1 Introduction, points fixes et périodiques.

Il y a plusieurs contextes mathématiques que l'on peut qualifier de systèmes dynamiques. Dans tous les cas, il y a un espace X qui décrit les états possible du système, et un temps $\mathbb{T}$. On considérera les cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$.

Le cas $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. On se donne une application $\varphi : X \longrightarrow X$, et on étudie les suites définies par récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Une telle suite est déterminée par sa condition initiale x_0, on dit que c'est l'orbite du point x_0. Dit autrement, on étudie la suite des applications φ^n (φ itérée n fois), pour laquelle $x_n = \varphi^n(x_0)$. On a bien sur $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$.

Si l'application φ est inversible, on peut définir φ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la relation ci-dessus restant vérifiée. C'est le cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on considère un flot $\varphi^t(x) = \varphi(t, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ vérifiant la relation $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$. L'une des manières les plus fréquentes de définir un tel flot est de se donner un champ de vecteurs $V(x)$ sur X. Ceci a un sens si X est une variété, ou un espace $\mathbb{R}^d$. On considère alors l'équation différentielle $x'(t) = V(x(t))$. Si V est assez régulier (C^1 ou même Lipschitz), alors pour toute condition initiale x_0, il y a une et une seule solution maximale de cette équation vérifiant $x(0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ contenant 0. On peut rassembler toutes ces solutions en une application

$$\varphi : \mathbb{R} \times X \supset U \longrightarrow X$$

telle que, pour chaque $x \in X$, L'application $U_x \ni t \longmapsto \varphi(t, x)$ est la solution maximale de l'équation, où $U_x = \{t : (t, x) \in U\}$. Le domaine de définition U est un ouvert de $\mathbb{R} \times X$, et l'application φ est C^r si le champ V est C^r. On dit que le champ V est complet si $U = \mathbb{R} \times X$, c'est à dire si toutes les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$. Alors, $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$ est un flot sur X. On considérera principalement des champs complets. On rappelle quelques résultats utiles à ce propos :

Proposition 1.1. *Tout champ de vecteurs à support compact est complet. En particulier, tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.*

Si V est un champ de vecteurs, il existe une fonction f, strictement positive et lisse, telle que fV est complet.

Si x_0 est un point tel que le temps d'existence T_+ de la solution maximale est fini, alors l'image $x([0, T^+[) \subset X$ de l'orbite n'est pas relativement compacte.

Dans tous les cas, on considère donc une action du (semi)-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace X.

On parle de semi-flot lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$. Même si on considérera plus rarement ce cas, il apparaît de manière naturelle dans les cas suivants :

Dans l'études des équations aux dérivées partielles d'évolution, par exemple de type parabolique. De telles équations induisent souvent un semi-flot sur un espace X de dimension infinie.

Dans l'étude des flots, on est souvent amené à considérer des parties positivement invariantes, c'est à dire des parties $Y \subset X$ pour lesquelles $\varphi^t(Y) \subset Y$ pour tout $t \geqslant 0$ (mais pas forcément pour $t < 0$). La famille des applications $\varphi^t_{|Y}$ est alors un semi-flot. Si le flot φ^t provient d'un champ de vecteurs complet V et que Y est un ouvert de X, le champ $V_{|Y}$ est complet vers le futur, mais pas vers le passé.

Nature des orbites

On dit que x est un point fixe de l'application φ si $\varphi(x) = x$. On dit que x est un point périodique si il existe $n \geqslant 1$ tel que $\varphi^n(x) = x$. L'ensemble des entiers n pour lesquels $\varphi^n(x) = x$ est l'ensemble des multiple d'un entier $T > 0$, que l'on appelle la période minimale de x. Les points fixe sont donc les orbites périodiques dont la période minimale est égale à 1. Il existe trois types d'orbites pour une application φ :

Les orbites périodiques.

Les orbites injectives.

Les orbites préperiodiques (x n'est pas périodique, mais son orbite contient un point périodique). Si φ est inversible, toute orbite préperiodique est périodique.

Considérons maintenant le cas d'un flot engendré par un champ de vecteurs complet V de classe C^1. On dit que x est un point fixe (ou un point critique) si $V(x) = 0$, ou de manière équivalente si $\varphi^t(x) = x$ pour tout t. On dit que x est un point périodique si il existe $t > 0$ tel que $\varphi^t(x) = x$. L'ensemble des périodes est une sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, c'est donc ou bien $\mathbb{R}$ (cas d'un point fixe) ou bien $T\mathbb{Z}$ pour un réel $T > 0$, qui est appelé la période minimale de x.

Il y a trois types d'orbites pour un flot :

Les points fixes (dits aussi points singuliers).

Les orbites périodiques (de période minimale strictement positive). Si $x(t)$ est une orbite de période $T > 0$, alors la courbe x engendre un plongement du cercle $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans X. Plus précisément, en notant $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, il existe un plongement $\theta : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \longrightarrow X$ tel que $x = \pi \circ \theta$.

Les orbites injectives. Dans ce cas, l'application $t \longmapsto \varphi^t(x)$ est une immersion injective de $\mathbb{R}$ dans X. En effet, $x'(t) = V(x(t))$, et ce vecteur est non-nul pour tout t, sinon l'orbite serait un point fixe.

Dans un semi-flot, il peut aussi exister des orbites prépériodiques.

Conjugaisons Soit $\phi : X \longrightarrow X'$ une bijection. Si $\psi = \phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi$, alors ϕ envoie les orbites de φ sur les orbites de ψ. L'existence d'une telle bijection ϕ implique que les dynamiques de φ et ψ ont certaines similarités (d'autant plus si ϕ a certaines propriétés de régularité). On dit que ϕ conjugue φ et ψ.

On dit que ϕ conjugue les flots φ^t et ψ^t elle conjugue les applications φ^t et ψ^t pour tout t.

Dans le cas où X et X' sont des variétés, et où les flots φ^t et ψ^t sont engendrés par des champs de vecteurs V et W, le difféomorphisme ϕ est une conjugaison si et seulement si

$$W(\phi(x)) = d\phi_x \cdot V(x)$$

pour tout $x \in X$ (on dit que W est l'image directe de V par ϕ).

Une façon d'étudier une système dynamique est de le conjuguer à un système plus simple. C'est souvent difficile globalement, mais la question est aussi intéressante au niveau local. On verra par exemple qu'au voisinage d'un point fixe hyperbolique, un système est conjugué à son linéarisé par un homéomorphisme. En ce qui concerne les points réguliers (points non fixes) des champs de vecteurs, le problème de conjugaison locale est facile :

Proposition 1.2. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit x_0 un point régulier de V, c'est à dire que $V(x_0) \neq 0$. Il existe alors un difféomorphisme local $\phi : X \supset U \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$, où U est un ouvert contenant x_0 et U' est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, qui conjugue V à un champ de vecteurs constant V' sur U'. On peut même demander que $V' = (1, 0, \ldots, 0)$ et que $U' =]-1, 1[\times B$, où B est une boule de $\mathbb{R}^{d-1}$. On dit alors que U est une boite de flot locale de V.*

◀ Soit $f : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow X$ une application telle que $f(0) = x_0$ et $df_{x_0} \cdot \mathbb{R}^{d-1}$ est un supplémentaire de $V(x_0)$ dans $T_{x_0}M$. On considère alors l'application

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \ni (t, y) \longmapsto \varphi^t(f(y)) \in X$$

où φ est le flot de V. On a

$$d\psi_{(y,t)} \cdot (1, 0) = \partial_t \psi(y, t) = V(\psi(y, t))$$

c'est à dire que ψ conjugue le champ constant $(1, 0)$ et le champ V. On constate que

$$d\psi_{(0,0)} \cdot (s, v) = v + sV(x_0),$$

est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ dans $T_{x_0}M$, donc ψ est un difféomorphisme local. Si B est un petite boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et I un petit intervalle ouvert contenant 0, alors ψ est un difféomorphisme de $U' := B \times I$ sur son image U, qui est un ouvert de X. L'inverse $\phi : U \longrightarrow U'$ est le difféomorphisme cherché. ▶

On peut obtenir un résultat un peu moins local :

Proposition 1.3. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit $x(t) : [0, T] \longrightarrow X$ un segment d'orbite injectif. Il existe alors un tube de flot contenant $x([0, T])$. Plus précisément, il existe un intervalle ouvert I contenant $[0, T]$, une boule ouverte B de $\mathbb{R}^{d-1}$, un voisinage ouvert U de $x([0, T])$ et un difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow I \times B$ qui conjugue le champ V et le champ $(1, 0)$.*

◀ On poursuit la preuve précédente. Comme $\psi(t + s, y) = \varphi^t \circ \psi(s, y)$, on a $d\psi_{(t,0)} = d\varphi^t_{x_0} \circ d\psi_{(0,0)}$, cette application linéaire est donc un isomorphisme. On peut donc supposer, en choisissant I et B comme dans l'énoncé assez petits, que ψ est un difféomorphisme local sur $I \times B$. Montrons maintenant que l'on peut, quitte à diminuer I et B, le supposer injectif. C'est alors un difféomorphisme sur son image, ce qui termine la preuve.

