduit facilement les conclusions voulues.

Réciproquement, supposons que $R > 1$ (et que l'espace est de dimension finie). On a alors une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^d = E \oplus F$, où E et F sont invariants par L, où toutes les valeurs propres de $L_{|E}$ sont de module R, et où le rayon spectral R_F de $L_{|F}$ est strictement inférieur à R (une telle décomposition n'existe pas forcément en dimension infinie). On fixe a et $b > 1$ tels que $R_F < b < a < R$. En appliquant le Lemme, on trouve une norme Euclidienne $\|.\|_E$ sur E telle que $\|Lv\|_E \geqslant a\|v\|_E$ pour tout v dans E et un norme Euclidienne $\|.\|_F$ sur F telle que $\|Lv\|_F \leqslant b\|v\|_F$ pour tout $v \in F$. On pose alors $\|v\|^2 = \|v_E\|_E^2 + \|v_F\|_F^2$, où v_E et v_F sont les composantes de v suivant E et F. C'est une norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, pour laquelle E et F son orthogonaux, et qui coïncide avec $\|.\|_E$ sur E et $\|.\|_F$ sur F.

Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les inégalités suivantes sont satisfaites pour $x \in B(0, \epsilon)$:

$$\|\varphi_E(x)\| \geqslant a\|x_E\| - \delta\|x\| \quad , \quad \|\varphi_F(x)\| \leqslant b\|x_F\| + \delta\|x\|.$$

En choisissant δ assez petit pour que $b+2\delta < a-2\delta$, nous allons en conclure que tout voisinage de 0 contient un point dont l'orbite sort de $B(0,\epsilon)$, contredisant la stabilité de Lyapounov. On prend une condition initiale $x = x_E+x_F$ telle que $\|x_E\| \geqslant \|x_F\|$. Ceci implique que $\|\varphi_E(x)\| \geqslant (a-2\delta)\|x_E\|$ et $\|\varphi_F(x)\| \leqslant b\|x_F\| + 2\delta\|x_E\| \leqslant (b+2\delta)\|x_E\|$. En notant $x^n = x_E^n + x_F^n$ l'orbite de x, on obtient donc par récurrence que, tant que $x^n \in B(0,\epsilon)$, $\|x_E^n\| \geqslant \|x_F^n\|$ et $\|x_E^n\| \geqslant (a-2\delta)^n\|x_E\|$. Comme $a - 2\delta > 1$, l'orbite sort de $B(0,\epsilon)$. ►

On peut se poser les mêmes questions dans le cas où X est un espace de Banach de dimension infinie. On remarque que la preuve ci-dessus n'utilise jamais la finitude de la dimension pour la partie stabilité, qui reste donc vraie en dimension infinie. La partie instabilité est un peu plus délicate. Pour que la preuve fonctionne, il faut supposer un peu plus sur le linéarisé afin de pouvoir décomposer l'espace comme nous l'avons fait dans la preuve. Il suffit par exemple de supposer l'existence d'un réel $R' \in [1, R[$ tel que le spectre du linéarisé ne contient aucun point de module R'. Cette hypothèse supplémentaire n'est pas nécessaire si φ est supposée C^2, mais il faut une autre démonstration.

Revenons à la questions de la conjugaison topologique au voisinage du point fixe :

Proposition 2.12. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue fixant l'origine. Supposons que $L = d\varphi_0$ existe, est inversible, et de rayon spectral strictement inférieur à 1. Alors φ est localement conjuguée à L. Plus précisément il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 et un homéomorphisme $h : U \longrightarrow V$ tel que $h \circ L = \varphi \circ h$ sur U.*

◄ On choisit une norme Euclidienne $|.|$ pour laquelle L est une contraction. On écrit $\varphi = L + \phi$, où $\phi(x) = o(|x|)$. On considère une fonction de troncature $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, 1]$ qui est égale à 1 sur la boule $B(0, 1)$ et à 0 hors de la boule $B(0, 2)$. En notant $f_\epsilon(x) = f(x/\epsilon)$, on considère l'application $\psi := L + f_\epsilon\phi$. On va montrer que c'est, pour $\epsilon > 0$ petit, un homéomorphisme et une contraction, ce qui implique la conclusion par la Proposition 2.2. Il suffit pour ceci de montrer que Lip$(f_\epsilon\phi)$ peut être rendu arbitrairement petit. Il existe une fonction $\delta(\epsilon)$ qui tend vers 0 en 0 et a les propriétés suivantes : ϕ est $\delta(\epsilon)$-Lipschitz sur $B(0, 2\epsilon)$, et $|\phi| \leqslant \epsilon\delta(\epsilon)$ sur $B(0, 2\epsilon)$. On a alors

$$\text{Lip}(f_\epsilon\phi) \leqslant \delta(\epsilon) + \delta(\epsilon)\text{Lip}(f),$$

cette constante de Lipschitz tend donc vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. ►

Exercice 2.4. *Soit φ et ψ deux homéomorphismes de X et Y, respectivement. Soient x_0 et y_0 des points fixes asymptotiquement stables de φ et ψ. Supposons que φ au voisinage de x_0 est topologiquement conjugué (c'est à dire conjugué par un homéomorphisme) à ψ au voisinage de y_0. Si B et B' sont les bassins d'attraction de x_0 et y_0, montrer que $\varphi_{|B}$ est topologiquement conjugué à $\psi_{|B'}$.*

En particulier, les bassins B et B' sont homéomorphes. Le bassin d'un point fixe linéairement stable d'un difféomorphisme est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^d$.

Sous des hypothèses supplémentaires, on obtient une conjugaison plus régulière.

Proposition 2.13. *Soit φ un difféomorphisme C^{k+2} ($k \in \{1, \ldots, \infty\}$) d'une variété X, fixant x_0. Supposons que les modules des valeurs propres du linéarisé $L = d\varphi_{x_0}$ sont contenues dans l'intervalle $[r, R]$, avec $R^2 < r < R < 1$. Alors, en notant B le bassin de x_0, l'application $\varphi_{|B} : B \longrightarrow B$ est globalement conjuguée à son linéarisé L : $T_{x_0}X \longrightarrow T_{x_0}X$ par un difféomorphisme C^k.*

En dimension 1, l'hypothèse de pincement est toujours satisfaite. C'est aussi le cas en dimension 1 complexe. Si $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe fixant 0 et si $|\varphi'(0)| < 1$ alors φ est localement conjuguée à son linéarisé par une conjugaison holomorphe, cette copnjugaison s'étend à l'ensemble du bassin d'attraction.

◄ A TERMINER

On fixe a et b tels que $b^2 < a < r < R < b$. On choisit une norme Euclidienne sur $T_{x_0}X$ telle que $|L| < b$ et $|L^{-1}| < 1/a$. On identifie un voisinage ouvert U de x_0 dans X à un voisinage V de 0 dans $T_{x_0}M$. On pose $h_n = L^{-n} \circ \varphi^n$. On va montrer que, au voisinage de x_0, la suite h_n converge uniformément sur U vers une limite continue $h : U \longrightarrow V$, qui vérifie automatiquement $h \circ \varphi = L \circ h$. Au voisinage de 0, φ est b-Lipschitz, et il existe une constante C telle que $|\varphi^{-1}(x) - L^{-1}(x)| \leqslant C|x|^2$. On a donc $|L^{-1}(\varphi^{n+1}(x)) - \varphi^{-1}(\varphi^{n+1}(x))| \leqslant Cb^{2n}|x|^2$. En appliquant L^{-n}, on déduit que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant C(b^2/a)^n|x|^2$. Comme $b^2/a < 1$, cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite h_n dans un voisinage de x_0, vers une limite continue h qui vérifie de plus $dh_0 = id$. Il existe donc un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que h_n converge, uniformément sur U, vers $h : U \longrightarrow V$ qui est un homéomorphisme, où V est un voisinage ouvert de 0 dans $T_{x_0}X$.

En fait, la convergence uniforme de h_n sur un voisinage de x_0 implique que cette convergence a lieu sur tout B, uniformément sur les compacts. En effet, si K est un compact de B et si U est un voisinage de x_0 sur lequel la convergence uniforme a lieu, il existe N tel que $\varphi^N(K) \subset U$. Ceci implique que $h_n \circ \varphi^N$ converge uniformément sur K, il en est donc de même de $h_{n+N} = L^{-N} \circ h_n \circ \varphi^N$. La limite h vérifie $h = L^{-N} \circ h \circ \varphi^N$, c'est donc un homéomorphisme de K sur son image. Si K' est un compact de $T_{x_0}X$, alors il existe N tel que $L^N(K') \subset V$, donc $h^{-1}(K') = \varphi^{-N}(h^{-1}(L^N(K')))$ est compact. L'application $h : B \longrightarrow T_{x_0}M$ est une bijection continue et propre, c'est donc un homéomorphisme.

Si $k \geqslant 1$,

On considère maintenant l'application $T\varphi(x, v) := (\varphi(x), d\varphi_x \cdot v)$. Elle fixe le point $(0, 0)$ et sa différentielle est $TL(v, w) = (Lv, Lw)$. Les valeurs propres de TL sont les mêmes que celles de L. On montre donc comme ci-dessus que la suite $H_n = (TL)^{-n} \circ (T\varphi)^n$ converge vers une limite continue H sur $B \times T_{x_0}X$, uniformément sur les compacts. Comme $H_n = Th_n$, on conclut que h est C^1 sur B, avec $Th = H$. Si $k > 1$, on montre de la même façon par récurrence que h est C^k.

Comme $dh_0 = id$, on conclut alors que h est un difféomorphisme local en 0, c'est à dire qu'il existe un voisinage U de 0

Dans le cas $k > 1$, on termine la preuve par récurrence. ►

La méthode ci-dessus est due à Nelson [1]. Il l'utilise pour démontrer qu'il existe une conjugaison régulière, sans hypothèse de pincement sur les valeurs propres de L, mais en supposant que $|\varphi - L| = O(|x|^r)$ avec r assez grand, ce résultat étant originalement du à Sternberg.

La régularité des conjugaisons est une question assez subtile, comme l'illustrent les exercices ci-dessous :

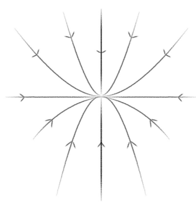
Exercice 2.5. *Considérons l'application* $\varphi(x, y) = (x/2, ay + x^2)$ *et son linéarisé* $\phi(x, y) = (x/2, ay)$.

Pour $a \neq 1/4$*, montrer qu'il existe une conjugaison* C^∞ *entre* φ *et* ϕ*, qui est de la forme* $h(x, y) = (x, y + bx^2)$.

Exercice 2.6. *Considérons l'application* $\varphi(x, y) = (x/2, y/4 + x^2)$ *et son linéarisé* $\phi(x, y) = (x/2, y/4)$.

Montrer qu'il existe une conjugaison entre φ *et* ϕ *de la forme* $h(x, y) = (x, y + ax^2 \ln x)$*. Quelle est la régularité de* h *?*

Montrer qu'il n'existe pas de conjugaison C^2 *au voisinage de* 0.



1. E. Nelson, Topics in dynamics I : flows.

3 Points fixes asymptotiquement stables des champs de vecteurs

On considère maintenant le cas où X est une variété (ou juste $X = \mathbb{R}^d$) et où V est un champ de vecteurs C^1 et complet sur X. On note φ^t le flot. Les points fixes Lyapounov stables et asymptotiquement stables se définissent exactement comme dans le cas des applications :

Le point fixe x_0 est dit Lyapounov stable si, pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\varphi^t(V) \subset U$ pour tout $t \geqslant 0$.

Le point fixe x_0 est dit asymptotiquement stable si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de x_0 tel que toute orbite partant dans W converge vers x_0.

Le bassin de x_0 est l'ensemble des points x tels que $\varphi^t(x) \longrightarrow x_0$ en $+\infty$. Si x_0 est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x_0.

Propriété 3.1. *Le point fixe x_0 est Lyapounov (resp. asymptotiquement) stable pour V si et seulement si il existe $T > 0$ tel que x_0 est Lyapounov (resp. asymptotiquement) stable pour φ^T. De plus, le bassin de x_0 en tant que point fixe de φ^T est égal au bassin de x_0 en tant que point fixe de V.*

◄ Il est clair que les propriétés de stabilité pour V entreine les mêmes propriétés pour chacun des flots $\varphi^t, t > 0$.

Réciproquement, supposons que x_0 est Lyapounov stable pour φ^T, avec $T > 0$. Pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage W tel que $\varphi^t(W) \subset U$ pour tout $t \in [0, T]$. Ceci découle de la compacité de $[0, T]$ et de la continuité de l'application $(t, x) \longmapsto \varphi^t(x)$.

