Introduction aux Matrices Aléatoires

Antoine CROUZET
sous la direction de Philippe Biane

5 février 2010

Table des matières

1 Introduction Générale

1.1 Pourquoi des matrices aléatoires ?

Dans certaines études probabilistes en physique, en informatique, ou dans d'autres branches des Mathématiques, il arrive que l'on étudie simultanément plus d'une variable aléatoire.

Par exemple, dans le cadre du Théorème Central Limite, on est amené à étudier une suite de variables aléatoires. Dans le cadre de l'étude de loi jointe, on peut être amené à étudier simultanément un nombre fini de variables aléatoires.

Mais il arrive également, par exemple dans le cas d'étude de spectre d'atomes lourds en physique, que l'on soit amené à étudier un ensemble fini de valeurs propres, que l'on étudie non pas comme un vecteur de variables aléatoires, mais qu'on représente sous la forme d'une matrice : on étudie donc une **matrice aléatoire**

$$\begin{pmatrix} M_{11} & ... & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & ... & M_{nn} \end{pmatrix}$$

où $M_{11}, ..., M_{nn}$ sont n^2 variables aléatoires.

Une fois sous cette forme, il est assez intéressant de s'intéresser non pas forcément aux variables aléatoires elles mêmes, mais aux valeurs propres de ces matrices : loi, répartition ...

1.2 Naissance des matrices aléatoires

On a commencé à étudier des valeurs propres des matrices aléatoires à partir de 1930, où des physiciens statisticiens et plus particulièrement Wishart, se sont intéressés à certaines matrices de covariance aléatoire.

Cette étude s'est particulièrement développée dans les années 1950, pour essayer de comprendre la spectroscopie des atomes lourds. En effet, les raies spectrales des atomes lourds corrsepondent à des différences de valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints très complexes. Wigner a eu l'idée, plutôt que d'étudier ces operateurs - ce qui est très difficiles - , d'étudier les propriétés statistiques de ces opérateurs.

2 Le G.U.E.

Il existe plusieurs ensembles classiques de matrices aléatoires, dont l'étude a été très poussée :

– Le G.U.E., *Gaussian Unitary Ensemble*, espace probabilisé basé sur les matrices hermitiennes.
– Le G.O.E., *Gaussian Orthogonal Ensemble*, basé sur les matrices réelles symétriques.
– Le G.S.E., *Gaussian Symplectic Ensemble*, basé sur les matrices quaternion -réelles.

Ce sont les ensembles introduits par Wigner pour la théorie des spectres nucléaires. Le G.O.E. a été introduit pour les systèmes invariants par renversement du temps ; le G.U.E. pour les systèmes non-invariants par renversement du temps ; et le G.S.E. pour les systèmes avec spin.

Dans son cas d'étude, Wishart a été amené à étudier des matrices hermitiennes aléatoires, ainsi que ses valeurs propres. Le cas du G.U.E. est le plus classique et c'est celui auquel nous nous intéresserons..

2.1 Loi de probabilité sur les matrices hermitiennes - G.U.E.

On va introduire une loi de probabilité sur l'ensemble des matrices hermitiennes, permettant de construire un espace probabilisé, qui sera ainsi l'espace d'étude de certaines matrices aléatoires.

2.1.1 Loi de probabilité sur les matrices hermitiennes et GUE

Définition 2.1 (Loi de probabilité sur $\mathbb{H}_n$)**.** On note $\mathbb{H}_n$ l'ensemble des matrices hermitiennes de taille n, que l'on munit du produit scalaire $< X, Y > \mapsto Tr(XY)$.

On définit une loi de probabilité sur $\mathbb{H}_n$ par :

$$\mathbb{P}(dM) = \frac{1}{C_n} e^{-\gamma Tr(M^2)} m_n(dM)$$

où $\gamma > 0$, m_n est la mesure euclidienne sur H_n associée au produit scalaire, et C_n est un paramètre de normalisation pour avoir une loi de probabilité :

$$C_N = \int_{\mathbb{H}_n} e^{-\gamma Tr(M^2)} m_n(dM) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\right)^{n(n+1)}$$

Cette loi de probabilité nous permet de définir :

Définition 2.2. L'espace probabilisé $(\mathbb{H}_n, \mathbb{P}_n)$ est appelé *Ensemble Unitaire Gaussien*, ou G.U.E..

2.1.2 Autre caractérisation du GUE

On a une autre caractérisation du G.U.E.. En effet, une matrice du G.U.E. est une matrice

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

vérifiant :

- Les $M_{i,j}$ sont des variables aléatoires complexes, de loi Gaussienne centrée.
- Pour tout i, j $\overline{M_{ij}} = M_{ji}$.
- Toutes les matrices $M_{ij}, i < j$ sont indépendantes.