Si ψ n'est injectif sur aucun voisinage $I \times B$, alors il existe deux suites $(t_n, x_n) \neq (t'_n, x'_n)$telles que $\psi(t_n, x_n) = \psi(t'_n, x'_n)$ et $t_n \longrightarrow t \in [0, T], t'_n \longrightarrow t' \in [0, T]$, $x_n \longrightarrow 0$, $x'_n \longrightarrow 0$. A la limite, par injectivité de l'orbite $x_{|[0,T]}$, on obitent que $t = t'$. Comme ψ est un difféomorphisme local au voisinage de $(t, 0)$, ceci implique que les suites (t_n, x_n) et (t'_n, x'_n) sont égales après un certain rang, une contradiction. ▶

Il y a plusieurs façons de faire des liens entre les systèmes à temps continu et à temps discret.

La plus évidente consiste, étant donné un flot φ^t, à considérer l'application φ^T pour un temps T donné. La dynamique du flot φ^t et celle de l'application φ^T sont fortement reliées, on en verra plusieurs exemples.

Une autre méthode pour associer une application à un flot consiste à considérer l'application de retour associée à une section de Poincaré. Cette méthode à l'avantage de diminuer la dimension.

Une section de Poincaré est une sous variété Y de X, de codimension un, transverse au champ de vecteurs, c'est à dire que $T_yX = T_yY \oplus \mathbb{R}V(y)$ pour tout $y \in Y$. Pour $y \in Y$, on dit que $z \in Y$ est le premier retour de y dans Y si il existe $T > 0$ tel que $z = \varphi^T(y)$ et $\varphi^t(y) \notin Y$ pour tout $t \in]0, T[$. On dit que z est un premier retour régulier si de plus $\varphi^t(y) \notin \bar{Y}$ pour tout $t \in]0, T[$.

Proposition 1.4. *Soit Y une section de Poincaré pour le champ V de classe C^r. L'ensemble des points de Y admettant un premier retour régulier est un ouvert Y_1 de Y, et l'application $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$ qui a chaque point de Y_1 associe son premier retour dans Y est C^r. C'est un difféomorphisme sur un ouvert Y_2 de Y.*

En général, Y_1 peut être vide. Il se peut même qu'aucun point de Y ne revienne dans Y. Toutefois, cette construction est souvent très utile. Même si ψ n'est pas une application de Y_1 dans lui-même, on peut souvent penser à ψ comme engendrant un système dynamique discret dont l'étude aide à comprendre le flot de V.

◀ Soit y un point qui admet un premier retour régulier $z = \varphi^T(y)$. Au voisinage de z, soit f une équation de Y, c'est à dire une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r telle que $df_z \neq 0$ et telle que $Y \subset f^{-1}(0)$. Pour chercher les retours dans Y des points voisins de y, on résout l'équation $g(t, x) := f \circ \varphi(t, x) = 0$ au voisinage de sa solution (T, y). On constate que $\partial_t g(T, y) = df_z \cdot V(z) \neq 0$. Il existe donc un voisinage U de y et une fonction $\tau : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r, telle que $\varphi^{\tau(x)}(x) \in Y$ pour tout $x \in U$. De plus, $\tau(x)$ est la seule solution de l'équation $g(t, x) = 0$ proche de T. L'application $\psi(x) := \varphi^{\tau(x)}(x) : U \longrightarrow Y$ est C^r, elle associe à chaque point $x \in U$ un de ses retours dans Y.

Il reste à montrer que, si U est un voisinage de y assez petit, alors c'est bien le premier retour et qu'il est régulier. Il faut donc montrer que $\varphi^t(x) \notin \bar{Y}$ pour tout $x \in U$ et tout $t \in]0, \tau(x)[$. Supposons, par contradiction, que cette propriété ne soit satisfaite sur aucun voisinage U de y. Il existe alors une suite x_n tendant vers y, et pour chaque n un temps $t_n \in]0, \tau(x_n)[$ tel que $\varphi^{t_n}(x_n) \in Y$. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que la suite t_n converge vers une limite $s \in [0, T]$, pour laquelle $\varphi^s(y) \in \bar{Y}$. Comme z est un retour régulier de y, on ne peut pas avoir $s \in]0, T[$. Si l'on a $s = T$, alors pour n grand t_n est une solution de l'équation $g(t_n, x_n) = 0$ qui est proche de T, mais différente de $\tau(x_n)$, ce qui contredit la conclusion du théorème des fonctions implicites. Une application similaire du théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, y)$ montre que 0 est localement l'unique solution de l'équation $\varphi^t(x) \in Y$. On ne peut donc pas avoir $s = 0$.

On peut renverser le temps en considérant le champ $-V$. Y est une section de Poincaré pour $-V$. Notons Y_2 l'ensemble des points de Y qui admettent un premier retour régulier pour $-V$. On montre comme ci-dessus que Y_2 est un ouvert de Y et que l'application de retour ϕ est C^r. Il est clair que z est un premier retour régulier de y pour V si et seulement si y est un premier retour régulier de z pour $-V$. On a donc $Y_2 = \psi(Y_1)$ et $\phi = \psi^{-1}$. ▶

Définition 1.5. *Soit φ une application C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x de φ est non dégénéré si le linéarisé $L = d\varphi_x$ n'admet pas 1 pour valeur propre.*

Le linéarisé L est un endomorphisme de l'espace tangent T_xX. Le système linéarisé $v_{n+1} = Lv_n$ est une approximation du système φ au voisinage du point fixe x.

Proposition 1.6. *Soit $\varphi_\mu(x) = \varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ une application C^1, que l'on voit comme une famille d'applications C^1 de X. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de φ_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de φ_μ dans U.*

◀ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $F(\mu, x) := \varphi(\mu, x) - x = 0$ (on se place dans une carte en x_0 pour écrire cette différence). L'hypothèse de non-degenerescence est en effet exactement l'inversibilité de $\partial_x F(0, x_0)$. ▶

Le cas des orbites périodiques est similaire. On dit que x est un point périodique non dégénéré de période n si c'est un point fixe non dégénéré de φ^n. Un point périodique non dégénéré de période n est isolé (parmi les points périodiques de période n) et survit à une perturbation de l'application.

Dans les cas des flots, il est utile de distinguer les cas des points fixes et le cas des orbites périodiques.

Définition 1.7. *Soit V un champ de vecteurs C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x_0 de V est non dégénéré si le linéarisé $L = dV_{x_0}$ est inversible.*

Si $X = \mathbb{R}^d$, le champ de vecteurs V est simplement une application $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, on définit alors le linéarisé par la formule $L = dV_{x_0}$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. On a alors $(d\varphi^t)_{x_0} = e^{tL}$ pour tout t, ceci explique pourquoi la valeur propre 1 dans le cas des applications correspond à la valeur propre 0 pour le champ de vecteurs. Dans le cas où X est une variété, il n'est pas clair que le linéarisé L est bien défini en tant qu'endomorphisme de T_xX (en fait, il n'est bien défini que lorsque $V(x)=0$). Une façon de le définir est de poser $L = \frac{d}{dt}_{|t=0} d\varphi_x^t$ en remarquant que $d\varphi_x^t$ est bien un endomorphisme de T_xM pour tout t (car $\varphi^t(x)=x$). Plus classiquement, on peut calculer le linéarisé L en exprimant le champ de vecteurs V dans des cartes. Soient W^1 et W^2 les expressions de V dans deux cartes différentes

Proposition 1.8. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X=\mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de V_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de V_μ dans U.*

◄ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $V(\mu,x)=0$. ►

Considérons maintenant le cas d'une orbite périodique d'un champ de vecteurs V, de période minimale $T>0$. Les points de cette orbite sont des points fixes de l'application φ^T. Il faut noter cependant que ce ne sont jamais des points fixes non dégénérés. En effet, comme chacun des points de l'orbite périodique du flot est un point fixe de φ^T, ils ne sont pas isolés. Plus directement, l'hypothèse de non dégénerescence n'est pas satisfaite en raison de l'égalité suivante :

$$d\varphi_x^T \cdot V(x) = V(x).$$

$V(x)$ est donc un vecteur propre de $d\varphi_x^T$ associé à la valeur propre 1. Pour démontrer l'égalité, on observe que $\varphi^T \circ \varphi^t(x) = \varphi^t(x)$ pour tout t, et on dérive par rapport à t en $t=0$.

Il est utile pour décrire cette situation d'introduire une section de poincaré locale en x, c'est à dire un petit disque plongé $Y \subset X$, centré en x et transverse à V. Comme l'orbite O de x est une partie compacte de X on peut supposer que $\bar{Y} \cap O = \{x\}$, c'est à dire que T est le temps de premier retour de x dans Y, et que ce retour est régulier. Il existe alors un voisinage Y_1 de x dans Y est une application de premier retour régulière $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$, qui vérifie $\psi(x)=x$.

Propriété 1.9. *La multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi_x^T$ est exactement un de plus que la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\psi_x$.*

On dit que x est une orbite périodique non dégénérée si c'est un points fixe non dégénéré de ψ, c'est à dire si la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi_x^T$ est égale à 1.