Comme x_0 est Lyaounov stable pour φ^T, il existe un voisinage W' tel que $\varphi^{nT}(W') \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$. On déduit que $\varphi^t(W') \subset U$ pour tout $t \geqslant 0$.

Finalement, si l'orbite $x(t) = \varphi^t(x)$ converge vers x_0, il en est clairement de même de la suite $n \longmapsto x(nT)$. Réciproquement, supposons que la suite $x(nT)$ converge vers x_0. Pour tout voisinage U de x_0, on a vu qu'il existe un voisinage W pour lequel $\varphi^t(W) \subset U$ pour tout $t \in [0, T]$. Il existe N tel $x(nT) \in W$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui implique que $x(t) \in U$ pour tout $t \geqslant NT$. ►

On manipulera dans la suite des inégalités différentielles, et on utilisera le résultat suivant (Lemme de Gronwall) :

Lemme 3.2. *Soit $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soient $x(t)$ et $y(t) : [0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables satisfaisant*

$$x'(t) < f(t, x(t)) \quad , \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

pour tout $t \in [0, T[$ et $x(0) \leqslant y(0)$. Alors $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in]0, T[$.

◄ Si la conclusion n'est pas satisfaite, alors il existe un intervalle maximal non vide $]0, s[, s < T$ sur lequel $x < y$ (dans le cas où $x(0) = y(0)$, ceci découle de l'inégalité $x'(0) < f(0, x(0)) = f(0, y(0)) = y'(0)$). Au temps s, on a alors $y(s) = x(s)$, et donc $y'(s) \leqslant x'(s)$. C'est une contradiction puisque

$$x'(s) < f(s, x(s)) = f(s, y(s)) = y'(s). ►$$

Nous utiliserons principalement le :

Corollaire 3.3. *Soit $x(t)$ une fonction dérivable telle que $x'(t) \leqslant bx(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, avec $b \in \mathbb{R}$. Alors $x(t) \leqslant x(0)e^{bt}$ pour tout $t \geqslant 0$.*

◄ Pour $a > 0$, on pose $y_a(t) = (x(0) + at)e^{bt}$. On a $y_a'(t) = by_a(t) + ae^{bt}$. Le lemme précédent, appliqué à la fonction $f(t, x) = ax + ae^{bt} > ax$, implique que $x(t) < y_a(t)$ pour tout $t > 0$ et tout $a > 0$. À la limite $a \longrightarrow 0$ on déduit que $x(t) \leqslant x(0)e^{bt}$. ►

Plus généralement, on peut obtenir une version avec inégalités larges du Lemme sous des hypothèses de régularité supplémentaires :

Lemme 3.4. *Soit $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitz. Soient $x(t)$ et $y(t) : [0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables satisfaisant*

$$x'(t) \leqslant f(t, x(t)) \quad , \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

pour tout $t \in [0, T[$ et $x(0) \leqslant y(0)$. Alors $x(t) \leqslant y(t)$ pour tout $t \in [0, T[$.

◄ On fixe $S \in]0, T[$. On considère la solution $y_a(t)$ de l'équation $y_a'(t) = f(t, y_a(t)) + a$ qui vérifie $y_a(0) = y(0)$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette solution est définie au delà du temps S pour a petit, et la fonction

$a \longmapsto y_a(S)$ est continue en $a=0$. Pour chaque $a>0$, on déduit du lemme précédent (appliqué à la fonction $f+a$) que $x(S)<y_a(S)$. À la limite $a \longrightarrow 0$, on déduit donc que $x(S) \leqslant y(S)$. ►

Pour donner un analogue des contractions en termes de champs de vecteurs, on commence par la remarque suivante :

Lemme 3.5. *Soit V un champ de vecteurs Lipschitz complet sur un espace de Hilbert E. Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*
— *Le flot φ^t est e^{tb}-Lipschitz pour tout $t \geqslant 0$*
— *$\langle V(x)-V(y), x-y\rangle \leqslant b\|x-y\|^2$ pour tous x et y.*

◄ Un calcul simple montre que

$$\frac{d}{dt}\|\varphi^t(x)-\varphi^t(y)\|^2 = 2\langle V(\varphi^t(x)) - V(\varphi^t(y), \varphi^t(x)-\varphi^t(y)\rangle.$$

Si l'on suppose le premier point, alors $\|\varphi^t(x)-\varphi^t(y)\|^2 \leqslant e^{2tb}\|x-y\|^2$ pour tout $t \geqslant 0$, avec égalité en $t=0$, donc

$$2\langle V(x)-V(y), x-y\rangle = \frac{d}{dt}_{|t=0}\|\varphi^t(x)-\varphi^t(y)\|^2 \leqslant 2b\|x-y\|^2.$$

Réciproquement, en supposant le second point, la fonction $f(t) := \|\varphi^t(x)-\varphi^t(y)\|^2$ vérifie l'inégalité $f'(t) \leqslant 2bf(t)$, ce qui entraine que $f(t) \leqslant f(0)e^{2bt}$ par le Lemme de Gronwall. ►

Proposition 3.6. *Soit V un champ de vecteur de l'espace de Hilbert E. Supposons qu'il existe $a>0$ tel que*

$$\langle V(x)-V(y), x-y\rangle \leqslant -2a\|x-y\|^2$$

pour tous x, y. Alors Le champ V admet un unique point fixe, qui est asymptotiquement stable et attire toutes les orbites. Le champ V est positivement complet et ses flots $\varphi^t, t>0$ sont des contractions.

◄ Soit $x(t) : [0,T[\longrightarrow E$ une orbite maximale. Montrons pour commencer que $T=+\infty$. Si T est fini, on écrit par exemple $\|x(S+t)-x(S)\| \leqslant e^{-aS}\|x(t)-x(0)\| \leqslant \|x(T-S)-x(0)\|$ pour tout $t \in [0, T-S[$. Comme la fonction $t \longmapsto \|x(t)-x(0)\|$ tend vers 0 en 0, ceci implique que la courbe $x(t)$ a une limite en T, ce qui contredit la maximalité.

Le champ V est donc positivement complet, ses flots $\varphi^t, t>0$ sont e^{-ta}-Lipschitz par les calculs ci-dessus. Soit x_0 l'unique point fixe de φ^1. C'est alors l'unique point fixe de $\varphi^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, l'orbite $x(t)$ associée est périodique de période $1/n$ pour tout n, c'est donc un point fixe : $V(x_0)=0$. Il est alors évident que toutes les orbites convergent vers x_0. ►

Si f est une fonction de classe C^1, alors les points suivants sont évidemment équivalents :
— $f \circ \varphi^t \leqslant f$ pour tout $t \geqslant 0$.
— $df \cdot V \leqslant 0$.
On dit alors que f est une fonction de Lyapounov. Il n'est donc pas nécessaire de déterminer le flot pour vérifier que f est une fonction de Lyapounov.

Théorème 3.7. *Soit x_0 un point fixe du champ de vecteurs V.*

Si il existe une fonction de Lyapounov $f : U \longrightarrow [0,\infty)$, de classe C^1 sur un voisinage U de x_0, qui vérifie $f(x_0)=0$ et telle que les fonctions f et $-df \cdot V$ sont strictement positives sur $U-\{x_0\}$, alors x_0 est asymptotiquement stable.

Réciproquement, si x_0 est asymptotiquement stable, de bassin B, alors il existe une fonction de Lyapounov $f : X \longrightarrow [0,1]$, de classe C^∞, telle que $f(x_0)=0$, $f \in]0,1[$ sur $B-\{x_0\}$, $df \cdot V<0$ sur $B-\{x_0\}$, et $f=1$ sur $X-B$.

◄ Le premier énoncé découle du cas des applications.

Montrons le second énoncé. Le point x_0 est un point fixe asymptotiquement stable pour φ^1 dont le bassin est B. Il existe donc une fonction de Lyapounov $g : X \longrightarrow [0,1]$, de classe C^∞, pour φ_1, telle que $g \circ \varphi^1 - g < 0$ sur $B-\{x_0\}$, $g^{-1}(0)=\{x_0\}$, $g^{-1}(1)=X-B$.

On pose alors $f=\int_0^1 g\circ\varphi^s ds$, c'est une fonction C^1. On a

$$\begin{aligned}(df \cdot V)(x) &= \int_0^1 dg_{\varphi^s(x)} \circ d\varphi^s_x \cdot V(x)ds = \int_0^1 dg_{\varphi^s(x)} \cdot V(\varphi^s(x))ds = \int_0^1 \frac{d}{ds}(g\circ\varphi^s(x))ds \\ &= (g\circ\varphi^1 - g)(x).\end{aligned}$$

Si V n'est que C^1, la fonction f n'est a priori que C^1, mais elle peut être régularisée, comme dans le cas des applications. Pour ceci, on considère d'abord une fonction continue strictement positive $\epsilon : B - A \longrightarrow]0, \infty)$ telle que $df \cdot V < -2\epsilon|V|$, $f > 2\epsilon$ et $f < 1 - 2\epsilon$ sur $B - A$. Alors, il existe une fonction f_1, de classe C^∞, telle que $|f - f_1| \leqslant \epsilon$ et $|df - df_1| \leqslant \epsilon$. La fonction f_1 vérifie encore $df_1 \cdot V < 0$ sur $B - A$, et elle se prolonge en une fonction continue sur X par les valeurs 0 sur A et 1 sur $X - B$. On régularise alors f_1 en posant $f_2 = \phi \circ f_1$, où $\phi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ est une fonction strictement croissante "assez plate" en 0 et en 1. ►

Comme dans le cas des applications, le linéarisé $L := dV_{x_0}$ donne des informations utiles sur la dynamique au voisinage du point fixe x_0. L'équation différentielle linéaire $v'(t) = L(V(t))$ est en effet une bonne approximation de l'équation $x'(t) = V(x(t))$ au voisinage du point x_0. Le flot de cette équation linéarisée est e^{tL}. Comme les valeurs propres de e^{tL} sont $e^{t\lambda}$, où λ est une valeur propre de L, on s'attend à un comportement asymptotiquement stable si $|e^{t\lambda}| < 1$ pour toute valeur propre λ de L, c'est à dire si toutes les valeurs propres de L ont des parties imaginaires strictement négatives.

Dans le cas où X est une variété, il n'est pas complètement évident que L est bien défini en tant qu'endomorphisme de $T_{x_0}X$. Si ϕ et ψ sont deux cartes de X en x_0, on peut considérer les représentants $V_\phi = \phi_* V$ et $V_\psi = \psi_* V$ de V dans ces cartes. On peut alors calculer les linéarisés dans les cartes, $L_\phi = d(V_\phi)_0$ et $L_\psi = d(V_\psi)_0$. Ce sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ et la question est de savoir si ils représentent le même endomorphisme de $T_{x_0}X$, c'est à dire si $L_\psi \circ df_0 = df_0 \circ L_\phi$, en notant $f = \psi \circ \phi^{-1}$. On a $V_\psi = f_* V_\phi$, c'est à dire que $V_\psi(f(x)) = df_x \cdot V_\phi(x)$. On différentie en $x = 0$, ce qui donne

$$L_\psi \circ df_0 = df_0 \cdot L_\phi + d^2 f_0 \cdot V_\phi(0).$$

On a donc bien l'égalité voulue si (et seulement si) $V_\phi(0) = 0$, c'est à dire si $V(x_0) = 0$. Il résulte des considération ci-dessus que le linéarisé L d'un champ de vecteur est bien défini en tant qu'endomorphisme de $T_{x_0}X$ lorsque x_0 est un point fixe de V.

On peut aussi définir ce linéarisé L sans passer par les cartes en utilisant le flot $\varphi^t(x)$, qui est défini pour tout t dans un voisinage de x_0. Comme $\varphi^t(x_0) = x_0$, on peut définir $G_t := d\varphi^t_{x_0}$. C'est un groupe d'isomorphismes de $T_{x_0}X$, c'est à dire que $G^0 = Id$ et $G^{t+s} = G^t \circ G^s$. Il existe donc un endomorphisme L de $T_{x_0}X$ tel que $G^t = e^{tL}$, c'est le linéarisé de V en 0. Au delà de ces questions de définitions, on retiendra l'expression

$$d(\varphi^t)_{x_0} = e^{tL}$$

qui relie le linéarisé du champ de vecteur à la différentielle de son flot.

Théorème 3.8. *Soit x_0 un point fixe du champ de vecteur V. Soit L le linéarisé de V en x_0, et soit χ le supremum des parties réelles des éléments du spectre de L.*

Si $\chi < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable. On dit que le point fixe est linéairement stable.