2.1.3 Pourquoi *unitary* ?

La question se pose : pourquoi avoir appelé cet ensemble Gaussian *Unitary* Ensemble ? Tout simplement parce que l'espace $(\mathbb{H}_n, \mathbb{P}_n)$ est stable par l'action du groupe **unitaire** par conjugaison :

$$\forall\ M \in (\mathbb{H}_n, \mathbb{P}_n), \forall\ U \in \mathcal{U}_n, UMU^* \in (\mathbb{H}_n, \mathbb{P}_n)$$

De même, le G.O.E est stable par l'action, par conjugaison, du groupe des matrices orthogonales ; et le G.S.E. est stable par l'action du groupe des matrices symplectiques.

2.1.4 Vers l'étude des valeurs propres

Ces matrices ont donc n valeurs propres, qui sont réelles puisque la matrice est auto-adjointe. On peut donc étudier le comportement de ces valeurs propres, et l'idée de Wigner était d'étudier le comportement de ces valeurs propres lorsque la dimension n des matrices tend vers l'infini.

2.2 Loi spectrale des valeurs propres

Pour étudier le comportement probabiliste des valeurs propres, on va s'intéresser à la loi uniforme sur le spectre.

2.2.1 Loi spectrale

Définition 2.3. On appelle *loi spectrale* d'une matrice aléatoire $M \in \mathbb{H}_n$, que l'on note μ_M, la mesure

$$\mu_M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$$

où $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ représente les valeurs propres réelles (comptées avec ordre de multiplicité) de M.

2.2.2 Théorème de Wigner

Wigner, dans ses recherches, a constaté que pour certaines suites $(M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ particulières de $\mathbb{H}_n$, la loi spectrale $\mu_{M^{(n)}}$ converge étroitement vers une certaine loi à densité. Ce théorème, qui porte son nom, permet donc d'avoir une idée de la répartition des valeurs propres d'une matrice du GUE, à la limite où la taille de la matrice est grande.

Plus précisément, on a le

Théorème 2.1 (Théorème de Wigner)**.** *Soit $(X^{(n)})_n$ une suite de matrice aléatoire du GUE, telle que, pour tout n, $X^{(n)}$ est de taille $n \times n$ et :*

$$\mathbb{E}[(X_{i,i}^{(n)})^2] = \frac{1}{n}, \; \mathbb{E}[(\Re X_{i,j}^{(n)})^2] = \mathbb{E}[(\Im X_{i,j}^{(n)})^2] = \frac{1}{2n}$$

Alors la loi spectrale $\mu_{X^{(n)}}$ de $X^{(n)}$ converge presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi, de support $[-2; 2]$, et de densité

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}$$

On l'appelle loi du demi-cercle *(ou loi semi-circulaire) de rayon 2.*

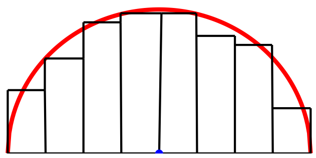

FIGURE 1 – Loi du demi-cercle et comparaison pratique

2.2.3 Informations obtenues

Cette loi permet de voir par exemple, que les grandes valeurs propres se font plus rares, et qu'au contraire elles se fond plus nombreuses proche de zéro.

L'inconvénient de l'étude de la loi spectrale est qu'on perd de nombreuses informations, comme par exemple la loi des écarts entre les valeurs propres. On n'aura qu'une idée de la répartition, mais pas de résultats plus fins.

Pour en apprendre un peu plus, on va donc étudier la loi jointe des valeurs propres.

2.3 Loi jointe des valeurs propres d'une matrice du GUE

Pour une matrice du GUE, M, il se trouve que la loi jointe des valeurs propres $(\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n)$ de M est à densité, qui se calcule assez facilement. Cette loi jointe permet donc, associé au théorème de Wigner, de connaitre plus finement la répartition des valeurs propres d'une matrice du GUE, à la limite où la taille de la matrice tend vers l'infini.

2.3.1 Formule de Weyl

On utilise la formule de Weyl pour déterminer explicitement la loi jointe des valeurs propres :

Théorème 2.2 (Formule de Weyl)**.** *La loi jointe des valeurs propres $(\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n)$ d'une matrice du GUE a pour densité*

$$\frac{(2\pi)^{-n/2} n^{n^2/2}}{\prod_{j=1}^{n-1} j!} e^{-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2$$

sur l'espace $\{x \in \mathbb{R}^n, x_1 \leqslant x_2 ... \leqslant x_n\}$, muni de la mesure de Lebesgue.

2.3.2 Décodage

Alors que le théorème de Wigner ne permet que d'obtenir une idée globale de la répartition, la formule de Weyl permet, quant à elle, d'avoir des informations plus précise sur la loi des écarts entre les valeurs propres.

Ainsi, en constatant que la densité s'annule en zéro, on peut en déduire que les valeurs propres ont tendance à se repousser.

Cela ne permet pas de déterminer explicitement la loi de chacune des valeurs propres, à la limite où la taille de la suite tend vers l'infini, mais cela permet tout de même de déterminer des informations assez précises.

On peut cependant déterminer des informations très précises sur la plus grande des valeurs propres d'une matrice du GUE, et c'est l'objet de la dernière partie.

2.4 Loi de $\lambda_{\max}$, plus grande des valeurs propres

Le théorème de Wigner permet de constater que la plus grande des valeurs propres (à une renormalisation près) converge presque-sûrement vers 2 pour les matrices vérifiant les hypothèses du théorème.