◄ On a $\varphi^T(x) = \varphi^{T-\tau(x)} \circ \psi(x)$ pour tout $x \in Y$. On a déjà vu que $d\varphi_x^T \cdot V(x) = V(x)$. Dans une base de T_xX constituée de $V(x)$ et d'une base de T_xY, on a la décomposition par blocs

$$d\varphi_x^T = \begin{bmatrix} 1 & -\partial_x\tau(x) \\ 0 & d\psi_x \end{bmatrix}. \text{ ►}$$

Proposition 1.10. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X=\mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point périodique non dégénéré de V_0 de période minimale $T>0$. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, un intervalle ouvert J contenant T, et une application $I \ni \mu \longmapsto (x_\mu, T_\mu) \in U \times J$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, un point périodique de période minimale T_μ de V_μ. De plus, l'orbite de x_μ est la seule orbite périodique de V_μ qui entre dans U et dont la période minimale appartient à J.*

◄ Soit Y une section de Poincaré locale en x_0. Le point x_0 est un point fixe non dégénéré de l'application de premier retour ψ. Montrons que l'application de retour $\psi_\mu(x)=\psi(\mu,x)$ et le temps de retour $\tau(\mu,x)$ sont C^1.

On peut considérer l'application $V(\mu,x)$ comme une champ de vecteurs $\tilde{V}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ dont la première composante est nulle. Son flot est alors $\tilde{\varphi}^t(\mu,x) = (\mu, \varphi_\mu^t(x))$, où φ_μ^t est le flot du champ V_μ sur $\mathbb{R}^d$. Si I est un intervalle ouvert contenant 0, alors $\tilde{Y} := I \times Y$ est une section de poincaré locale pour $\tilde{V}$ en $(0,x_0)$, qui est une orbite périodique de période T. Les fonctions $\tau(\mu,x)$ et $\psi(\mu,x)$ sont les temps et les applications de retour associées à la section $\tilde{Y}$. De plus, si J est un petit intervalle contenant T, pour tout $(\mu,y) \in I \times Y$, $\tau(\mu,y)$ est l'unique temps $t \in J$ pour lequel $\varphi^t(\mu,y) \in \tilde{Y}$.

Comme x_0 est un point fixe non dégénéré pour ψ_0, il existe une application $\mu \longrightarrow x_\mu$ et un voisinage W de x_0 dans Y tel que x_μ est le seul point fixe de ψ_μ dans W, c'est alors un point périodique de période $T_\mu = \tau(\mu,x_\mu)$ pour V_μ.

Il existe un voisinage U de x dans X qui a la propriété que toute orbite de U passe par W (on peut prendre par exemple une petite boite de flot). La propriété d'unicité de l'énoncé en découle : Si $x \in U$ est périodique pour V_μ, de période S contenue dans J, alors l'orbite de x intersecte W en un point y qui est lui aussi S-périodique. Il vérifie donc $\varphi_\mu^S(y)=y$, ce qui implique que $y=\psi(y)$ et donc $y=x_\mu$. ►

2 Points fixes asymptotiquement stables des systèmes discrets

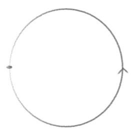
Notion de stabilité d'un point fixe. On se place dans le contexte d'une application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ où X est un espace métrique.

Le point fixe x_0 est dit *Lyapounov stable* si, pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le point fixe x_0 est dit *asymptotiquement stable* si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de x_0 tel que toute orbite partant dans W converge vers x_0.

Le bassin de x_0 est l'ensemble des points x tels que $\varphi^n(x) \longrightarrow x_0$ en $+\infty$. Si x_0 est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x_0.

La stabilité de Lyapounov est une hypothèse nécessaire (le point fixe ci-dessous n'est pas asymptotiquement stable).



Les contractions (applications de constante de Lipschitz strictement inférieure à 1) fournissent des exemples de points asymptotiquement stables :

Théorème 2.1. *Soit X un espace métrique complet et φ une contraction. Alors φ admet un unique point fixe x_0. Ce point fixe est asymptotiquement stable et son bassin est X entier.*

Quand on s'intéresse au comportement asymptotique, ces dynamiques sont les plus simples que l'on puisse imaginer : toutes les orbites convergent vers x_0.

◀ On considère n'importe quel point y_0, et la suite $y_n = \varphi^n(y_0)$ associée. On a alors $d(y_{n+1}, y_n) \leqslant bd(y_n, y_{n-1})$, où b est la constante de Lipschitz de φ. Ceci implique que

$$d(y_n, y_m) \leqslant \sum_{i \geqslant n} b^i d(y_0, y_1) \leqslant \frac{b^n}{1-b} d(y_0, y_1)$$

pour tout $m \geqslant n$. On en déduit que la suite y_n est de Cauchy, et donc qu'elle a une limite x_0. En passant à la limite dans l'égalité $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, on obtient que $x_0 = \varphi(x_0)$: x_0 est un point fixe. Si z est une autre condition initiale, alors $d(z_n, x_0) \leqslant b^n d(z, x_0) \longrightarrow 0$: toutes les orbites convergent vers x_0. Pour vérifier la stabilité de Lyapounov de x_0, il suffit de constater que les boules centrées en x_0 sont invariantes par φ. ▶

Exercice 2.1. *Soit φ une application continue de X. Supposons que il existe N tel que φ^N est une contraction. Posons*

$$d_1(x, y) = d(x, y) + d(\varphi(x), \varphi(y)) + \cdots + d(\varphi^{N-1}(x), \varphi^{N-1}(y)).$$

Montrer que d_1 est une distance sur X, équivalente à d, que (X, d_1) est complet, et que φ est une contraction pour d_1. Conclure qu'il existe un unique point fixe de φ, qui est asymptotiquement stable et attire X entier.

On peut poursuivre l'étude des contractions en s'intéressant au problème de conjugaison :

Proposition 2.2. *Soit X un espace métrique complet et soit φ un homéomorphisme de X qui est une contraction. Soit ψ un homéomorphisme qui est une contraction égale à φ en dehors d'une boule de rayon fini. Alors ψ est conjuguée à φ, c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme h de X tel que $h \circ \varphi = \psi \circ h$.*

On peut penser à h comme à un changement de coordonnées qui transforme φ en ψ. Si l'on ne suppose pas que ψ est un homéomorphisme, on obtient quand même une application continue h, on dit que c'est une semi-conjugaison.

◀ Soit x_0 le point fixe de φ, y_0 le point fixe de ψ. Il existe $R > 0$ tel que $\psi = \varphi$ en dehors de la boule $B(x_0, R)$. Pour tout $x \neq 0$, on a $d(\varphi^{-1}(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)/b$ donc $\varphi^{-n}(x)$ n'appartient pas à la boule $B(x_0, R)$ pour n assez grand. On déduit que la suite $\psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ se stabilise pour n grand. Posons $h(x) := \lim \psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ pour $x \neq x_0$, et $h(x_0) = y_0$. Montrons que h est continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $h = \psi^N \circ \varphi^{-N}$ en dehors de $B(x_0, \epsilon)$. La continuité de h dans le complémentaire de x_0 en découle. Il reste à montrer que $h(x_n) \longrightarrow y_0$ lorsque $x_n \longrightarrow x_0$. On note k_n le plus grand entier pour lequel $\varphi^{-k_n}(x_n) \in B(x_0, R)$. La suite k_n tend vers l'infini. Pour tout $i \geqslant 0$, on a $\psi^i \circ \varphi^{-i} \circ \varphi^{-k_n}(x) = \varphi^{-k_n}(x_n)$, donc $h(x_n) = \psi^{k_n} \circ \varphi^{-k_n}(x_n)$ donc $d(x_0, h(x_n)) \leqslant b^{k_n} R$ où $b =$ Lip (ψ). On déduit que h est continue.

On a $\psi \circ h(x_0) = \psi(y_0) = y_0 = h(x_0) = h(\varphi(x_0)$. Pour $x \neq x_0$, il existe N tel que $h(x) = \psi^n \circ \varphi^n(x)$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $x \neq x_0$, on a

$$h(\varphi(x)) = \lim \psi^n \circ \varphi^{1-n}(x) = \psi(\lim \psi^{n-1} \circ \varphi^{1-n}(x)) = \psi \circ h(x).$$

On a montré que h est une semi-conjugaison. Dans le cas où ψ est un homéomorphisme, on pose de la même façon $g := \lim \varphi^n \circ \psi^{-n}$. C'est une application continue.

On a $g \circ h(x_0) = x_0$ et, pour $x \neq x_0$, il existe N tel que $h(x) = \psi^N \circ \varphi^{-N}(x)$ et $g(h(x)) = \varphi^N \circ \psi^{-N}(h(x))$, ce qui implique que $g \circ h(x) = x$. On montre de même que $h \circ g = id$. Donc h est un homéomorphisme. ►

Pour montrer que le point fixe x_0 d'une contraction est asymptotiquement stable, on a utilisé la fonction $f(x) := d(x, x_0)$. On a $f \circ \varphi \leqslant bf$, ce dont on conclut que $f(x_n) \longrightarrow 0$. On peut généraliser un peu cette méthode.

Théorème 2.3. *Supposons que X est localement compact et que x_0 est un point fixe de φ. Supposons de plus qu'il existe une fonction de Lyapounov stricte en x_0, c'est à dire une fonction continue $f : U \longrightarrow [0, \infty)$, où U est un voisinage de x_0, telle que les fonctions f et $f - f \circ \varphi$ sont strictement positives sur un voisinage pointé $V - \{x_0\}$ de x_0.*

Alors x_0 est asymptotiquement stable.