Si $\chi > 0$, alors x_0 n'est pas Lyapounov stable, donc pas asymptotiquement stable.

◄ Nous avons vu que le champ de vecteurs est Lyapounov ou asymptotiquement stable si et seulement si le flot φ^1 l'est. Comme $d(\varphi^1)_{x_0} = e^L$, le rayon spectral du linéarisé de φ^1 est égal à $R = e^\chi$. ►

Comme dans le cas des applications, il est utile d'introduire des normes adaptées à la dynamique.

Lemme 3.9. *Soit L une application linéaire continue de l'espace de Hilbert H. Supposons qu'il existe un intervalle $[a', b']$ qui contient les parties réelles des éléments du spectre de L, et soit $]a, b[$ un intervalle ouvert contenant $[a', b']$. Alors il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur H, qui engendre une norme équivalente à la norme initiale, et tel que*

$$a(v, v) \leqslant (Lv, v) \leqslant b(v, v)$$

pour tout $v \in H$.

◄ Le rayon spectral de e^L est strictement inférieur à e^b donc par la formule du rayon spectral il existe $T > 0$ pour lequel $\|e^{TL}\| < e^{Tb}$ (norme initiale sur E). On pose

$$[v, w] = \int_0^T e^{-2tb} \langle e^{tL} v, e^{tL} w \rangle dt$$

et on calcule

$$\begin{aligned} 2[Lv, v] &= 2\int_0^T e^{-2tb} \langle e^{tL} Lv, e^{tL} v \rangle dt = \int_0^T e^{-2tb} \frac{d}{dt} \langle e^{tL} v, e^{tL} v \rangle dt \\ &= 2b \int_0^T e^{-2tb} \langle e^{tL} v, e^{tL} v \rangle dt + e^{-2Tb} \langle e^{TL} v, e^{TL} v \rangle - \langle v, v \rangle \\ &\leqslant 2b[v, v]. \end{aligned}$$

Ensuite, on choisit $S > 0$ tel que $|e^{-SL}| < e^{-Sa}$ (norme associée à $[.,.]$) et on pose

$$(v, w) = \int_0^S e^{2ta}[e^{-tL}v, e^{-tL}w]dt.$$

Le même calcul que ci-dessus montre que $(-Lv, v) \leqslant -a(v, v)$. De plus,

$$(Lv, v) = \int_0^S e^{2ta}[Le^{-tL}v, e^{-tL}v]dt \leqslant \int_0^S be^{2ta}[e^{-tL}v, e^{-tL}v]dt = b(v, v). \blacktriangleright$$

On peut montrer comme dans le cas d'une application que la dynamique au voisinage d'un point fixe asymptotiquement stable est topologiquement conjuguée à la dynamique du linéarisé. En fait, le résultat prend une forme plus forte dans le cas des flots : il n'y a, à conjugaison topologique près, qu'un seul point fixe linéairement stable en dimension d.

Théorème 3.10. *Soient V_1 et V_2 deux champs de vecteurs C^1 sur des variétés X_1 et X_2 de dimension d. Soient x_1 et x_2 des points fixes asymptotiquement stables de V_1 et V_2, de bassins U_1 et U_2. Il existe un homéomorphisme $\phi : U_1 \longrightarrow U_2$ qui conjugue les flots de V_1 et V_2. L'homéomorphisme ϕ est C^1 sur $U_1^* := U_1 - \{x_1\}$, et satisfait $d\phi_x \cdot V_1(x) = V_2(\phi(x))$ pour tout $x \in U_1^*$.*

Le résultat implique en particulier que le bassin est toujours homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, qui est la bassin de 0 pour le champ de vecteurs $V_0(x) = -x$ sur $\mathbb{R}^d$.

◄ On va montrer que V_1 est conjugué à V_0 sur U_1.

On identifie localement (X_1, x_1) à $(\mathbb{R}^d, 0)$ par une carte en x_1, et on munit l'espace $\mathbb{R}^d$ d'un produit scalaire pour lequel $\langle V_1(x), x\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$ au voisinage de 0, avec $b < 0$, on note $|.|$ la norme correspondante. Pour $r > 0$ assez petit, la sphère $S = S(0, r)$ (que l'on peut aussi considérer comme une sous variété de X_1 par l'identification ci-dessus) est une section de Poincaré pour V_1 et pour V_0. On note aussi $B = B(0, r)$. Considérons l'application

$$F : \mathbb{R} \times S \ni (t, x) \longmapsto \varphi^t(x) \in U_1^* = U_1 - \{x_1\}$$

où φ est le flot de V_1. Cette application induit une bijection de $\mathbb{R} \times S$ dans U_1^*, qui est un difféomorphisme local et donc un difféomorphisme.

Montrons la bijectivité. Il s'agit de vérifier que toute orbite $x(t)$ dans le bassin coupe S une fois et une seule. On constate d'abord que tout orbite qui contient des points dans B et des points hors de B coupe S, par connexité. Comme toute orbite tend vers x_1, toute orbite du bassin contient des points dans B. Donc les seules orbites qui pourraient ne pas couper S sont les orbites entièrement contenues dans B. On utilise finalement l'inégalité $\langle V_1(x), x\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$, satisfaite dans un voisinage de $\bar{B}$, pour montrer, à la fois que toute orbite différente de celle de x_1 sort de B (en grand temps négatif), et aussi que chaque orbite intersecte S au plus une fois.

De la même façon, l'application

$$G : \mathbb{R} \times S \ni (t, x) \longmapsto e^{-t}x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$$

est un difféomorphisme. L'application

$$F \circ G^{-1} : \mathbb{R}^d - \{0\} \ni x \longmapsto \varphi^{-\ln|x|}(x/|x|) \in U_1^*$$

est donc un difféomorphisme. Comme 0 est asymptotiquement stable pour V_1, l'application ϕ qui est égale à $F \circ G^{-1}$ hors de 0 et à 0 en 0 est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans U_1. On constate que

$$\phi(e^{-t}x) = \varphi^{t-\ln|x|}(x/|x|) = \varphi^t(\phi(x)),$$

c'est à dire que ϕ conjugue les flots de V_1 et de V_0.

On trouve de la même façon une conjugaison topologique $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow U_2$ entre V_0 et V_2, et donc une conjugaison topologique $\phi \circ \psi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$ entre V_2 et V_1. ►

L'analogue naturel de cet énoncé pour les applications n'est pas vrai comme le montre l'exercice ci-dessous.

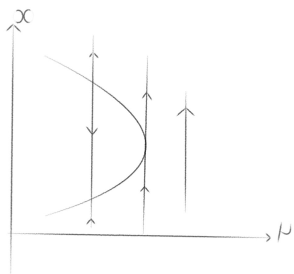
Exercice 3.1. *Montrer que les dynamiques des applications $x \longmapsto x/2$ et $x \longmapsto -x/2$ sur $\mathbb{R}$ ne sont pas topologiquement conjuguées.*

Exercice 3.2. *Considérons le champ de vecteurs* $V(x, y) = (y, -x - y^3)$.
Le linéarisé permet-il de statuer sur la stabilité asymptotique de 0 *?*
En considérant la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, *montrer que le point fixe* 0 *est asymptotiquement stable.*

Exercice 3.3. *Soit* A *une matrice* $d \times d$. *Montrer l'équivalence entre :*
Toutes les solutions de l'équation linéaire $x'(t) = A \cdot x(t)$ *sont bornées.*
La matrice A *est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$ *et ses valeurs propres sont imaginaires pures.*
Il existe un produit scalaire pour lequel A *est antisymétrique.*

4 Bifurcations

Nous avons vu qu'un point fixe non dégénéré survit à une petite perturbation de la dynamique. Nous étudions ici ce qui peut se passer dans le cas des points fixes dégénérés. Un exemple est la famille d'applications $\varphi(\mu, x) = \mu + x + x^2$, dont le comportement dynamique est résumé dans le diagramme ci-dessous.



Ce comportement est typique.

Théorème 4.1. *Soit $\varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une famille C^2 d'applications de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0,0) = 0$, $\partial_x \varphi(0,0) = 1$, $\partial_\mu \varphi(0,0) \neq 0$. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $\theta(x)$ telle que $\varphi(\theta(x), x) = x$ pour tout $x \in I$, $\theta(0) = 0$, et $\theta'(0) = 0$. De plus, pour $\mu \in I$ et $x \in I$, le point x est fixé par φ_μ si et seulement si $\theta(x) = \mu$.*

Si on suppose que $\partial^2_{xx} \varphi(0,0)$ est non nul et du même signe que $\partial_\mu \varphi(0,0)$, alors $\theta''(0) < 0$. Alors, pour $\mu < 0$ dans I, l'application φ_μ a deux points fixes dans I (l'un linéairement stable et l'autre linéairement instable), pour $\mu = 0$ elle a un point fixe, et pour $\mu > 0$ elle n'a pas de point fixe.

Si le signe de $\partial^2_{xx} \varphi(0,0)$ est opposé à celui de $\partial_\mu \varphi(0,0)$ alors $\theta''(0) > 0$ et on a les mêmes propriétés en échangeant $\mu > 0$ et $\mu < 0$.

◄ Le premier point est une application directe du théorème des fonctions implicites. En dérivant la relation $\varphi(\theta(x), x) = x$, on obtient

$$\partial_\mu \varphi(\theta(x), x) \cdot \theta'(x) + \partial_x \varphi(\theta(x), x) = 1.$$

En $x = 0$, ceci implique que $\theta'(0) = 0$. On dérive alors une seconde fois, en $x = 0$, et on obtient :

$$\partial_\mu \varphi(\theta(x), x) \cdot \theta''(x) + \partial^2_{xx} \varphi(\theta(x), x) = 0,$$

dont on déduit les propriétés voulues sur le signe de $\theta''(0)$. Pour déterminer la stabilité linéaire des points fixes obtenus, on doit déterminer le multiplicateur $\lambda(x) := \partial_x \varphi(\theta(x), x)$. On calcule que $\lambda'(0) = \partial^2_{xx} \varphi(0,0)$. Lorsque cette dérivée est non-nulle, on conclut que l'un des points fixes est linéairement stable, l'autre linéairement instable. ►

Dans de nombreuses applications, on considère une famille φ_μ dont toutes les applications préservent l'origine, c'est à dire que $\varphi(\mu, 0) = 0$.

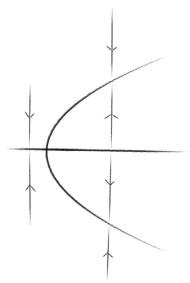
Théorème 4.2. *Soit $\varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une famille C^3 d'applications de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(\mu, 0) = 0$ pour tout μ et $\partial_x \varphi(0,0) = 1$, $\partial^2_{\mu x} \varphi(0,0) \neq 0$.*

Le diagramme de bifurcation au voisinage de $(0,0)$ est localement la réunion de deux courbes C^2 qui se coupent transversalement en $(0,0)$ et dont l'une est l'axe horizontal.

Si $\partial^2_{xx} \varphi(0,0) \neq 0$, alors la seconde branche du diagramme de bifurcation est le graphe d'une application $\mu \longmapsto y(\mu)$. Il existe donc, pour $\mu \neq 0$ assez petit, exactement deux points fixes dans un voisinage de 0.

Si $\partial^2_{xx} \varphi(0,0) = 0$ alors la seconde branche est tangente à l'axe vertical en $(0,0)$. Dans ce cas, si $\partial^3_{xxx} \varphi(0,0)$ est non nul et du signe de $\partial^2_{\mu x} \varphi(0,0)$, alors la seconde branche contient deux orbites pour chaque $\mu < 0$ et aucune pour $\mu > 0$.

Suivant les signes des dérivées, on peut aussi déterminer la stabilité des points fixes obtenus. Par exemple, si $\partial^2_{\mu x} \varphi(0,0) > 0$ et $\partial^3_{xxx} \varphi(0,0) < 0$, alors le point fixe 0 est linéairement stable pour $\mu < 0$ et linéairement instable pour $\mu > 0$. Les points fixes de la seconde branche sont linéairement stables. On a donc, pour $\mu < 0$ un unique point fixe qui est linéairement stable. Pour $\mu > 0$, ce point fixe devient linéairement instable, mais deux points fixes linéairement stables nouveaux apparaissent. C'est la situation représentée ci-dessous.



◄ On a $\varphi(\mu, x) = x\psi(\mu, x)$, où

$$\psi(\mu, x) = \int_0^1 \partial_x \varphi(\mu, sx) ds$$

est une fonction C^2 qui vérifie $\psi(0,0) = 1$. L'équation $\varphi(\mu, x) = x$ est équivalente à l'équation $\psi(\mu, x) = 1$. On vérifie en dérivant l'égalité $\varphi = x\psi$ que $k\partial_x^k \psi(0,0) = \partial_x^k \varphi(0,0)$ pour tout $k \geqslant 0$, et que $\partial_\mu \psi(0,0) = \partial_{\mu x}^2 \varphi(0,0)$. La preuve se termine alors comme la précédente. ►

Nous avons décrit des bifurcations pour des applications d'une variable réelle. Nous allons maintenant expliquer pourquoi les bifurcation les plus simples en dimension supérieure présentent des diagrammes de bifurcation similaires.

On considère pour ceci une famille d'applications φ_μ de $\mathbb{R}^d$, de classe C^r, et telle que $\varphi_0(0) = 0$. Soit $L = \partial_x \varphi(0,0)$ le linéarisé de φ_0 en 0. Soit E l'espace caractéristique de L associé à la valeur propre 1. Soit F la somme des autres espaces caractéristiques de L. C'est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^d$ qui est invariant par L. L'énoncé ci-dessous permet de réduire l'étude des bifurcations de la famille φ_μ à l'étude des bifurcations d'une famille réduite ψ_μ d'applications de E de classe C^r. On note $x = (y, z)$ la décomposition des points de $\mathbb{R}^d$ associée à la décomposition $\mathbb{R}^d = E \oplus F$. On note φ_E, φ_F les composantes de φ.

Proposition 4.3. *Il existe une application locale $Z : \mathbb{R} \times E \longrightarrow F$, de classe C^r, qui vérifie $\partial_y Z(0,0) = 0$ et qui est telle que le diagramme de bifurcation de φ est l'image par $id \times Z$ du diagramme de bifurcation de la famille*

$$\psi(\mu, y) := \varphi_E(\mu, y, Z(\mu, y)).$$

Autrement dit, localement, le point $x = (y, z)$ est un point fixe de φ_μ si et seulement si $z = Z(\mu, y)$ et si y est un point fixe de ψ_μ.

Cette méthode est appelée réduction de Lyapounov-Schmidt. Elle permet de construire, localement, une sous variété tangente à $\mathbb{R} \times E$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ qui contient tous les points fixes. Attention, cette variété n'est pas forcément invariante par φ.

◄ L'équation $\varphi(u, x) = x$ est équivalente au système

$$\begin{cases} \varphi_E(\mu, y, z) = y \\ \varphi_F(\mu, y, z) = z \end{cases}.$$

Comme $\partial_z \varphi_F(0,0,0)$ n'a pas 1 pour valeur propre, la seconde équation se résout localement par le théorème des fonctions implicites. Il existe donc une fonction $Z(\mu, y)$ telle que la seconde équation est satisfaite si et seulement si $z = Z(\mu, y)$. De plus, comme $\partial_y \varphi_F(0,0,0) = 0$, on a $\partial_y Z(0,0) = 0$. Les solutions du système sont alors les points de la forme $(\mu, y, Z(\mu, y))$, où (μ, y) satisfait l'équation $\varphi_E(\mu, y, Z(\mu, y) = y$, c'est à dire où y est un point fixe de ψ_μ. ►

Les cas les plus simples sont ceux où E est de dimension 1.

Proposition 4.4. *Supposons que φ est une famille C^2 et que l'espace propre E est de dimension 1. Si $\partial_\mu \varphi_E(0,0)$ et $\partial_{yy}^2 \varphi_E(0,0)$ sont non nuls et de même signe, alors le diagramme de bifurcation est localement une courbe C^2 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, tangente à $\{0\} \times E$, qui contient deux points pour chaque $\mu < 0$ et aucun point pour $\mu > 0$.*

◄ On applique le théorème 4.1 à l'application réduite ψ. On calcule pour ceci

$$\partial_\mu \psi(0,0) = \partial_\mu \varphi_E(0,0) + \partial_z \varphi_E(0,0) \circ \partial_y Z(0,0) = \partial_\mu \varphi_E(0,0)$$

et

$$\partial_{yy}^2 \psi(0,0) = \partial_{yy}^2 \varphi_E(0,0) + 2\partial_{yz}^2 \varphi_E(0,0) \circ \partial_y Z(0,0) + \partial_z \varphi_E(0,0) \partial_{yy}^2 Z(0,0) = \partial_{yy}^2 \varphi_E(0,0)$$

puisque $\partial_z \varphi_E(0,0) = 0$. ▶

On considère maintenant le cas des familles fixant l'origine, c'est à dire que $\varphi(\mu, 0) = 0$.

Proposition 4.5. *Supposons que φ est une famille C^3 qui fixe l'origine, et que l'espace propre E est de dimension 1. Si $\partial^2_{\mu y}\varphi_E(0,0)$ est non-nul, alors le diagramme de bifurcation est localement la réunion de la courbe $\mathbb{R} \times \{0\}$ et d'un seconde branche C^2.*

Si $\partial^2_{yy}\varphi_E(0,0) \neq 0$, alors la seconde branche du diagramme de bifurcation est le graphe d'une application $\mu \longmapsto Y(\mu)$ de classe C^2. Il existe donc, pour $\mu \neq 0$ assez petit, exactement deux points fixes dans un voisinage de 0.

Si $\partial^2_{yy}\varphi_E(0,0) = 0$, alors la seconde branche du diagramme de bifurcation est tangente à $\{0\} \times E$.

On peut caractériser plus précisément la forme de la seconde branche comme dans le théorème 4.2 en fonction de la quantité $\partial^3_{yyy}\psi(0,0)$. Mais l'expression de cette dérivée troisième en fonction de φ n'est pas simple.
◀ On applique le théorème 4.2 à l'application réduite ψ, après avoir vérifié que $\partial^2_{x\mu}\psi(0,0) = \partial^2_{x\mu}\varphi_E(0,0)$. ▶

On rencontre par exemple le cas ci-dessus lorsqu'on considère un point fixe non dégénéré qui admet -1 comme valeur propre simple. Soit φ_μ une famille d'applications de $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi_0(0) = 0$, telle que 1 n'est pas valeur propre du linéarisé, et telle que -1 est valeur propre simple. Comme le point fixe 0 est alors non-dégénéré pour φ_0, il existe localement une unique courbe régulière $q(\mu)$ de points fixes. Mais 0 est un point fixe dégénéré pour φ_0^2, donc il peut exister d'autres points de période 2 au voisinage de $(0,0)$. On note $L(\mu)$ le linéarisé de φ_μ en $q(\mu)$, E la droite propre de $L(0)$ associée à la valeur propre -1, et F le supplémentaire de E invariant par $L(0)$. On a alors

Proposition 4.6. *Soit $\varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une famille C^3 d'applications de $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(0,0) = 0$ et -1 est valeur propre de $L(0) = \partial_x\varphi(0,0)$, de multiplicité 1. On suppose que $\partial_{\mu|\mu=0}(\partial_y \varphi_E(\mu, q(\mu)) \neq 0$. Alors il existe, localement, une branche de points périodiques de période 2, qui est tangente à $\{0\} \times E$.*

◀ Soit $q(\mu)$ la famille régulière locale de points fixes de φ_μ. Pour se ramener au cadre du résultat précédent, on considère la famille

$$\phi(\mu, x) = \varphi(\mu, \varphi(\mu, x + q(\mu)) - q(\mu).$$

Toutes les applications de cette famille fixent 0, mais 0 est un point fixe dégénéré de ϕ_0. On a

$$\partial_x\phi(\mu, x) = \partial_x\varphi(\mu, \varphi(\mu, x + q(\mu))) \circ \partial_x\varphi(\mu, x + q(\mu)),$$

en particulier $\partial_x\phi(\mu, 0) = \partial_x\varphi(\mu, q(\mu)) \circ \partial_x\varphi(\mu, q(\mu))$. Le linéarisé $\partial_x\phi(0,0)$ a donc 1 pour valeur propre simple, d'espace propre E, et il préserve le supplémentaire F. On doit montrer que $\partial^2_{\mu y}\phi_E(0,0)$ est non nul. En notant π_E la projection sur E, le réel $\partial_y\phi_E(\mu, 0)$ est le coefficient $\pi_E \circ L(\mu)^2_{|E}$. On a donc

$$\partial^2_{\mu y}\phi_E(0,0) = \pi_E \circ L(0) \circ L'(0)_{|E} + \pi_E \circ L'(0) \circ L(0)_{|E}.$$

Les hypothèses sur $L(0)$ impliquent que $\pi_E \circ L(0) = -\pi_E$, et que $L(0)_{|E} = -Id$. On obtient donc

$$\partial^2_{\mu y}\phi_E(0,0) = -2\pi_E \circ L'(0)_{|E} = -2\partial_{\mu|\mu=0}(\partial_y\varphi_E(\mu, q(\mu)) \neq 0.$$

On a donc une seconde branche de points fixes de ϕ_μ, qui sont des points de période 2 pour φ_μ. Pour chaque valeur de μ, il y a un nombre pair de tel points, et on est donc dans le second cas de la proposition précédente, avec une branche tangente à $\{0\} \times E$. ▶

Il est intéressant de préciser un peu ce qui précède en dimension 1.

Exercice 4.1. *Soit $\varphi(\mu, x)$ une famille C^3 d'applications de $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(0,0) = 0$ et $\partial_x\varphi(0,0) = -1$.*

On suppose, pour fixer les idées, que $\partial^2_{\mu x}(0,0) > 0$ et que

$$2\partial^3_{xxx}\varphi(0,0) + 3(\partial^2_{xx}f(0,0))^2 > 0.$$

Il existe alors un branche régulière $q(\mu)$ de points fixes. Pour $\mu < 0$, le point fixe $q(\mu)$ est asymptotiquement stable et il est localement le seul point périodique.

Pour $\mu > 0$, le point fixe $q(\mu)$ est linéairement instable, et il existe une orbite périodique de période 2, qui est linéairement stable.

On parle de bifurcation de doublement de période, car l'élément stable est un point de période 1 pour $\mu < 0$ et un point de période 2 pour $\mu > 0$.

Le résultat ci-dessus montre que la condition de non dégénérescence, qui interdit l'existence de bifurcations à période fixée, ne suffit pas pour autant à garantir l'absence de bifurcations d'orbites périodiques lorsqu'on considère simultanément toutes les périodes. Ce type de phénomène peut se produire dès qu'une valeur propre est une racine complexe de l'unité, ou simplement est de module 1. Le cas des racines non réelles est un peu plus délicat à étudier, car il ne se produit pas en dimension 1. On l'illustre en considérant des familles holomorphes.

Proposition 4.7. *Soit $\varphi_\mu(x) = \varphi(\mu, x) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une famille holomorphe d'applications de $\mathbb{C}$ fixant l'origine. Supposons que $\lambda = \partial_z\varphi(0, 0)$ est de module 1, et supposons que $\partial^2_{\mu z}\varphi(0, 0) \neq 0$. Il existe alors, pour tout $\epsilon > 0$ une valeur μ du paramètre telle que $|\mu| \leqslant \epsilon$ et pour laquelle l'application φ_μ admet une orbite périodique contenue dans la boule $B(0, \epsilon)$.*

◄ On considère dans un premier temps le cas où λ est une racine de l'unité, $\lambda^k = 1$, $k \geqslant 1$. On cherche alors des orbites de périodes k. On écrit pour ceci $\varphi^k_\mu = zf(\mu, z)$, avec $f(0, 0) = \lambda^k = 1$. On a $f(\mu, 0) = \partial_z(\varphi^k_\mu(0)) = (\partial_z\varphi(\mu, 0))^k$, et donc

$$\partial_\mu f(0, 0) = k\lambda^{k-1}\partial^2_{\mu z}\varphi(0, 0) \neq 0.$$

L'équation $f(\mu, z) = 0$ peut donc être résolue par le théorème des fonctions implicites : il existe une fonction holomorphe $u(z)$ telle que $f(\mu, z) = 1$ si et seulement si $\mu = u(z)$. Il existe donc des couples (μ, z) arbitrairement proches de $(0, 0)$ pour lesquels $\varphi^k_\mu(z) = z$.