Quelques digressions sont utiles avant de démontrer ce résultat. On dit que f est une fonction de Lyapounov si $f \circ \varphi - f \leqslant 0$. Le point x est dit strict si $f \circ \varphi(x) < f(x)$, il est dit neutre en cas d'égalité. Le point x est dit totalement neutre si $f \circ \varphi^n(x) = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur (totalement) neutre de f si il existe un point (totalement) neutre x de f tel que $f(x) = a$.

On définit, pour tout point x, l'omega-limite $\omega(x) \subset X$ comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $\varphi^n(x), n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, c'est l'ensemble des limites de sous-suites de la forme $\varphi^{n_k}(x)$, $n_k \longrightarrow \infty$. Dans le cas inversible, on définit $\alpha(x)$ comme l'ensemble des points d'accumulations en $-\infty$.

Lemme 2.4. *L'ensemble $\omega(x)$ est fermé et positivement invariant. Si l'espace X est compact, alors $\omega(x)$ est non-vide pour tout x.*

◄ Tout point y de $\omega(x)$ est la limite d'une suite de la forme $\varphi^{n_k}(x)$. Alors, $\varphi(y)$ est la limite de la suite $\varphi^{n_k+1}(x)$, il appartient donc à $\omega(x)$. On a

$$\omega(x) = \cap_{n \geqslant 0} \overline{\{\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x), \ldots\}},$$

c'est donc une intersection de fermés, et, dans le cas où X est compact, une intersection décroissante de compacts non vides. ►

Proposition 2.5. *Si f est une fonction de Lyapounov, chaque ensemble limite $\omega(x)$ est contenu dans un niveau totalement neutre de f.*

◄ Si $\omega(x)$ est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on considère un point $y \in \omega(x)$ qui est donc la limite d'une sous-suite $\varphi^{n_k}(x)$. La suite $f \circ \varphi^n(x)$ étant décroissante, elle tend vers $a := f(y)$. L'ensemble $\omega(x)$ est donc contenu dans $f^{-1}(a)$. Comme c'est un ensemble positivement invariant, ses points sont donc totalement neutres. ►

Revenons à la démonstration du théorème.

◄ On considère la fonction $f : U \longrightarrow [0, \infty)$ et le voisinage $V \subset U$ tel que $f > 0$ et $f - f \circ \varphi > 0$ sur $V - \{x_0\}$.

On considère un voisinage compact $K \subset V$ de x_0. On considère un voisinage ouvert W de x_0 tel que $\varphi(\bar{W}) \subset K$. On pose $a = \min_{K-W} f$, on a $a > 0$. On pose $Y = \{x \in \bar{W}, f(x) \leqslant a\}$, qui est un voisinage compact de x_0. L'ensemble Y est positivement invariant. En effet, si $x \in Y$, alors $\varphi(x) \in K$ et $f \circ \varphi(x) < f(x) = a$. Ceci implique que x est dans W, donc dans Y. En appliquant la proposition à $\varphi_{|Y}$, on conclut que $\omega(x) \subset \{x_0\}$ pour tout $x \in Y$. Comme Y est compact, on a donc $\omega(x) = \{x_0\}$, c'est à dire que toutes les orbites de Y tendent vers x_0. Si U' est un voisinage de x_0 contenu dans U, on construit comme ci-dessus un voisinage de x_0 positivement invariant Y' contenu dans U', ce qui montre la stabilité de Lyapounov. ►

Exercice 2.2. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f > 0$ sur $X - \{x_0\}$. Supposons de plus que f est propre (c'est à dire que les ensembles $f^{-1}([0, a])$ sont compacts) et stricte en dehors de x_0. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable de bassin X entier.*

Exercice 2.3. *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x) \geqslant h(d(x_0,x))$, où $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ est une fonction continue strictement croissante. Supposons de plus qu'il existe une fonction continue $\phi :]0,\infty) \longrightarrow]0,\infty)$ telle que $f\circ\varphi \leqslant f - \phi\circ f$. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable de bassin X entier.*

Le théorème admet une réciproque :

Théorème 2.6. *On suppose X localement compact. Soit x_0 un point fixe asymptotiquement stable, de bassin B. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ qui a les propriétés suivantes : $f = 1$ sur $X - B$, $f \in]0,1[$ sur $B - \{x_0\}$, $f(x_0) = 0$, $f\circ\varphi - f < 0$ sur $B - \{x_0\}$.*

On commence par quelques lemmes :

Lemme 2.7. *On suppose X localement compact. Le point fixe x_0 est asymptotiquement stable si et seulement si il existe un voisinage U de x_0 qui converge uniformément vers x_0 au sens suivant : pour tout voisinage W de x_0 il existe N tel que $\varphi^n(U) \subset W$ pout tout $n \geqslant N$.*

◄ Supposons que U existe. Il est alors clair que toutes les orbites de U tendent vers x_0. Fixons maintenant un voisinage W de x_0. Il existe N tel que $\varphi^n(U) \subset W$ pour tout $n \geqslant N$. D'autre part, la continuité de φ implique l'existence d'un voisinage $V \subset U$ de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \leqslant N$. On a donc $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$, donc x_0 est Lyapounov stable.

Réciproquement, supposons que x_0 est asymptotiquement stable. Soit B le bassin de x_0, et U un voisinage compact de x_0 contenu dans B. Soit W un voisinage de x_0, et V un voisinage ouvert de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout voisinage ouvert W de x_0, les préimages $\varphi^{-n}(V), n \in \mathbb{N}$ recouvrent B, donc elles recouvrent U. Par compacité, il existe N tel que les préimages $\varphi^{-n}(V), n \leqslant N$ recouvrent U. Pour tout $x \in U$, il existe donc $k \leqslant N$ tel que $\varphi^(x) \in V$, et alors $\varphi^n(x) \in W$ pour tout $n \geqslant k$, en particulier pour tout $n \geqslant N$. ►

Lemme 2.8. *Soit U un ouvert. Supposons que $\overline{\varphi(U)} \subset U$ et notons $A := \cap_{n\geqslant 0}\varphi^n(U)$ et $B := \cup_{n\geqslant 0}\varphi^{-n}(U)$. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie les propriétés suivantes : $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = X - B$, $f\circ\varphi - f < 0$ sur $B - A$.*

◄ Pour chaque n, on considère ne fonction continue $g_n : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $g_n^{-1}(0) = \overline{\varphi^n(U)}$ et $g_n^{-1}(1) = X - U$. On constate que $g_n\circ\varphi^n \leqslant g_n$, avec une inégalité stricte sur $\varphi^{-n}(U) - \overline{\varphi^n(U)}$. En effet, si $x \in U$, alors $g_n\circ\varphi^n(x) = 0 \leqslant g_n(x)$, et cette inégalité est stricte si $x \in U - \overline{\varphi^n(U)}$. Si $x \notin U$, alors $g_n(x) = 1 \geqslant g_n\circ\varphi^n(x)$, et cette inégalité est stricte pour $x \in \varphi^{-n}(U)$.

Pour chaque n, on pose $f_n := (g_n + \ldots + g_n\circ\varphi^{n-1})/n$. La fonction $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ est continue, elle vérifie $f_n\circ\varphi - f_n = (g_n\circ\varphi^n - g_n)/n \leqslant 0$, avec inégalité stricte sur $\varphi^{-n}(U) - \overline{\varphi^n(U)}$. De plus, $f_n(x) = 1$ si et seulement si $g_n(x) = g_n\circ\varphi(x) = \cdots = g_n\circ\varphi^n(x) = 1$, c'est à dire si et seulement si $x \in X - \varphi^{-n}(U)$. D'autre part, $f_n(x) = 0$ si et seulement si $g_n(x) = g_n\circ\varphi(x) = \cdots = g_n\circ\varphi^n(x) = 0$, c'est à dire si et seulement si $x \in \overline{\varphi^n(U)}$.

On considère maintenant une suite $a_n, n \geqslant 0$, à terme strictement positifs, et telle que $\sum a_n = 1$. On pose $f := \sum a_n f_n$. Comme $f(x)$ est une somme de termes positifs, $f(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$ pour tout n, c'est à dire si et seulement si $x \in A$. De la même façon, on a $f(x) \leqslant \sum a_n = 1$ sauf si $g_n(x) = 1$ pour tout n, c'est à dire si $x \notin \cup\varphi^{-n}(U)$. Finalement, $f\circ\varphi - f = \sum a_n(f_n\circ\varphi - f_n) \leqslant 0$. Cette inégalité est stricte si et seulement si l'un des termes est strictement négatif, c'est à dire pour $x \in B - A$. ►

Concluons la preuve du théorème :

◄ Soit x_0 un point fixe asymptotiquement stable. Il existe alors un voisinage relativement compact U qui converge uniformément vers x_0. En particulier, il existe N tel que $\overline{\varphi^N(U)} \subset U$, $\cap\varphi^{nN}(U) = \{x_0\}$, et $\cup\varphi^{-nN}(U) = B$, le bassin de x_0.

Il existe alors une fonction de Lyapounov continue $g : X \longrightarrow [0,1]$ pour φ^N, telle que $g^{-1}(0) = \{x_0\}$, $g\circ\varphi^N - g < 0$ sur $B - A$, $g^{-1}(1) = X - B$.

La fonction $f := (g + g\circ\varphi + \cdots + g\circ\varphi^{N-1})/N$ vérifie alors $f\circ\varphi - f = (g\circ\varphi^N - g)/N \leqslant 0$, avec inégalité stricte sur $B - A$, ainsi que les autres propriétés demandées. ►

Si X est une variété, la fonction de Lyapounov peut être choisie de classe C^∞. C'est une conséquence du résultat suivant :

Proposition 2.9. *Soit X une variété C^∞ de dimension finie et $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue. Soit $f : X \longrightarrow [0,1]$ une fonction de Lyapounov continue. Supposons que les ensembles $A := f^{-1}(0)$, et $B := X - f^{-1}(1)$ son positivement invariants. Supposons finalement que f est stricte sur $B - A$. Alors il existe une fonction de Lyapounov g, de classe C^∞, telle que $g^{-1}(1) = X - B$, $g^{-1}(0) = A$ et g est stricte sur $B - A$.*

◄ Comme $f \circ \varphi < f$ sur l'ouvert $B - A$, il existe une fonction $\tilde{g} : B - A \longrightarrow]0,1[$ de classe C^∞ et telle que $f \circ \varphi < \tilde{g} < f$. Ceci implique que $\tilde{g} \circ \varphi < f \circ \varphi < \tilde{g}$, donc $\tilde{g}$ est une fonction de Lyapounov stricte sur $B - A$.

On prolonge $\tilde{g}$ par les valeurs 1 sur $X - B$ et 0 sur A. On obtient une fonction de Lyapounov continue sur X, qui est stricte et C^∞ sur $B - A$.

Il existe alors une fonction $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, strictement croissante, lisse sur $]0,1[$, et telle que $g := \phi \circ \tilde{g}$ est C^∞ (il faut prendre ϕ très plate en 0 et en 1). Cette fonction remplit toutes les conditions demandées. ►

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^d$ (ou plus généralement une variété) et où φ est C^1, on considère le linéarisé $L = d\varphi_{x_0}$.

On note R le *rayon spectral* de L, c'est à dire le maximum des modules de ses valeurs propres complexes (L est un endomorphisme réel).

Théorème 2.10. *Si $R < 1$, alors x_0 est asymptotiquement stable. On dit que le point fixe est linéairement stable. Si $R > 1$, alors x_0 n'est pas Lyapounov stable (donc pas asymptotiquement stable).*

Comme le montre la preuve ci-dessous, il suffit de supposer que φ est différentiable en 0 (pas necessairement C^1).

On rappelle la formule du rayon spectrale : $R = \lim \|L^n\|^{1/n}$.

Nous baserons la preuve du théorème sur le lemme suivant, qui est important en lui-même :

Lemme 2.11. *Soit $L : B \longrightarrow B$ un endomorphisme de l'espace de Banach $(B, |.|)$, soit R le rayon spectral de L et $b > R$. Il existe une norme $\|.\|$ de Banach sur B, équivalente à la norme $|.|$, pour laquelle $\|L\| \leqslant b$. Si la norme $|.|$ est Hilbertienne, alors la norme $\|.\|$ l'est aussi.*

Si L est un isomorphisme de Banach, si r est l'inverse du rayon spectral de L^{-1} (c'est donc l'infimum des modules des éléments du spectre de L), et si $0 < a < r$, alors il existe une norme $[.]$ pour laquelle

$$a[v] \leqslant [Av] \leqslant b[v]$$

pour tout $v \in B$.

◄ Il existe N tel que $\|A^N\| \leqslant b^N$ (par la formule du rayon spectral). On pose

$$\|v\| := \left(\sum_{i=0}^{N-1} b^{-2i} |A^i v|^2 \right)^{1/2},$$

de sorte que

$$\|Av\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} b^{-2i} |A^{i+1} v|^2 = b^2 \sum_{i=1}^{N} b^{-2i} |A^i v|^2 = b^2 (\|v\|^2 - |v|^2 + b^{-2N} |A^N v|^2) \leqslant b^2 \|v\|^2.$$

Dans le cas où L est inversible, on choisit M tel que $\|A^{-M}\| \leqslant a^{-M}$ et on pose

$$[v]^2 := \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} \|A^{-i} v\|^2.$$

Par un calcul identique au précédent, on obtient que $[A^{-1}v] \leqslant a^{-1}[v]$ pour tout v, donc que $a[v] \leqslant [Av]$. Par ailleurs,

$$[Av]^2 = \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} \|A \circ A^{-i} v\|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} b^2 \|A^{-i} v\| = b^2 [v]^2. \text{ ►}$$

Montrons maintenant le théorème :

On suppose que $R(L) < 1$, et on choisit $b \in]R, 1[$. Il existe une norme $\|.\|$ pour laquelle $\|L\| < b$. Il existe alors un petit voisinage convexe de x_0 sur lequel $\|d\varphi\| \leqslant b$. Sur ce voisinage, l'application φ est donc b-Lipschitzienne. En particulier, on a

$$\|\varphi(x) - x_0\| \leqslant b \|x - x_0\|$$

ce dont on déduit facilement les conclusions voulues.

Réciproquement, supposons que $R > 1$ (et que l'espace est de dimension finie). On a alors une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^d = E \oplus F$, où E et F sont invariants par L, où toutes les valeurs propres de $L_{|E}$ sont de module R, et où le rayon spectral R_F de $L_{|F}$ est strictement inférieur à R (une telle décomposition n'existe pas forcément en dimension infinie). On fixe a et $b > 1$ tels que $R_F < b < a < R$. En appliquant le Lemme, on trouve une norme Euclidienne $\|.\|_E$ sur E telle que $\|Lv\|_E \geqslant a\|v\|_E$ pour tout v dans E et un norme Euclidienne $\|.\|_F$ sur F telle que $\|Lv\|_F \leqslant b\|v\|_F$ pour tout $v \in F$. On pose alors $\|v\|^2 = \|v_E\|_E^2 + \|v_F\|_F^2$, où v_E et v_F sont les composantes de v suivant E et F. C'est une norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, pour laquelle E et F son orthogonaux, et qui coïncide avec $\|.\|_E$ sur E et $\|.\|_F$ sur F.

Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les inégalités suivantes sont satisfaites pour $x \in B(0, \epsilon)$:

$$\|\varphi_E(x)\| \geqslant a\|x_E\| - \delta\|x\| \quad , \quad \|\varphi_F(x)\| \leqslant b\|x_F\| + \delta\|x\|.$$

En choisissant δ assez petit pour que $b+2\delta < a-2\delta$, nous allons en conclure que tout voisinage de 0 contient un point dont l'orbite sort de $B(0, \epsilon)$, contredisant la stabilité de Lyapounov. On prend une condition initiale $x = x_E + x_F$ telle que $\|x_E\| \geqslant \|x_F\|$. Ceci implique que $\|\varphi_E(x)\| \geqslant (a - 2\delta)\|x_E\|$ et $\|\varphi_F(x)\| \leqslant b\|x_F\| + 2\delta\|x_E\| \leqslant (b + 2\delta)\|x_E\|$. En notant $x^n = x_E^n + x_F^n$ l'orbite de x, on obtient donc par récurrence que, tant que $x^n \in B(0, \epsilon)$, $\|x_E^n\| \geqslant \|x_F^n\|$ et $\|x_E^n\| \geqslant (a - 2\delta)^n\|x_E\|$. Comme $a - 2\delta > 1$, l'orbite sort de $B(0, \epsilon)$. ►

On peut se poser les mêmes questions dans le cas où X est un espace de Banach de dimension infinie. On remarque que la preuve ci-dessus n'utilise jamais la finitude de la dimension pour la partie stabilité, qui reste donc vraie en dimension infinie. La partie instabilité est un peu plus délicate. Pour que la preuve fonctionne, il faut supposer un peu plus sur le linéarisé afin de pouvoir décomposer l'espace comme nous l'avons fait dans la preuve. Il suffit par exemple de supposer l'existence d'un réel $R' \in [1, R[$ tel que le spectre du linéarisé ne contient aucun point de module R'. Cette hypothèse supplémentaire n'est pas nécessaire si φ est supposée C^2, mais il faut une autre démonstration.