Supposons maintenant que λ n'est pas une racine de l'unité. L'application $\mu \longmapsto \partial_z\varphi_\mu(\mu, 0)$ est un difféomorphisme local. Il existe donc μ_1 arbitrairement petit pour lequel $\lambda_1 := \partial_z\varphi(\mu_1, 0)$ est une racine de l'unité et $\partial_{\mu z}\varphi(\mu_1, 0) \neq 0$. On peut appliquer ce qui précède pour trouver des (μ_2, z_2) arbitrairement proches de $(\mu_1, 0)$ pour lesquels $\varphi^k(\mu_2, z_2) = z_2$ (où k est tel que $\lambda_1^k = 1$). On notera, dans ce second cas, que la période k doit être choisie d'autant plus grande que l'on veut une orbite périodique plus proche de l'origine. ►

On comprend au vu des développements ci-dessus que toute valeur propre de module 1 crée la possibilité de phénomènes de bifurcations d'orbites périodiques (à période non fixée).

On dit qu'un point fixe est hyperbolique si le linéarisé n'a pas de valeur propre de module 1.

Théorème 4.8. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 dont 0 est un point fixe hyperbolique.*

Alors il existe un voisinage U de 0 tel que toute orbite $(x_n), n \in \mathbb{Z}$ contenue dans U est identiquement nulle. En particulier, aucune autre orbite périodique n'est entièrement contenue dans U.

Finalement, si $\varphi(\mu, x)$ est une famille C^1 d'applications telle que $\varphi_0 = \varphi$, alors pour tout μ petit, l'ouvert U contient une unique orbite entière de φ_μ, et cette orbite est un point fixe hyperbolique.

◄ Considérons directement une famille φ_μ. Comme 0 est non dégénéré, il existe une courbe $q(\mu)$ de points fixes de φ_μ.

L'hyperbolicité implique qu'il existe deux sous-espace E^s et E^u, invariants par $L(0)$, et tels que $L_{|E^s}$ et $L^{-1}_{|E^u}$ ont un rayon rayon spectral < 1. Il existe donc des constantes $a < 1$ et une norme Euclidienne sur E telle que $|L^{-1}_{|E^u}| < a$ et $|L_{|E^s}| < a$. Décomposons la matrice $L(\mu, x) := \partial_x\varphi(\mu, x)$ par bloc en

$$L(\mu, x) = \begin{bmatrix} L_{ss}(\mu, x) & L_{su}(\mu, x) \\ L_{us}(\mu, x) & L_{uu}(\mu, x). \end{bmatrix}$$

Fixons $\delta \in]0, 1 - a[$, ce qui implique que $a^{-1} - \delta > 1$. Il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage convexe U de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$|L_{ss}(\mu, x)| < a \quad , \quad |L_{uu}(\mu, x)^{-1}| < a \quad , \quad |L_{su}(\mu, x)| < \delta \quad , \quad |L_{us}(\mu, x)| < \delta \tag{1}$$

pour tout $(\mu, x) \in] - \epsilon, \epsilon[\times U$. On peut supposer de plus en diminuant ϵ que $q(\mu) \in U$ pour tout $\mu \in] - \epsilon, \epsilon[$. Ceci implique que

$$|\varphi^u_\mu(x) - q^u(\mu)| \geqslant a^{-1}|x_u - q^u(\mu)| - \delta|x_s - q^s(\mu)| \quad , \quad |\varphi^s_\mu(x) - q^s(\mu)| \leqslant a|x_s - q^s(\mu)| + \delta|x_u - q^u(\mu)|$$

Si $x = (x_s, x_u)$ est une condition initiale dans U telle que $|x_u - q_u(\mu)| \geqslant |x_s - q_u(\mu)|$ alors $|\varphi^u_\mu(x) - q_u(\mu)| \geqslant |\varphi^s_\mu(x) - q_s(\mu)|$ et

$$|\varphi^u_\mu(x) - q_u(\mu)| \geqslant (a^{-1} - \delta)|x_u - q_u(\mu)|.$$

Comme $a^{-1} - \delta > 1$, ceci implique, si $x \neq q(\mu)$, que l'orbite de x par φ_μ sort de U dans le futur. On montre de la même façon que toute orbite dont la condition initiale $x \neq q(\mu)$ dans U satisfaisant $|x_u - q_u(\mu)| \leqslant |x_s - q_u(\mu)|$ sort de U dans le passé. En conséquence, la seule orbite entièrement contenue dans U est le point fixe $q(\mu)$. ►

L'énoncé ci-dessus et sa preuve s'étendent sans modification au cas où $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un espace de Banach, à condition de donner la définition suivante d'une application linéaire hyperbolique :

On dit que $L : B \longrightarrow B$ est hyperbolique si elle est continue et si il existe un décomposition $B = B^s \oplus B^u$ en deux sous-espaces fermés invariants par L tels que $|L^{-1}_{|B^u}| < a$ et $|L_{|B^s}| < a$, avec $a < 1$. Il est en fait équivalent de demander que le spectre de L soit disjoint du cercle unité.

Exercice 4.2. *Soit L un isomorphisme de B. Supposons qu'il existe une décomposition $B = E^s \oplus E^u$, une norme sur B, et $a > 1$ tels que :*

Pour tout $v = v_s + v_u$ vérifiant $|v_s| \leqslant |v_u|$, on a $|L_s v| \leqslant |L_u v|$ et $|Lv| \geqslant a|v|$;

Pour tout $v = v_s + v_u$ vérifiant $|v_u| \leqslant |v_s|$, on a $|L_u^{-1} v| \leqslant |L_s^{-1} v|$ et $|L^{-1} v| \geqslant a|v|$.

Montrer que L est hyperbolique.

On pourra montrer qu'il existe un application linéaire $A : E^s \longrightarrow E^u$, de norme $\leqslant 1$, dont le graphe est invariant par L.

5 Rotations quasi périodiques

On considère le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. C'est un groupe de Lie Abélien, c'est à dire à la fois une variété et un groupe commutatif, et les opérations de groupe sont différentiables. Les fonctions différentiables sur $\mathbb{T}^d$ s'identifient aux fonctions différentiables de $\mathbb{R}^d$ qui sont $\mathbb{Z}^d$-périodiques.

On le munit $\mathbb{T}^d$ de la distance $d(x,x') = \min_{y,y'} |y'-y|$ où le minimum est pris sur l'ensemble des représentants y et y' de x et x' dans $\mathbb{R}^d$. C'est un espace métrique compact. La distance d est invariante par translations, c'est à dire que $d(x+v,x'+v) = d(x,x')\ \forall v \in \mathbb{T}^d$.

On étudie ici la dynamique d'une translation $\varphi : x \longmapsto x+\omega$ où ω est vu soit comme un élément de $\mathbb{R}^d$ soit comme un élément de $\mathbb{T}^d$ (l'application φ ne dépend que de l'image de ω dans $\mathbb{T}^d$).

Commençons par motiver cette étude en expliquant comment cette dynamique apparaît dans les systèmes linéaires en présence de valeurs propres de module 1. Soit $R(\omega)$ la matrice 2×2 de la rotation d'angle $2\pi\omega$. Soit L La matrice $2d\times 2d$ diagonalisable par blocs 2×2, et dont les blocs diagonaux sont $R(\omega_1),\ldots,R(\omega_d)$. Les valeurs propres complexes de L sont donc les nombres complexes $e^{2i\pi\omega_i}$. Notons (x_i,y_i) les coordonnées de $\mathbb{R}^{2d}$ correspondant à la décomposition par blocs. Les fonctions $n_i : x \longmapsto (x_i^2+y_i^2)$ sont invariante par la dynamique de L, c'est à dire que $n_i(Lx) = n_i(x)$. Pour $r_1,\ldots,r_d > 0$, le tore $T := \{x \in \mathbb{R}^{2d} : n_i(x) = r_i^2\ \forall \text{i}\}$ est donc une sous-variété invariante. On parle de tore car cette sous-variété est difféomorphe à $\mathbb{T}^d$, un difféomorphisme est donné par l'application

$$J : \mathbb{T}^d \ni \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d) \longmapsto (r_1e^{2i\pi\theta_1},\ldots,r_de^{2i\pi\theta_d}) \in \mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}.$$

En restriction à T, la dynamique de L est conjuguée à celle de la translation φ. Plus précisément, on a

$$L\circ J = \varphi\circ J.$$

Nous allons maintenant décrire la dynamique en fonction du vecteur ω. La première remarque, indépendante de ω, est que les orbites sont des translatées les unes des autres. Elles ont donc toutes les mêmes propriétés.

Premier cas, ω rationnel. On dit que ω est rationnel si $\omega \in \mathbb{Q}^d$.

Proposition 5.1. *Si ω est rationnel, alors toutes les orbites sont périodique. Leur période minimale T est le plus petit entier pour lequel $T\omega \in \mathbb{Z}^d$.*

Second cas, ω non résonant. On dit que ω est non résonant si il n'existe aucun vecteur entier non-nul $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $k\cdot\omega \in \mathbb{Z}$.

Théorème 5.2. *Si ω est non résonant, alors toutes les orbites de φ sont denses dans $\mathbb{T}^d$. Réciproquement, si il existe une orbite dense, alors ω est non résonant.*

On utilise quelques lemmes algébriques :

Lemme 5.3. *Soit G un sous-groupe discret non trivial de $\mathbb{R}^d$. Il existe une forme linéaire ℓ telle que $\ell(G) = \mathbb{Z}$.*

◀ On considère une famille $\mathbb{R}^d$-libre maximale $h_1,\ldots h_r$ dans G, $r \geqslant 1$. Le groupe G est alors contenu dans l'espace vectoriel engendré par les h_i. On considère une forme linéaire l sur $\mathbb{R}^d$ telle que $l(h_1) = 1$ et $l(h_i) = 0$ pour $i > 1$. L'image $l(G)$ est un sou-groupe de $\mathbb{R}$. Soit elle est engendré par un réel a, et alors l/a vérifie $l(G) = \mathbb{Z}$, soit elle est dense.

Excluons ce second cas. Si l'image est dense, alors il existe une suite g_n de G tels que $x_1(n) := l_1(g_n)$ est une suite de réels non nuls qui tend vers 0. On écrit alors $g_n = x_1(n)h_1 + \cdots + x_r(n)h_t$. En notant $y_i(n)$ la partie fractionnaire de $x_i(n)$, on remarque que

$$g_n' := x_1(n)h_1 + y_2(n)h_2 + \cdots + y_r(n)h_r$$

appartient à G. La suite g_n' est contenue dans la boule fermée B de centre 0 de rayon $|h_1| + \ldots + |h_r|$, et $l(g_n') = l(g_n) = x_1(n)$. Comme B est compacte, $G\cap B$ est fini, donc $l(g_n') = x_1(n)$ prend ses valeurs parmi un nombre fini de possibilités, ce qui est en contradiction avec le fait que $x_1(n)$ est une suite de réels non nuls qui tend vers 0. ▶

Lemme 5.4. *Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^d$. Si $G \neq \{0\}$ et $G \neq \mathbb{R}^d$, alors il existe une forme linéaire ℓ telle que $\ell(G) = \mathbb{Z}$.*

◄ La somme de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ contenus dans G est contenue dans G. On note E la somme de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ contenus dans G, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenu dans G. Si $G \neq \mathbb{R}^d$, alors $E \neq \mathbb{R}^d$. On considère alors un supplémentaire F de E et l'intersection $G \cap F$, qui est un sous-groupe fermé de F. Ce sous-groupe ne contient aucun sous-espace vectoriel de F.

Montrons que G' est discret dans F. Sinon, il existe une suite $g_n \in G'$ telle que $g_n \longrightarrow 0$. On peut supposer en prenant une sous-suite que les directions $g_n/|g_n|$ convergent vers un vecteur unité $v \in F$. Montrons que la droite $\mathbb{R}v$ est alors contenue dans G, ce qui est une contradiction. Comme $|g_n| \longrightarrow 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une suite a_n d'entiers tels que $a_n|g_n| \longrightarrow t$. Alors, on a $a_n g_n \longrightarrow tv$. Comme G est fermé, ceci implique que $tv \in G$.

Nous avons montré que G' est discret dans F. Par le lemme ci-dessous, il existe alors une forme linéaire non nulle ℓ' sur F telle que $\ell'(G') = \mathbb{Z}$. On prolonge ℓ' en une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{R}^d$ nulle sur E. ►

◄ Terminons la preuve du théorème. On considère la fermeture O de l'orbite de 0. C'est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}^d$. On considère la préimage G de O dans $\mathbb{R}^d$. C'est un sous-groupe fermé qui contient ω et qui contient $\mathbb{Z}^d$. Si $O \neq \mathbb{T}^d$, alors $G \neq \mathbb{R}^d$. Il existe donc une forme linéaire ℓ telle que $\ell(G) = \mathbb{Z}$. Comme $\ell(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{Z}$, la forme linéaire ℓ est à coefficients entiers. Comme $\omega \in G$, on a $\ell(\omega) \in \mathbb{Z}$, ce qui est une relation de résonance pour ω, et donc une contradiction si ω est non-résonant.

La réciproque est beaucoup plus facile. Si $k \in \mathbb{Z}^d$ est une relation de résonance, alors k engendre une application différentiable $f : \theta \longrightarrow k \cdot \theta \mod 1$ de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{T}$, qui est une submersion surjective. L'orbite du point x_0 est contenue dans la fibre $f^{-1}(f(\theta_0))$, qui est une sous variété fermée de $\mathbb{T}^d$ de codimension 1. ►

Nous avons fait tout le travail pour comprendre la structure des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 5.5. *Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^d$ et des éléments $g_1, \ldots, g_k$ de G linéairement indépendants modulo E, tels que G est engendré par E et les g_i.*

◄ On fait la preuve par récurrence sur d. Ou bien $G = 0$, ou bien $G = \mathbb{R}^d$, ou bien il existe une forme linéaire ℓ telle que $\ell(G) = \mathbb{Z}$. On applique l'hypothèse de récurrence au sous groupe $G \cap \ker \ell$ et on ajoute un point g tel que $\ell(g) = 1$. ►

Nous allons maintenant donner une autre preuve du théorème 5.2, qui nous conduira à une propriété plus forte. Il sera utile de considérer sur $\mathbb{T}^d$ des structures supplémentaires. Tout d'abord, nous munissons le tore d'une tribu, qui peut être définie comme la tribu borélienne, ou comme l'ensemble des parties B de $\mathbb{T}^d$ dont la préimage dans $\mathbb{R}^d$ est borélienne. On note qu'alors la bijection $\pi : [0,1[^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ est bi-mesurable entre les tribus boréliennes. On munit $\mathbb{T}^d$ d'une mesure de probabilité λ, que nous appellerons mesure de Lebesgue (ou mesure de Haar), et qui est l'unique mesure de probabilité Borélienne invariante par translation. C'est aussi l'image directe par la projection de la mesure de Lebesque sur $[0,1[^d$ (attention, ce n'est pas l'image directe par la projection de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).

On rappelle que, si $f : X \longrightarrow Y$ est une application mesurable entre espaces mesurés, l'image directe d'une mesure μ sur X est la mesure $f_*\mu$ sur Y telle que $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. (en langage probabiliste, c'est la loi de la variable aléatoire f). En termes d'intégrales, ceci s'écrit

$$\int_Y g \, d(f_*\mu) = \int_X g \circ f \, d\mu$$

pour toute fonction mesurable positive.

L'invariance par translation de la mesure λ est la propriété $\varphi_*\lambda = \lambda$, qui est satisfaite par toutes les translations. On notera dans la suite $S^n f$ la somme $f + f \circ \varphi + \ldots + f \circ \varphi^{n-1}$.

Théorème 5.6 (Hermann Weyl)**.** *Soit φ une translation de vecteur non résonant sur le tore. Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{T}^d$, on a, en topologie uniforme,*

$$\frac{1}{n} S^n f = \frac{1}{n}\big(f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}\big) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^d} f d\lambda$$

Ce résultat implique la densité des orbites. En effet, si l'orbite de 0 n'était pas dense, il existerait une fonction f positive continue nulle sur l'orbite, mais non nulle. On a alors $f(0) + f \circ \varphi(0) + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}(0) = 0$, et comme $\int f d\lambda > 0$, c'est une contradiction au vu du théorème.
◄ On commence par démontrer le résultat pour $f = e^{2i\pi k \cdot \theta}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Si $k \cdot \omega = 0$, alors $f \equiv 1$, donc le résultat est évident. Si $k \cdot \omega \neq 0$, on calcule :

$$f(\theta) + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}(\theta) = e^{2i\pi\theta}\big(1 + e^{2i\pi k \cdot \omega} + \cdots + e^{(n-1)2i\pi k \cdot \omega}\big) = e^{2i\pi\theta} \frac{1 - e^{n2i\pi k \cdot \omega}}{1 - e^{2i\pi k \cdot \omega}}.$$

Cette quantité est bornée, donc $\big(f + f\circ\varphi + \cdots + f\circ\varphi^{n-1}\big)/n$ converge uniformément vers 0, qui est la moyenne de f.

Par linéarité, le résultat s'étend à tous les polynômes trigonométriques. En rappelant que les polynômes trigonométriques sont denses, pour la topologie uniforme, dans les fonctions continues, on peut alors étendre le résultat à toute fonction continue. En effet, soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}^d$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe alors g, polynôme trigonométrique tel que $|f-g| < \epsilon/10$. Il existe alors N tel que $|S^n g/n - \int g| < \epsilon/10$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci implique que

$$|S^n f/n - \int f| \leqslant |S^n f/n - S^n g/n| + \left|S^n g/n - \int g\right| + \left|\int f - \int g\right| \leqslant 3\epsilon/10 < \epsilon. \blacktriangleright$$

Le corollaire suivant montre que cet énoncé donne une information plus quantitative que la densité des orbites :

Corollaire 5.7 (Hermann Weyl). *Soit A une partie de $\mathbb{T}^d$ tel que $\lambda(\partial A) = 0$, et soit $N_A(n,\theta)$ le nombre de points parmi $x, \varphi(\theta), \ldots, \varphi^{n-1}(\theta)$ qui sont dans A. Alors $N_A(n,\theta)/n \longrightarrow \lambda(A)$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$.*

◀ C'est exactement l'énoncé précédent pour la fonction $f = 1_A(x)$. Comme cette fonction n'est pas continue, nous devons justifier l'affirmation. Par régularité de la mesure λ, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un compact $K \subset A$ et un ouvert $U \supset A$ tels que

$$\lambda(U) - \epsilon \leqslant \lambda(\bar{A}) = \lambda(A) = \lambda(\mathring{A}) \leqslant \lambda(K) + \epsilon.$$

On considère alors des fonctions continues h et $g : \mathbb{T}^d \longrightarrow [0,1]$ qui vérifient $h = 1$ sur $\bar{A}$ et 0 hors de U, et $g = 1$ sur K et 0 hors de $\mathring{A}$, de sorte que $g \leqslant 1_A \leqslant h$.

On a donc $S^n g \leqslant S^n_f \leqslant S^n_h$, donc

$$\lambda(A) - \epsilon \leqslant \int g = \lim S^n g(\theta)/n \leqslant \liminf S^n f(\theta)/n \leqslant \limsup S^n f(\theta)/n \leqslant \lim S^n h(\theta)/n \int h \leqslant \lambda(A) + \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que $\limsup S^n f(\theta)/n = \liminf S^n f(\theta)/n = \lambda(A)$ pour tout θ. ▶

Cas général. Si $d = 1$, alors tout vecteur de rotation $\omega \in \mathbb{R}$ est soit rationnel soit non-résonant. Ce n'est toutefois pas le cas en dimension supérieure.

On note $Z(\omega)$ le sous-groupe de résonance de ω, c'est à dire le sous-groupe de $\mathbb{Z}^d$ constitué des vecteurs ξ tels que $\xi \cdot \omega \in \mathbb{Z}$. On note $E(\omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ engendré par $Z(\omega)$, et $r(\omega)$ sa dimension, c'est l'ordre de résonance de ω.

Propriété 5.8. *ω est non résonant si et seulement si $r(\omega) = 0$.*
ω est rationnel si et seulement si $r(\omega) = d$.

◀ Le premier point est tautologique. Concernant le second, si $r(\omega) = d$ alors il existe $l_1, \ldots, l_d \in \mathbb{Z}^d$, linéairement indépendants, tels que $l_i(\omega) \in \mathbb{Z}$. Il existe donc une matrice A inversible, à coefficients entiers, telle que $A\omega \in \mathbb{Z}^d$. La matrice A^{-1} est à coefficients rationnels, donc ω est est rationnel. ▶

Théorème 5.9. *Considérons l'application $\varphi : \mathbb{T}^d \ni \theta \longmapsto \theta + \omega \in \mathbb{T}^d$ et soit r l'ordre de résonance de ω. Chaque orbite a pour adhérence une union finie de tores de dimension $d - r(\omega)$.*

On peut illustrer cet énoncé en prenant $\omega = (1/2, a)$, avec a irrationnel. L'orbite de zéro est alors dense dans la sous variété $\{0\} \times \mathbb{T} \cup \{1/2\} \times \mathbb{T}$.

Pour démontrer, et préciser, ce théorème, nous allons considérer des changements de variables $\theta \longmapsto A\theta$, avec $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$. On rappelle qu'une matrice A à coefficients entiers engendre une application différentiable de $\mathbb{T}^d$. Cette application est un difféomorphisme si et seulement si A admet une inverse à coefficients entiers, c'est à dire si et seulement si $\det A = \pm 1$. On appelle automorphisme du tore ces difféomorphismes. L'automorphisme du tore associé à la matrice $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ est encore noté A, il conjugue la translation de vecteur ω à la translation de vecteur $A\omega$. Le théorème précédent découle donc du résultat algébrique suivant :

Théorème 5.10. *Soit $\omega \in \mathbb{T}^d$. Il existe $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ tel que $A\omega = (\omega_p, \omega_n)$, où $\omega_p \in \mathbb{T}^r$ est rationnel et $\omega_n \in \mathbb{T}^{d-r}$ est non résonant.*

Soit $F : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^r$ l'application donnée par les r premières composantes de TA, où T est une période de ω_p. L'application F est un morphisme de groupe différentiable et une submersion. Les adhérences des orbites de φ dans $\mathbb{T}^d$ sont les fibres de F (les préimages des points).

On a besoin de :

Proposition 5.11. *Pour tout entier k, le groupe $Gl_d(\mathbb{Z})$ agit transitivement sur les sous-espaces de dimension k de $\mathbb{Q}^d$.*

◀ Soit F un tel sous-espace et soit L une matrice rationnelle $d \times k$ dont F est l'image. En multipliant au besoin L par le produit de tous les dénominateurs de ses coefficients, on peut supposer que L est à coefficients entiers.

Nous allons montrer que l'on peut réduire L à une matrice $M = \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}$ qui est la juxtaposition d'un bloc D diagonal $k \times k$ et du bloc nul par opérations élémentaires entières sur ses lignes et ses colonnes (c'est à dire par multiplication à gauche et à droite par des matrices de $Gl_d(\mathbb{Z})$ et $Gl_k(\mathbb{Z})$.

On réduit la matrice en appliquant successivement la suite de deux opérations suivantes : Mettre le plus petit (en valeur absolue) coefficient a non nul en haut à droite, puis remplacer les autres coefficients de la premières ligne et de la première colonne par les restes de leur division modulo a.

Chaque étape de cette construction fait strictement diminuer au moins un des coefficients non diagonaux, donc on se ramène en un nombre fini d'étapes à une matrice dont tous les coefficients de la permière ligne et de la première colonne sont nuls, sauf le premier. On recommence en prenant pour pivot le coeff $(2, 2)$, etc ...

En fait, on peut, en plus, obtenir que les coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_k$ de M sont des entiers tels que d_i divise d_{i+1} mais ce n'est pas nécessaire ici. Voire par exemple Artin, Algebra, section 12.4.

On a montré l'existence de deux matrices $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ et $B \in Gl_k(\mathbb{Z})$ telles que $ALB = M$. Ceci implique que $A(F) = \mathbb{Q}^k \times \{0_{d-k}\}$. ▶

◀ On prouve maintenant le théorème. Soit $F(\omega)$ l'orthogonal de $Z(\omega)$ dans $\mathbb{Q}^d$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs rationnels x tels que $l \cdot x = 0$ pour tout $l \in Z(\omega)$. Il existe un automorphisme $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ tel que $A(F(\omega)) = \{0_r\} \times \mathbb{Q}^{d-r}$.

On décompose $w := A\omega$ en deux composantes $w_r \in \mathbb{R}^r$ et $w_n \in \mathbb{R}^{d-r}$. Le groupe de résonances de w est l'ensemble des $l \circ A$, $l \in Z(\omega)$, c'est à dire que $Z(w) = A^t(Z(\omega)))$. Il est donc contenu dans $\mathbb{Z}^r \times \{0\}$. La première composante w_r est donc r résonante, donc rationnelle. La seconde composante w_n n'est pas résonante. ▶

Temps continu. On termine en considérant le champ de vecteurs constant $V(\theta) = \omega$ sur $\mathbb{T}^d$, qui engendre le flot $\varphi^t(\theta) = \theta + \omega$. De tels flots apparaissent notamment dans les équations linéaires $\dot{x} = Lx$ en présence de valeurs propres imaginaires pures de L.

Les résultats sont très similaires à ceux du temps discret.