Revenons à la questions de la conjugaison topologique au voisinage du point fixe :

Proposition 2.12. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue fixant l'origine. Supposons que $L = d\varphi_0$ existe, est inversible, et de rayon spectral strictement inférieur à 1. Alors φ est localement conjuguée à L. Plus précisément il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 et un homéomorphisme $h : U \longrightarrow V$ tel que $h \circ L = \varphi \circ h$ sur U.*

◄ On choisit une norme Euclidienne $|.|$ pour laquelle L est une contraction. On écrit $\varphi = L + \phi$, où $\phi(x) = o(|x|)$. On considère une fonction de troncature $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, 1]$ qui est égale à 1 sur la boule $B(0, 1)$ et à 0 hors de la boule $B(0, 2)$. En notant $f_\epsilon(x) = f(x/\epsilon)$, on considère l'application $\psi := L + f_\epsilon\phi$. On va montrer que c'est, pour $\epsilon > 0$ petit, un homéomorphisme et une contraction, ce qui implique la conclusion par la Proposition 2.2. Il suffit pour ceci de montrer que Lip$(f_\epsilon\phi)$ peut être rendu arbitrairement petit. Il existe une fonction $\delta(\epsilon)$ qui tend vers 0 en 0 et a les propriétés suivantes : ϕ est $\delta(\epsilon)$-Lipschitz sur $B(0, 2\epsilon)$, et $|\phi| \leqslant \epsilon\delta(\epsilon)$ sur $B(0, 2\epsilon)$. On a alors

$$\text{Lip}(f_\epsilon\phi) \leqslant \delta(\epsilon) + \delta(\epsilon)\text{Lip}(f),$$

cette constante de Lipschitz tend donc vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. ►

Exercice 2.4. *Soit φ et ψ deux homéomorphismes de X et Y, respectivement. Soient x_0 et y_0 des points fixes asymptotiquement stables de φ et ψ. Supposons que φ au voisinage de x_0 est topologiquement conjugué (c'est à dire conjugué par un homéomorphisme) à ψ au voisinage de y_0. Si B et B' sont les bassins d'attraction de x_0 et y_0, montrer que $\varphi_{|B}$ est topologiquement conjugué à $\psi_{|B'}$.*

En particulier, les bassins B et B' sont homéomorphes. Le bassin d'un point fixe linéairement stable d'un difféomorphisme est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^d$.

Sous des hypothèses supplémentaires, on obtient une conjugaison plus régulière.

Proposition 2.13. *Soit φ un difféomorphisme C^{k+2} ($k \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$) d'une variété X, fixant x_0. Supposons que les modules des valeurs propres du linéarisé $L = d\varphi_{x_0}$ sont contenues dans l'intervalle $[r, R]$, avec $R^2 < r < R < 1$. Alors, en notant B le bassin de 0, l'application $\varphi_{|B} : B \longrightarrow B$ est globalement conjuguée à son linéarisé $L : T_{x_0}X \longrightarrow T_{x_0}X$ par un difféomorphisme C^k.*

En dimension 1, l'hypothèse de pincement est toujours satisfaite.

◄ On fixe a et b tels que $b^2 < a < r < R < b$. On choisit une norme Euclidienne sur $T_{x_0}X$ telle que $|L| < b$ et $|L^{-1}| < 1/a$. On pose $h_n = L^{-n} \circ \varphi^n$. On va montrer que, au voisinage de x_0, la suite h_n converge uniformément vers une limite continue h, qui vérifie automatiquement $h \circ \varphi = L \circ h$. On identifie un voisinage de x_0 à l'espace tangent $T_{x_0}X$. Au voisinage de 0, φ est b-Lipschitz, et il existe une constante C telle que $|\varphi^{-1}(x) - L^{-1}(x)| \leqslant C|x|^2$. On a donc $|L^{-1}(\varphi^{n+1}(x)) - \varphi^{-1}(\varphi^{n+1}(x))| \leqslant Cb^{2n}|x|^2$. En appliquant L^{-n}, on déduit que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant C(b^2/a)^n|x|^2$. Comme $b^2/a < 1$, cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite h_n dans un voisinage de x_0, vers une limite continue h qui vérifie de plus $dh_0 = id$, et donc est un homéomorphisme local. Il existe donc un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que h_n converge, uniformément sur U, vers $h : U \longrightarrow V$ qui est un homéomorphisme, où V est un voisinage ouvert de 0 dans $T_{x_0}X$.

En fait, la convergence uniforme de h_n sur un voisinage de x_0 implique que cette convergence a lieu sur tout B, uniformément sur les compacts. En effet, si K est un compact de B et si U est un voisinage de x_0 sur lequel la convergence uniforme a lieu, il existe N tel que $\varphi^N(K) \subset U$. Ceci implique que $h_n \circ \varphi^N$ converge uniformément sur K, il en est donc de même de $h_{n+N} = L^{-N} \circ h_n \circ \varphi^N$. La limite h vérifie $h = L^{-N} \circ h \circ \varphi^N$, c'est donc un homéomorphisme de K sur son image. Si K' est un compact de $T_{x_0}X$, alors il existe N tel que $L^N(K') \subset V$, donc $h^{-1}(K') = \varphi^{-N}(h^{-1}(L^N(K')))$ est compact. L'application $h : B \longrightarrow T_{x_0}M$ est une bijection continue et propre, c'est donc un homéomorphisme.

Si $K \geqslant 1$, on considère maintenant l'application $T\varphi(x,v) := (\varphi(x), d\varphi_x \cdot v)$. Elle fixe le point $(0,0)$ et sa différentielle est $TL(v,w) = (Lv, Lw)$. Les valeurs propres de TL sont les mêmes que celles de L. On montre donc comme ci-dessus que la suite $H_n = (TL)^{-n} \circ (T\varphi)^n$ converge vers une limite continue H sur $B \times T_{x_0}X$, uniformément sur les compacts. Comme $H_n = Th_n$, on conclut que h est C^1, avec $Th = H$. Dans le cas $k > 1$, on termine la preuve par récurrence. ►

La méthode ci-dessus est due à Nelson[1]. Il l'utilise pour démontrer qu'il existe une conjugaison régulière, sans hypothèse de pincement sur les valeurs propres de L, mais en supposant que $|\varphi - L| = O(|x|^r)$ avec r assez grand, ce résultat étant originalement du à Sternberg.

La régularité des conjugaisons est une question assez subtile, comme l'illustre les exercices ci-dessous :

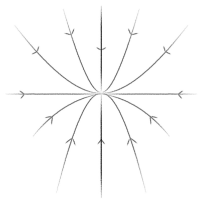
Exercice 2.5. *Considérons l'application* $\varphi(x,y) = (x/2, y/5 + x^2)$ *et son linéarisé* $\phi(x,y) = (x/2, y/5)$.

Montrer qu'il existe une conjugaison C^∞ *entre* φ *et* ϕ, *qui est de la forme* $h(x,y) = (x, y + ax^2)$.

Exercice 2.6. *Considérons l'application* $\varphi(x,y) = (x/2, y/4 + x^2)$ *et son linéarisé* $\phi(x,y) = (x/2, y/4)$.

Montrer qu'il existe une conjugaison entre φ *et* ϕ *de la forme* $h(x,y) = (x, y + ax^2 \ln x)$. *Quelle est la régularité de h ?*

Montrer qu'il n'existe pas de conjugaison C^2 *au voisinage de* 0.



1. E. Nelson, Topics in dynamics I : flows.

3 Points fixes asymptotiquement stables des champs de vecteurs

On considère maintenant le cas où X est une variété (ou juste $X = \mathbb{R}^d$) et où V est un champ de vecteurs C^1 et complet sur X. On note φ^t le flot. Les points fixes Lyapounov stables et asymptotiquement stables se définissent exactement comme dans le cas des applications :

Le point fixe x_0 est dit Lyapounov stable si, pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\varphi^t(V) \subset U$ pour tout $t \geqslant 0$.

Le point fixe x_0 est dit asymptotiquement stable si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de x_0 tel que toute orbite partant dans W converge vers x_0.

Le bassin de x_0 est l'ensemble des points x tels que $\varphi^t(x) \longrightarrow x_0$ en $+\infty$. Si x_0 est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x_0.

Propriété 3.1. *Le point fixe x_0 est Lyapounov (resp. asymptotiquement) stable pour V si et seulement si il existe $T > 0$ tel que x_0 est Lyapounov (resp. asymptotiquement) stable pour φ^T. De plus, le bassin de x_0 en tant que point fixe de φ^T est égal au bassin de x_0 en tant que point fixe de V.*

◄ Il est clair que les propriétés de stabilité pour V entreine les mêmes propriétés pour chacun des flots $\varphi^t, t > 0$.

Réciproquement, supposons que x_0 est Lyapounov stable pour φ^T, avec $T > 0$. Pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage W tel que $\varphi^t(W) \subset U$ pour tout $t \in [0, T]$. Ceci découle de la compacité de $[0, T]$ et de la continuité de l'application $(t, x) \longmapsto \varphi^t(x)$.

Comme x_0 est Lyaounov stable pour φ^T, il existe un voisinage W' tel que $\varphi^{nT}(W') \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$. On déduit que $\varphi^t(W') \subset U$ pour tout $t \geqslant 0$.

Finalement, si l'orbite $x(t) = \varphi^t(x)$ converge vers x_0, il en est clairement de même de la suite $n \longmapsto x(nT)$. Réciproquement, supposons que la suite $x(nT)$ converge vers x_0. Pour tout voisinage U de x_0, on a vu qu'il existe un voisinage W pour lequel $\varphi^t(W) \subset U$ pour tout $t \in [0, T]$. Il existe N tel $x(nT) \in W$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui implique que $x(t) \in U$ pour tout $t \geqslant NT$. ►

On manipulera dans la suite des inégalités différentielles, et on utilisera le résultat suivant (Lemme de Gronwall) :

Lemme 3.2. *Soit $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, croissante par rapport à x. Soient $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions mesurables satisfaisant*

$$x(t) \leqslant x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$
$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s))ds.$$

Alors, si $x_0 < y(0)$, on a $x(t) < y(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

◄ Soit $[0, T[$ le plus grand intervalle de la forme $[0, t[$ sur lequel $x < y$. Alors

$$y(T) = y(0) + \int_0^T f(s, y(s))ds > x_0 + \int_0^T f(s, x(s))ds \geqslant x(T)$$

puisque $x(s) \leqslant y(s)$ sur $[0, T]$. Ceci contredit la maximalité de T. ►

En particulier :

Propriété 3.3. *Si $a > 0$ et*

$$x(t) \leqslant x_0 + \int_0^t ax(s)ds,$$

pour tout $t \geqslant 0$, alors $x(t) \leqslant x_0 e^{at}$ pour tout $t \geqslant 0$.

◄ On applique le lemme avec $f(t, x) = ax$ et $y(t) = y_0 e^{at}$, $y_0 > x_0$. On remarque en effet que $y' = ay$, et donc $y(t) = y_0 + \int_0^t ay(s)ds$. On conclut que $x(t) < y_0 e^{at}$ pour tout $y_0 > x_0$, et donc que $x(t) \leqslant x_0 e^{at}$. ►

Pour donner un analogue des contractions en termes de champs de vecteurs, on commence par la remarque suivante :

Lemme 3.4. *Soit V un champ de vecteurs Lipschitz complet sur un espace de Hilbert E. Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

— *Le flot φ^t est e^{tb}-Lipschitz pour tout $t \geqslant 0$*
— $\langle V(x) - V(y), x - y\rangle \leqslant 2b\|x - y\|^2$ *pour tous x et y.*

◄ Un calcul simple montre que

$$\frac{d}{dt}\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2 = \langle V(\varphi^t(x)) - V(\varphi^t(y), \varphi^t(x) - \varphi^t(y)\rangle.$$

Si l'on suppose le premier point, alors $\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2 \leqslant e^{2tb}\|x - y\|^2$ pour tout $t \geqslant 0$, donc

$$\langle V(x) - V(y), x - y\rangle = \frac{d}{dt}_{|t=0}\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2 \leqslant 2b\|x - y\|^2.$$

Réciproquement, en supposant le second point, la fonction $f(t) := \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2$ vérifie l'inégalité $f'(t) \leqslant 2bf(t)$, ce qui entraine que $f(t) \leqslant f(0)e^{2bt}$ par le Lemme de Gronwall. ►

Proposition 3.5. *Soit V un champ de vecteur de l'espace de Hilbert E. Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que*

$$\langle V(x) - V(y), x - y\rangle \leqslant -2a\|x - y\|^2$$

pour tous x, y. Alors Le champ V admet un unique point fixe, qui est asymptotiquement stable et attire toutes les orbites. Le champ V est positivement complet et ses flots $\varphi^t, t > 0$ sont des contractions.

◄ Soit $x(t) : [0, T[\longrightarrow E$ une orbite maximale. Montrons pour commencer que $T = +\infty$. Si T est fini, on écrit par exemple $\|x(S + t) - x(S)\| \leqslant e^{-aS}\|x(t) - x(0)\| \leqslant \|x(T - S) - x(0)\|$ pour tout $t \in [0, T - S[$. Comme la fonction $t \longmapsto \|x(t) - x(0)\|$ tend vers 0 en 0, ceci implique que la courbe $x(t)$ a une limite en T, ce qui contredit la maximalité.

Le champ V est donc positivement complet, ses flots $\varphi^t, t > 0$ sont e^{-ta}-Lipschitz par les calculs ci-dessus. Soit x_0 l'unique point fixe de φ^1. C'est alors l'unique point fixe de $\varphi^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, l'orbite $x(t)$ associée est périodique de période $1/n$ pour tout n, c'est donc un point fixe : $V(x_0) = 0$. Il est alors évident que toutes les orbites convergent vers x_0. ►

Si f est une fonction de classe C^1, alors les points suivants sont évidemment équivalents :
— $f \circ \varphi^t \leqslant f$ pour tout $t \geqslant 0$.
— $df \cdot V \leqslant 0$.
On dit alors que f est une fonction de Lyapounov. Il n'est donc pas nécessaire de déterminer le flot pour vérifier que f est une fonction de Lyapounov.

Théorème 3.6. *Soit x_0 un point fixe du champ de vecteurs V.*

Si il existe une fonction de Lyapounov $f : U \longrightarrow [0, \infty)$, de classe C^1 sur un voisinage U de x_0, qui vérifie $f(x_0) = 0$ et telle que les fonctions f et $-df \cdot V$ sont strictement positives sur $U - \{x_0\}$, alors x_0 est asymptotiquement stable.

Réciproquement, si x_0 est asymptotiquement stable, de bassin B, alors il existe une fonction de Lyapounov $f : X \longrightarrow [0, 1]$, de classe C^∞, telle que $f(x_0) = 0$, $f \in]0, 1[$ sur $B - \{x_0\}$, $df \cdot V < 0$ sur $B - \{x_0\}$, et $f = 1$ sur $X - B$.

◄ Le premier énoncé découle du cas des applications.

Montrons le second énoncé. Le point x_0 est un point fixe asymptotiquement stable pour φ^1 dont le bassin est B. Il existe donc une fonction de Lyapounov $g : X \longrightarrow [0, 1]$, de classe C^∞, pour φ_1, telle que $g \circ \varphi^1 - g < 0$ sur $B - \{x_0\}$, $g^{-1}(0) = \{x_0\}$, $g^{-1}(1) = X - B$.

On pose alors $f = \int_0^1 g \circ \varphi^s ds$, c'est une fonction C^1. On a

$$\begin{aligned}(df \cdot V)(x) &= \int_0^1 dg_{\varphi^s(x)} \circ d\varphi^s_x \cdot V(x)ds = \int_0^1 dg_{\varphi^s(x)} \cdot V(\varphi^s(x))ds = \int_0^1 \frac{d}{ds}(g \circ \varphi^s(x))ds \\ &= (g \circ \varphi^1 - g)(x).\end{aligned}$$

Si V n'est que C^1, la fonction f n'est a priori que C^1, mais elle peut être régularisée, comme dans le cas des applications. Pour ceci, on considère d'abord une fonction continue strictement positive $\epsilon : B - A \longrightarrow]0, \infty)$ telle que $df \cdot V < -2\epsilon|V|$, $f > 2\epsilon$ et $f < 1 - 2\epsilon$ sur $B - A$. Alors, il existe une fonction f_1, de classe C^∞, telle que $|f - f_1| \leqslant \epsilon$ et $|df - df_1| \leqslant \epsilon$. La fonction f_1 vérifie encore $df_1 \cdot V < 0$ sur $B - A$, et elle se prolonge en une fonction continue sur X par les valeurs 0 sur A et 1 sur $X-B$. On régularise alors f_1 en posant $f_2 = \phi \circ f_1$, où $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est une fonction strictement croissante "assez plate" en 0 et en 1. ►

Comme dans le cas des applications, le linéarisé $L := dV_{x_0}$ donne des informations utiles sur la dynamique au voisinage du point fixe x_0. L'équation différentielle linéaire $v'(t) = L(V(t))$ est en effet une bonne approximation de l'équation $x'(t) = V(x(t))$ au voisinage du point x_0. Le flot de cette équation linéarisée est e^{tL}. Comme les valeurs propres de e^{tL} sont $e^{t\lambda}$, où λ est une valeur propre de L, on s'attend à un comportement asymptotiquement stable si $|e^{t\lambda}| < 1$ pour toute valeur propre λ de L, c'est à dire si toutes les valeurs propres de L ont des parties imaginaires strictement négatives.

Dans le cas où X est une variété, il n'est pas complètement évident que L est bien défini en tant qu'endomorphisme de $T_{x_0}X$. Si ϕ et ψ sont deux cartes de X en x_0, on peut considérer les représentants $V_\phi = \phi_* V$ et $V_\psi = \psi_* V$ de V dans ces cartes. On peut alors calculer les linéarisés dans les cartes, $L_\phi = d(V_\phi)_0$ et $L_\psi = d(V_\psi)_0$. Ce sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ et la question est de savoir si ils représentent le même endomorphisme de $T_{x_0}X$, c'est à dire si $L_\psi \circ df_0 = df_0 \circ L_\phi$, en notant $f = \psi \circ \phi^{-1}$. On a $V_\psi = f_* V_\phi$, c'est à dire que $V_\psi(f(x)) = df_x \cdot V_\phi(x)$. On différentie en $x = 0$, ce qui donne

$$L_\psi \circ df_0 = df_0 \cdot L_\phi + d^2 f_0 \cdot V_\phi(0).$$

On a donc bien l'égalité voulue si (et seulement si) $V_\phi(0) = 0$, c'est à dire si $V(x_0) = 0$. Il résulte des considération ci-dessus que le linéarisé L d'un champ de vecteur est bien défini en tant qu'endomorphisme de $T_{x_0}X$ lorsque x_0 est un point fixe de V.