On définit le groupe de résonance $Y(\omega) = \{k \in \mathbb{Z}^d : k \cdot \omega = 0\}$, et l'ordre de résonance $q(\omega)$ comme la dimension de l'espace vectoriel engendré par $Y(\omega)$.

Théorème 5.12. *Les orbites sont denses dans des tores de dimension $d - q$.*

Il existe un automorphisme A du tore pour lequel $A\omega = (0, \omega_n) \in \mathbb{T}^q \times \mathbb{T}^{d-q}$ avec ω_n non résonant (c'est à dire $Y(\omega_n) = 0$).

La preuve est une variante simplifiée de celle du cas discret.

Mentionnons un dernier contexte dans lequel les tores quasi-périodiques apparaissent : la mécanique céleste.

Dans un système composé de k planètes et d'un soleil de très grande masse, on peut en première approximation supposer que chacune des planètes suit un mouvement périodique elliptique déterminé par son interaction avec le soleil. On peut paramétrer cette orbite par un flot de translations sur le cercle $\mathbb{T}^1$, au vu de l'exercice ci-dessous.

Exercice 5.1. *Soit $V(x)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{T}^1$ qui admet une orbite périodique non constante de période minimale T. Montrer que le champ V est globalement conjugué au champ de vecteurs constant $W(x) = 1/T$.*

On a donc, dans cette approximation du problème planétaire, des tores invariants de dimension n (le nombre de planètes) sur lesquels la dynamique est donnée par le flot d'un champ de vecteurs constant dont les coordonnées sont les inverses des périodes des planètes (qui dépendent des orbites choisies, c'est à dire du tore choisi). L'espace des phases, qui est ici l'ensemble des positions et vitesses possibles des planètes, est un espace de dimension $6n$, qui se décompose comme un union de tores de dimension n (avec des singularités et des dégénérescences correspondant aux collisions) sur chacun desquels la dynamique est un flot quasi périodique. Contrairement au cas linéaire, le vecteur fréquence ω dépend du tore, il y a des tores résonants et des tores non résonants.

6 Diverses propriétés d'irréductibilité en dynamique topologique

Les propriétés que nous avons démontrées pour les translations non résonantes ont un sens pour toute application continue d'un espace métrique compact (et parfois non compact) X.

L'application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ est dite minimale si il n'existe aucun sous-ensemble fermé positivement invariant ($\varphi(X) \subset X$) non trivial. C'est équivalent à la densité de chaque orbite $O^+(x) := \{\varphi^n(x), n \geqslant 0\}$.

Un compact positivement invariant $Y \subset X$ est dit minimal si $\varphi_{|Y}$ est minimale. Il est alors invariant, c'est à dire que $\varphi(Y) = Y$.

Les points fixes et les orbites périodiques sont des compacts minimaux, ainsi que les tore quasi-périodiques non résonants.

Définition 6.1. *L'application $\varphi : X \longrightarrow X$ est dite uniquement ergodique si, pour chaque fonction f, il existe une constante $c(f)$ telle que $S^n f/n \longrightarrow c(f)$ uniformément, où $S^n f = f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}$.*

Si φ est uniquement ergodique, alors il la fonction $f \longmapsto c(f)$ est linéaire et positive sur $C^0(X)$, c'est à dire que $c(f) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$. Comme de plus $c(1) = 1$, on conclut par le théorème de représentation de Riesz qu'il existe une mesure de probabilité Borélienne m sur X telle que $c(f) = \int f dm$. Le théorème d'équirépartition de Weyl est alors valable relativement à la mesure m, c'est à dire que

$$N_A(n, x)/n \longrightarrow m(A)$$

pour tout x lorsque $n \longrightarrow \infty$, pourvu que $m(\partial A) = 0$. Plus généralement, la relation

$$S^n f(x)/n \longrightarrow \int f dm$$

est satisfaite, ponctuellement, pour toute fonction intégrable au sens de Riemann, c'est à dire pour toute fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle (pour la mesure m). Ceci découle de l'exercice suivant.

Exercice 6.1. *Pour toute fonction f, on note $I^-(f)$ le supremum des inégrales des fonctions continues inférieures à f, et $I^+(f)$ l'infimum des intégrales des fonctions continues supérieures à f.*

1. *En utilisant la séparabilité de $C(X, \mathbb{R})$, montrer qu'il existe deux suites g_n et h_n, croissantes et décroissantes, de fonctions continues, telles que $g_n \leqslant f \leqslant h_n$ et $\int h_n \longrightarrow I^-(f)$, $\int g_n \longrightarrow I^+(f)$.*
2. *Soient H et G les limites des suites h_n et g_n. Montrer que les fonctions H et $-G$ sont semi-continues inférieurement. Montrer que f est continue en x si et seulement si $H(x) = f(x) = G(x)$.*
3. *Montrer que f est Riemann intégrable si et seulement si $I^-(f) = I^+(f)$.*
4. *Montrer que $S^n f(x)/n \longrightarrow \int f$ pour tout x si f est Riemann intégrable.*

Propriété 6.2. *Si φ est uniquement ergodique, alors il existe une unique mesure de probabilité Borélienne invariante.*

On montrera plus tard que toute application continue d'un espace métrique compact admettant une unique probabilité invariante est uniquement ergodique (ce qui explique le nom).

◄ Soit m la probabilité pour laquelle $c(f) = \int f dm$. Comme $c(f \circ \varphi) = c(f)$, la mesure m est invariante. Soit μ une autre mesure invariante, alors $\int f d\mu = (1/n) \int S^n f d\mu$ pour tout n. Comme cette suite constante converge vers $c(f)$, on conclut que $c(f) = \int f dm = \int f d\mu$ pour tout $f \in C^0(X)$, et donc que $m = \mu$. ►

Les translations φ sont des isométries. Bien qu'il existe des exemples d'homéomorphismes minimaux qui ne sont pas uniquement ergodiques, on a :

Proposition 6.3. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une isométrie d'un espace métrique compact. Si φ est minimale, elle est uniquement ergodique.*

◄ Soit f une fonction continue sur X. Elle est uniformément continue. Comme φ est une isométrie, les fonctions $f \circ \varphi^k$ sont uniformément équicontinues, et uniformément bornées. il en est donc de même des fonctions $S^n f/n$. Par le théorème d'Ascoli, la suite $S^n f/n$ admet une valeur d'adhérence g, qui est la limite de $S^n f/n$ le long d'une sous-suite n_k. Montrons que g est invariante. On a

$$g \circ \varphi = \lim(f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n_k})/n_k = \lim(S^{n_k} f/n_k) + (f \circ \varphi^{n_k} - f)/n_k = g.$$

La minimalité implique alors que g est constante (les ensembles $g \geqslant a, a \in \mathbb{R}$ sont invariants). Il reste à démontrer que $S^n f/n$ converge uniformément vers g. On considère la suite $M_n := \max S^n f$. Comme $S^{n+m} f = S^n f + (S^m f) \circ \varphi^n$, on a $M_{n+m} \leqslant M_n + M_m$. Un lemme très classique (lemme sous-additif, voire par exemple wikipedia) affirme alors que M_n/n converge vers limite $M = \inf M_n/n$. De la même façon, la suite $m_n = \min S^n f$ est sur additive, donc converge vers une limite $m = \sup m_n/n$. Pour $\epsilon > 0$ et k assez grand, on a $g - \epsilon \leqslant S^{n_k} f/n_k \leqslant g + \epsilon$, et donc

$$g - \epsilon \leqslant m_{n_k}/n_k \leqslant m \leqslant M \leqslant M_{n_k}/n_k \leqslant g + \epsilon.$$

On a donc $M = m = g$, c'est à dire que $S^n f/n$ converge uniformément vers g. ►

Réciproquement, on a :

Proposition 6.4. *Soit φ une application continue d'un espace métrique compact X. Supposons que φ est uniquement ergodique de mesure invariante m, et soit Y le support de m. Alors Y est invariant et $\varphi_{|Y}$ est minimal.*

Le support d'une mesure est le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle.
◄ Le complémentaire $X - Y$ est un ouvert de mesure nulle, donc c'est aussi le cas de sa préimage $\varphi^{-1}(X - Y)$. Ceci implique que $\varphi^{-1}(X - Y)$ est disjoint de Y, c'est à dire que Y est positivement invariant. Soit Z un fermé positivement invariant contenu dans Y, et soit $f : X \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue nulle sur Z et strictement positive sur $X - Z$. La première propriété implique que $S^n f(x) = 0$ pour tout $x \in Z$, et donc que $\int f dm = 0$ si Z est non vide. La seconde propriété implique que $\int f dm > 0$ si $Z \neq Y$. Z est donc soit vide soit égal à Y. ►

Proposition 6.5. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue du métrique compact X. Il existe un compact invariant minimal.*

◄ On peut utiliser le Lemme de Zorn. Nous allons donner une preuve plus constructive issue des notes de Milnor. On considère une base d'ouverts dénombrable U_i. Pour chaque i, on note V_i le passé de U_i, c'est à dire $\cap_{j \geqslant 0} \varphi^{-j}(U_i)$. On construit par récurrence une suite décroissante de compacts invariants non-vides Y_n tels que $Y_0 = X$. On pose alors $Y_{n-1} \cap (X - V_n)$ si cet ensemble est non vide (c'est un compact invariant), et $Y_n = Y_{n-1} = Y_{n-1} \cap V_n$ dans l'autre cas, c'est alors clairement un compact non vide invariant. On considère $Y = \cap Y_n$, qui est un compact non-vide invariant.

Soit $H \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des indices i tels que $U_i \cap Y$ est non-vide. Pour $i \in H$, on a $Y \subset Y_i \subset V_i$, ce qui montre que toute orbite de Y passe par U_i. Comme les ouverts $U_i \cap Y, i \in H$ constituent une base d'ouverts de Y, ceci implique la minimalité de Y. ►

Il existe une caractérisation intéressante des orbites dont l'adhérence est minimale. On dit que le point x est presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que tout intervalle de temps de longueur N contient un entier T pour lequel $d(\varphi^T(x), x) < \epsilon$.

Proposition 6.6. *L'adhérence de l'orbite de x est minimale si et seulement si l'orbite de x est presque périodique.*

◄ Soit x un point presque périodique. Soit y et z deux points de l'adhérence de $O^+(x)$. Fixons $\epsilon > 0$. On veut montrer que l'orbite de y intersecte $B(y, \epsilon)$. Il existe k tel que $d(\varphi^k(x), z) < \epsilon/2$. Il existe donc ϵ_1 tel que $d(\varphi^k(x'), z) < \epsilon$ lorsque $d(x, x') < \epsilon_1$. Soit N tel que tout intervalle de temps de longueur N contient un temps T pour lequel $d(\varphi^T(x), x) < \epsilon_1/2$. Comme X est compact, les applications φ^i sont uniformément continues, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\varphi^i(q, q') < \epsilon_1$ si $d(q, q') < \delta$ et si $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Comme y est dans l'adhérence de l'orbite de x, il existe un entier t tel que $d(\varphi^t(x), y) < \delta$. Il existe ensuite un entier $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ tel que $d(\varphi^{t+i}(x), x) < \epsilon_1/2$. Alors,

$$d(\varphi^i(y), x) < d(\varphi^i(y), \varphi^i \circ \varphi^t(x)) + d(\varphi^{i+t}(x), x) < \epsilon_1$$

et donc $d(\varphi^{i+k}(y), z) < \epsilon$.

Soit x un point qui n'est pas presque périodique, soit Y l'adhérence de son image. Il existe $\epsilon > 0$ et une suite a_n de temps tel que, pour chaque n, aucun des points $\varphi^{a_n}(x), \ldots, \varphi^{a_n+n}(x)$ n'est dans $B(x, \epsilon)$. On peut supposer en extrayant une sous-suite que $\varphi^{a_n}(x)$ a une limite $y \in Y$. Pour tout $k \geqslant 0$, le point $\varphi^{a_n+k}(x)$ est hors de la boule $B(x, \epsilon)$. A la limite, on déduit que $d(\varphi^k(y), x) \geqslant \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $k \geqslant 0$, x n'est pas dans l'adhérence de l'orbite de y, et donc Y n'est pas minimal. ►

La minimalité est une façon de dire que les orbites remplissent l'espace X. Il est utile de considérer des notions plus faibles dans la même direction. On se place ici dans le cadre plus général

L'application $\varphi : X \longrightarrow X$ est dite topologiquement transitive si, pour tous ouverts U et V, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^{-n}(V) \cap U$ est non-vide. Il est clair qu'une application minimale est transitive, la réciproque n'est pas vraie.