On peut aussi définir ce linéarisé L sans passer par les cartes en utilisant le flot $\varphi^t(x)$, qui est défini pour tout t dans un voisinage de x_0. Comme $\varphi^t(x_0) = x_0$, on peut définir $G_t := d\varphi^t_{x_0}$. C'est un groupe d'isomorphismes de $T_{x_0}X$, c'est à dire que $G^0 = Id$ et $G^{t+s} = G^t \circ G^s$. Il existe donc un endomorphisme L de $T_{x_0}X$ tel que $G^t = e^{tL}$, c'est le linéarisé de V en 0. Au delà de ces questions de définitions, on retiendra l'expression

$$d(\varphi^t)_{x_0} = e^{tL}$$

qui relie le linéarisé du champ de vecteur à la différentielle de son flot.

Théorème 3.7. *Soit x_0 un point fixe du champ de vecteur V. Soit L le linéarisé de V en x_0, et soit χ le supremum des parties réelles des éléments du spectre de L.*

Si $\chi < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable. On dit que le point fixe est linéairement stable.

Si $\chi > 0$, alors x_0 n'est pas Lyapounov stable, donc pas asymptotiquement stable.

Comme dans le cas des applications, on utilise une norme adaptée à la dynamique.

Lemme 3.8. *Soit L une application linéaire continue de l'espace de Hilbert H. Supposons qu'il existe un intervalle $[a', b']$ qui contient les parties réelles des éléments du spectre de L, et soit $]a, b[$ un intervalle ouvert contenant $[a', b']$. Alors il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur H, qui engendre une norme équivalente à la norme initiale, et tel que*

$$a(v,v) \leqslant (Lv, v) \leqslant b(v,v)$$

pour tout $v \in H$.

La conclusion implique en particulier que le champ de vecteurs linéaire $V(x) = Lx$ vérifie les hypothèse de l'énoncé précédent si $b < 0$. Le point fixe 0 est alors asymptotiquement stable pour l'équation $\dot{x} = Lx$. Pour faire le lien avec le cas des applications, on remarque que le flot e^{tL} de cette équation est une application linéaire dont le rayon spectral est majoré par $e^{tb'}$ (qui est < 1 pour $b' < 0$). Dans la norme donnée par l'énoncé, on a $|e^{tL}| \leqslant e^{tb}$ (qui est < 1 si $b < 0$).

◄ Le rayon spectral de e^L est strictement inférieur à e^b donc par la formule du rayon spectral il existe $T > 0$ pour lequel $\|e^{TL}\| < e^{Tb}$ (norme initiale sur E). On pose

$$[v, w] = \int_0^T e^{-2tb} \langle e^{tL} v, e^{tL} w \rangle dt$$

et on calcule

$$\begin{aligned} 2[Lv, v] &= 2\int_0^T e^{-2tb} \langle e^{tL} Lv, e^{tL} v \rangle dt = \int_0^T e^{-2tb} \frac{d}{dt} \langle e^{tL} v, e^{tL} v \rangle dt \\ &= 2b \int_0^T e^{-2tb} \langle e^{tL} v, e^{tL} v \rangle dt + e^{-2Tb} \langle e^{TL} v, e^{TL} v \rangle - \langle v, v \rangle \\ &\leqslant 2b[v, v]. \end{aligned}$$

Ensuite, on choisit $S > 0$ tel que $|e^{-SL}| < e^{-Sa}$ (norme associée à $[.,.]$) et on pose

$$(v, w) = \int_0^S e^{2ta}[e^{-tL}v, e^{-tL}w]dt.$$

Le même calcul que ci-dessus montre que $(-Lv, v) \leqslant -a(v, v)$. De plus,

$$(Lv, v) = \int_0^S e^{2ta}[Le^{-tL}v, e^{-tL}v]dt \leqslant \int_0^S be^{2ta}[e^{-tL}v, e^{-tL}v]dt = b(v, v). \blacktriangleright$$

Finissons la démonstration du théorème :

◀ Si $\chi > 0$, alors le rayon spectral de e^L est strictement supérieur à 1. Comme e^L est le linéarisé de φ^1, on déduit que x_0 n'est pas Lyapounov stable pour φ^1, donc pas Lyapounov stable pour V.

Si $\chi < 0$, il existe $b < 0$ et un produit scalaire tel que $\langle Lv, v\rangle \leqslant b\langle v, v\rangle$ pour tout v. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $\langle V(x), x - x_0\rangle \leqslant (b/2)\langle x - x_0, x - x_0\rangle$ sur la boule $B(x_0, \delta)$. La fonction $f(x) = \langle x - x_0, x - x_0\rangle$ est alors une fonction de Lyapounov,

$$df_x \cdot V(x) = 2\langle V(x), x - x_0\rangle \leqslant b\langle x - x_0, x - x_0\rangle.$$

On conclut que x_0 est asymptotiquement stable. ▶

On peut montrer comme dans le cas d'une application que la dynamique au voisinage d'un point fixe asymptotiquement stable est topologiquement conjuguée à la dynamique du linéarisé. En fait, le résultat prend une forme plus forte dans le cas des flots : il n'y a, à conjugaison topologique près, qu'un seul point fixe linéairement stable en dimension d.

Théorème 3.9. *Soient V_1 et V_2 deux champs de vecteurs C^1 sur des variétés X_1 et X_2 de dimension d. Soient x_1 et x_2 des points fixes asymptotiquement stables de V_1 et V_2, de bassins U_1 et U_2. Il existe un homéomorphisme $\phi : U_1 \longrightarrow U_2$ qui conjugue les flots de V_1 et V_2. L'homéomorphisme ϕ est C^1 sur $U_1^* := U_1 - \{x_1\}$, et satisfait $d\phi_x \cdot V_1(x) = V_2(\phi(x))$ pour tout $x \in U_1^*$.*

Le résultat implique en particulier que le bassin est toujours homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, qui est la bassin de 0 pour le champ de vecteurs $V_0(x) = -x$ sur $\mathbb{R}^d$.

◀ On va montrer que V_1 est conjugué à V_0 sur U_1.

On identifie localement (X_1, x_1) à $(\mathbb{R}^d, 0)$ par une carte en x_1, et on munit l'espace $\mathbb{R}^d$ d'un produit scalaire pour lequel $\langle V_1(x), x\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$ au voisinage de 0, avec $b < 0$, on note $|.|$ la norme correspondante. Pour $r > 0$ assez petit, la sphère $S = S(0, r)$ (que l'on peut aussi considérer comme une sous variété de X_1 par l'identification ci-dessus) est une section de Poincaré pour V_1 et pour V_0. On note aussi $B = B(0, r)$. Considérons l'application

$$F : \mathbb{R} \times S \ni (t, x) \longmapsto \varphi^t(x) \in U_1^* = U_1 - \{x_1\}$$

où φ est le flot de V_1. Cette application induit une bijection de $\mathbb{R} \times S$ dans U_1^*, qui est un difféomorphisme local et donc un difféomorphisme.

Montrons la bijectivité. Il s'agit de vérifier que toute orbite $x(t)$ dans le bassin coupe S une fois et une seule. On constate d'abord que tout orbite qui contient des points dans B et des points hors de B coupe S, par connexité. Comme toute orbite tend vers x_1, toute orbite du bassin contient des points dans B. Donc les seules orbites qui pourraient ne pas couper S sont les orbites entièrement contenues dans B. On utilise finalement l'inégalité $\langle V_1(x), x\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$, satisfaite dans un voisinage de $\bar{B}$, pour montrer, à la fois que toute orbite différente de celle de x_1 sort de B (en grand temps négatif), et aussi que chaque orbite intersecte S au plus une fois.

De la même façon, l'application

$$G : \mathbb{R} \times S \ni (t, x) \longmapsto e^{-t}x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$$

est un difféomorphisme. L'application

$$F \circ G^{-1} : \mathbb{R}^d - \{0\} \ni x \longmapsto \varphi^{-\ln|x|}(x/|x|) \in U_1^*$$

est donc un difféomorphisme. Comme 0 est asymptotiquement stable pour V_1, l'application ϕ qui est égale à $F \circ G^{-1}$ hors de 0 et à 0 en 0 est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans U_1. On constate que

$$\phi(e^{-t}x) = \varphi^{t-\ln|x|}(x/|x|) = \varphi^t(\phi(x)),$$

c'est à dire que ϕ conjugue les flots de V_1 et de V_0.

On trouve de la même façon une conjugaison topologique $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow U_2$ entre V_0 et V_2, et donc une conjugaison topologique $\phi \circ \psi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$ entre V_2 et V_1. ►

L'analogue naturel de cet énoncé pour les applications n'est pas vrai comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 3.1. *Montrer que les dynamiques des applications $x \longmapsto x/2$ et $x \longmapsto -x/2$ sur $\mathbb{R}$ ne sont pas topologiquement conjuguées.*

Exercice 3.2. *Considérons le champ de vecteurs $V(x, y) = (y, -x - y^3)$.*

Le linéarisé permet-il de statuer sur la stabilité asymptotique de 0 ?

En considérant la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, montrer que le point fixe 0 est asymptotiquement stable.

Exercice 3.3. *Soit A une matrice $d \times d$. Montrer l'équivalence entre :*

Toutes les solutions de l'équation linéaire $x'(t) = A \cdot x(t)$ sont bornées.

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Il existe un produit scalaire pour lequel A est antisymétrique.