Voici deux exemples de dynamiques transitives : L'application $\varphi : \theta \longmapsto 2\theta$ sur $\mathbb{T}$. Pour montrer la transitivité, on constate que l'image d'un intervalle I de longueur l est un intervalle de longueur $\min(2l, 1)$. Pour n assez grand,

$\varphi^n(I)$ est donc de longueur 1. On verra ci-dessous qu'il existe alors une orbite dense. Il n'est pas évident de donner explicitement une telle orbite.

Dans le second exemple, $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites de zéros et de uns, et l'application est le décalage σ qui à la suite $a_0, a_1, \ldots$ associe la suite $a_1, a_2, \ldots$. L'espace X est muni de la topologie produit, c'est un espace compact métrisable. Il y a de nombreuses distances possibles, comme $d(a,b) = \sum 2^{-i}|a_i - b_i|$ ou $D(a,b) = 2^{-k}$, où k est le plus grand entier tel que les suites a et b coïncident jusqu'au rang k. Cette seconde distance est ultramétrique, c'est à dire que $D(a,b) \leqslant \max(d(a,a'), d(a',b)$ pour tout a'. On remarque que $D(\sigma(a), \sigma(b)) = \min(2D(a,b), 1)$: on a une dilatation comme dans l'exemple précédent. On montre alors la transitivité comme pour l'exemple précédent : si U est un ouvert de X, alors il existe n tel que $\sigma(U) = X$. Concrètement, U contient un cylindre, c'est à dire l'ensemble des suites de X dont les k premiers termes sont fixés (c'est aussi une boule de rayon 2^{-k} pour la distance D), et il est évident que l'image d'un tel cylindre par σ^{k+1} est X entier.

En fait, ces deux exemples sont fortement reliés. En effet on peu considérer l'application

$$p : X \ni (a_i) \longrightarrow \sum_i 2^{-i} a_i \mod 1 \in \mathbb{T}.$$

Cette application est continue, et c'est une semi-conjugaison entre φ et σ, c'est à dire que $\varphi \circ p = p \circ \varphi$. La transitivité de φ découle ainsi de celle de σ. De plus, l'image d'une condition initiale dont l'orbite est dense est une condition initiale dont l'orbite et dense (ceci permet de décrire certaines conditions initiales pour φ dont l'orbite est dense.) Même si p n'est pas injective, elle est très proche de l'être. En effet tous les points ont une unique préimage, sauf un nombre dénombrable de points, qui ont chacun deux préimages.

Exercice 6.2. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue topologiquement transitive (où X est un espace métrique, ou même topologique quelconque). Si X admet un point isolé, montrer que X est fini.*

Propriété 6.7. *Si φ est une isométrie d'un espace métrique X qui est transitive, alors elle est minimale.*

Ceci implique qu'on peut partitionner X en compacts invariants minimaux disjoints (qui sont les adhérences des orbites).

◄ Soit $x \in X$ et $B(y, \epsilon)$ une boule ouverte. On doit montrer que l'orbite de X intersecte $B(y, \epsilon)$. La transitivité implique l'existence d'un point z et d'un temps n tels que $d(x,z) < \epsilon/2$ et $d(\varphi^n(z), y) < \epsilon/2$. Comme φ^n est une isométrie, ceci implique que $d(\varphi^n(x), y) \leqslant d(\varphi^n(x), \varphi^n(z)) + d(\varphi^n(z), x) < \epsilon$. ►

Exercice 6.3. *Soit X un espace métrique complet et φ une isométrie de X. Si x est un point presque périodique pour φ, montrer que l'adhérence de $O^+(x)$ est compacte, invariante, et minimale.*

Soit Y un espace métrique. On dit que la suite $y_n, n \in \mathbb{Z}$, à valeurs dans Y est presque périodique si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que tout intervalle de longueur N dans $\mathbb{Z}$ contient un élément k pour lequel $d(y_{n+k}, y_n) < \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrer que toute suite presque périodique est bornée (contenue dans une boule de rayon fini).

Montrer que la suite y_n est presque périodique si et seulement si il existe un homéomorphisme isométrique φ d'un espace métrique compact X, une application continue $f : X \longrightarrow Y$ et un point $x \in X$ tels que $y_n = f(\varphi^n(x))$.

Si y_n et z_n sont des suites presque périodiques dans les espaces métriques

Propriété 6.8. *Si $\varphi : X \longrightarrow X$ est transitive, alors pour tous ouverts U et V, il existe des entiers n arbitrairement grands pour lesquels $\varphi^{-n}(V) \cap U$ est non vide.*

◄ Fixons $N \geqslant 0$, et posons $W = \varphi^{-N}(V)$. La transitivité de φ implique l'existence d'un entier $k \geqslant 0$ tel que $\varphi^{-k}(W) \cap U$ est non vide, c'est à dire tel que $\varphi^{-N-k}(V) \cap U$ est non vide. ►

Proposition 6.9. *Supposons que X est un espace métrique séparable et ayant la propriété de Baire (par exemple un espace complet ou un espace localement compact). L'application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ est transitive si et seulement si il existe un point x tel que $\omega(x) = X$ (en particulier, l'orbite de x est dense).*

La dynamique $\theta \longmapsto 2\theta$ sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est transitive, mais n'a pas d'orbite dense. Tous ses points sont pré-périodiques.

◄ On considère une base dénombrable d'ouverts, U_i. On définit $V(k,i) := \cup_{n \geqslant k} \varphi^{-n}(U_i)$. C'est l'ensemble des points x pour lesquels il existe $n \geqslant k$ tel que $\varphi^n(x) \in U_i$. La propriété précédent implique que $V(k,i)$ est un ouvert dense. La propriété de Baire implique alors que l'intersection $G := \cap_{i,k} V(k,i)$ est dense. Soit x un point de G, et U un ouvert. Il existe alors i tel que $\bar{U}_i \subset U$. Il existe une suite strictement croissante n_k telle que $\varphi^{n_k}(x)$ est contenu dans U_i pour tout x. Les valeurs d'adhérence de cette suite sont des points de $\omega(x)$ contenus dans $\bar{U}_i$, donc dans U. L'ensemble $\omega(x)$ intersecte tous les ouverts, donc il est dense. ►

Exercice 6.4. *Soit φ un homéomorphisme de l'espace métrique compact X sans point isolé. Supposons qu'il existe une orbite $\{\varphi^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ qui est dense. Montrer qu'alors il existe une orbite positive $\{\varphi^n(y), n \in \mathbb{N}\}$ qui est dense. Donner un contre exemple si X a des points isolés (on pourra s'inspirer de la dynamique représentée par le premier dessin du chapitre 2).*

On peut affaiblir encore la minimalité et la transitivité de diverses façons. Un compact positivement invariant K est particulièrement important pour la dynamique si il est asymptotiquement stable. On définit la stabilité asymptotique d'un compact invariant comme celle d'un point fixe :

Le compact positivement invariant K est dit Lyapounov stable si, pour tout voisinage V de K, il existe un voisinage U de K tel que $\varphi^n(U) \subset V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est dit asymptotiquement stable si il est Lyapounov stable et si de plus il existe un voisinage V de K tel que toute orbite issue de V converge vers K, c'est à dire que $d(\varphi^n(x), K) \longrightarrow 0$ pour tout $x \in V$.

Le bassin de K est alors l'ensemble des points x dont l'orbite converge vers K. C'est un voisinage ouvert de K.

Si X est localement compact, on montre comme dans le cas des points fixes les énoncés suivants :

Théorème 6.10. *Supposons que X est localement compact et que K est un compact positivement invariant ($\varphi(K) \subset K$). Supposons de plus qu'il existe une fonction de Lyapounov stricte en K, c'est à dire une fonction continue $f : U \longrightarrow [0, \infty)$, où U est un voisinage de K, telle que les fonctions f et $f - f \circ \varphi$ sont strictement positives sur un voisinage $V - K$ pour un voisinage V de K.*

Alors K est asymptotiquement stable.

Théorème 6.11. *On suppose X localement compact. Soit K un compact positivement invariant asymptotiquement stable, de bassin B. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ qui a les propriétés suivantes : $f = 1$ sur $X - B$, $f \in]0, 1[$ sur $B - K$, $f_{|K} = 0$, $f \circ \varphi - f < 0$ sur $B - K$.*

Exercice 6.5. *Si il existe un compact invariant asymptotiquement stable non trivial, alors φ n'est pas transitive.*

Une notion d'irréductibilité naturelle est la non-existence d'un compact invariant non-trivial asymptotiquement stable.

On peut aussi considérer les fonctions de Lyapounov, c'est à dire les fonctions continues telles que $f \circ \varphi \leqslant f$. Si φ est transitive, alors toute fonction de Lyapounov est constante. Une notion naturelle d'irréductibilité est la non-existence de fonctions de Lyapounov non constantes. Il est aussi utile de considérer un type particulier de fonctions de Lyapounov. On dit que f est une bonne fonction de Lyapounov si c'est une fonction de Lyapounov dont l'ensemble des valeures strictes est dense dans $\mathbb{R}$. On peut illustrer la différence entre ces notions lorsque $\varphi = id$. Dans ce cas, toute fonction continue est une fonction de Lyapounov, mais les bonnes fonctions de Lyapounov sont les fonctions constantes.

Finalement, on définit la transitivité par chaînes. Une suite x_i est une ϵ-chaîne si $d(\varphi(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ pour tout n. On dit que φ est transitif par chaînes si, pour toute $\epsilon > 0$, et tous x, y dans X, il existe une ϵ-chaîne finie reliant x à y. La transitivité implique la transitivité par chaînes, mais ce n'est pas réciproque (l'application identité est un contre exemple).

Théorème 6.12. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour une application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ de l'espace métrique compact X. Elles sont satisfaites si φ est transitive.*

— *φ est transitif par chaînes.*

— *Toute bonne fonction de Lyapounov est constante.*

— *Il n'existe pas de compact invariant asymptotiquement stable non trivial (c'est à dire ni vide ni égal à X).*

◀ On montre les deux équivalences.

Supposons que φ n'est pas transitive par chaînes. Il existe alors un point x, et un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ouvert $U \neq X$, où U est l'ouvert des points accessibles depuis x par une ϵ-chaîne. Si $y \in \varphi(U)$, alors la boule ouverte $B(y, \epsilon)$ est contenue dans U. On a donc $\overline{\varphi(U)} \subset U$. Nous avons montré qu'il existe alors une fonction de Lyapounov non constante à valeurs dans $[0, 1]$, qui n'a que deux valeurs neutres, 0 et 1. C'est donc une bonne fonction de Lyapounov non constante.

Supposons qu'il existe une bonne fonction de Lyapounov f non constante, posons $a = \min f$ et $b = \max f$. L'ensemble des valeurs strictes de f est un ouvert dense de $[a, b]$. Soit $]c, d[$ un intervalle maximal dans cet ouvert. Le compact $K = f^{-1}([a, c])$ est alors asymptotiquement stable. Si U est un voisinage de K, on considère $m = \min_{x \in \partial U} f$, on a $m > c$ car ∂U est un compact disjoint de K. On considère alors une valeur stricte $e \in]c, m[$. L'ouvert $V = f^{-1}([a, e[)$ est un voisinage positivement invariant de K contenu dans U. On a montré que K est Lyapounov stable. Finalement, si x vérifie $f(x) < d$, alors $\omega(x)$ est contenu dans un niveau neutre de f inférieur à d, donc inférieur à c. On a donc $\omega(x) \subset K$, ce qui montre la stabilité asymptotique.

Toujours en supposant l'existence de la fonction f, on montre que φ n'est pas transitive par chaînes. On considère en effet comme ci-dessus une valeur stricte $e \in]a,b[$. On note $e' = \max_{f^{-1}(a,e])} f \circ \varphi$. On a $e' \leqslant e$, et, si $e' = e$, alors il existe un point x tel que $f(x) = e$ et $f \circ \varphi(x) = e$, ce qui contredit le caractère strict de la valeur e. On a donc $e' < e$. Soit ϵ la distance entre les compacts disjoints $f^{-1}([e,b])$ et $f^{-1}([a,e'])$. Aucune ϵ-chaîne ne peut sortir de $f^{-1}([a,e])$, ce qui contredit la transitivité par chaînes

Si il existe un compact invariant asymptotiquement stable A non trivial, de bassin B, on montre comme dans les cas des points fixes qu'il existe une fonction de Lyapounov $f : X \longrightarrow [0,1]$ qui est nulle sur A, égale à 1 hors de B, et qui vérifie $f \circ \varphi - f < 0$ sur $B - A$. C'est une bonne fonction de Lyapounov. ►