Ce que l'on souhaiterait, c'est avoir la vitesse de convergence de la plus grande des valeurs propres vers 2.

La loi de la plus grande des valeurs propres peut être approchée de manière beaucoup plus précise, grâce à la loi de Tracy-Widom :

Théorème 2.3. *Soit $M^{(n)}$ une matrice du GUE de taille $n \times n$, et soit $\lambda_{\max}^{(n)}$ sa plus grande des valeurs propres.*

Alors

$$\mathbb{P}[n^{1/6}(\lambda_{\max}^{(n)} - 2\sqrt{n}) \leqslant s] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(s) = \exp\left(-\int_s^\infty u(t)dt\right)$$

où u satisfait une équation de Painlevé II :

$$(u'')^2 + 4u'((u')^2 - su' = u) = 0$$

Ainsi, en renormalisant, la plus grande des valeurs propres des matrices du GUE converge presque sûrement vers 2, mais on sait en plus à quelle vitesse, grâce à la loi de Tracy Widom.

3 Application : lien avec la fonction Zêta de Riemann

3.1 Résultats de Montgomery

La conjecture de Montgomery permet de relier certains comportements de matrices aléatoires, avec celui des zéros de la fonction Zêta de Riemann :

Définition 3.1. On appelle fonction zêta de Riemman, la fonction, définie sur le demi plan complexe $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^1$$

Elle se prolonge analytiquement au plan complexe tout entier, avec un unique pôle de résidu 1 en 1.

Son prolongement possède des zéros triviaux en $-2, -4, ...$, et ses zéros non triviaux sont compris dans la bande dite critique $0 < \Re(s) < 1$.

L'hypothèse que Riemann a formulé, et qui porte son nom, est simple : ces zéros seraient en fait tous sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Cette hypothèse n'a pour l'instant pas été démontrée.

Montgomery a conjecturé, en admettant l'hypothèse de Riemann, que la corrélation par paire des Zéros t_n de la bande critique, pris dans une certaine bande dépendant de n était, à la limite où $n \to \infty$, la même que celle qui existe entre les valeurs propres de matrices aléatoire hermitiennes, à la limite où la taille des matrices tend vers l'infini.

Plus précisemment :

Théorème 3.1 (Conjecture de Montgomery)**.** *On appelle $N_{a,b}(n)$ ($a < b$ réels) le nombre de couples γ, γ' dans $[0; n]$, vérifiant*

$$\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = \zeta(\frac{1}{2} + i\gamma') = 0 \text{ et } \gamma - \gamma' \in \left[\frac{2\pi a}{\log n}; \frac{2\pi b}{\log n}\right[$$

Alors

$$N_{a,b}(n) \overset{n \to \infty}{=} \frac{n}{2\pi} \log n \left(\int_a^b \left(1 - \left(\frac{sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du + o(1)\right)$$

Cette conjecture est validée par de nombreux résultats, dont un théorème dû également à Montgomery, sur la transformée de Fourier de la fonction de corrélation par paire des zéros. Ces résultats s'étendent à la corrélation pour n zéros, et pas uniquement par paire.

Ces résultats suggèrent que des propriétés statistiques locales de la fonction Zêta, peuvent être modélisées par des propriétés correspondantes du côté du CUE.

3.2 Théorème de Selberg - Théorème de Kaiting-Snaith

C'est ainsi qu'un théorème, dû à Selberg, peut être modélisé par un théorème mettant en jeu des matrices du CUE :

Théorème 3.2 (Théorème de Selberg)**.** *Pour tout rectangle E de $\mathbb{R}^2$, on a*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \left\{ T \leqslant t \leqslant 2T, \frac{\log \zeta(1/2+it)}{\sqrt{(1/2)\log\log T}} \in E \right\} \right| = \frac{1}{2\pi} \int\int_E e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy \tag{1}$$

Ce théorème signifie qu'à la limite où T, la hauteur sur la droite critique, tend vers l'infini, la distribution de la partie réelle et la distribution de la partie imaginaire, de $\frac{\log \zeta(1/2+it)}{\sqrt{(1/2)\log\log T}}$ tendent toutes les deux vers des Gaussiennes centrées réduites.

Le théorème de Selberg a donc un pendant, du côté des matrices aléatoires : le théorème de Keating Snaith :

Théorème 3.3. *Si V_n est une matrice aléatoire de $\mathbb{U}_n$ (matrices unitaires) distribuée suivant la mesure de Haar $\mu_{\mathbb{U}_n}$, on note son polynôme caractéristique*

$$Z(V_n, s) := \det\left(I_n - e^{-i.s} V_n\right)$$

où I_n désigne la matrice identité de M_n, et $Z_n := Z(V_n, 0)$. Alors

$$\frac{\log Z_n}{\sqrt{\frac{1}{2}\log n}} \overset{en\ loi}{\longrightarrow} \mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2$$

où $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ sont deux variable gaussiennes standards indépendantes.

On voit qu'il y a une grande ressemblance entre ces deux théorèmes. De nombreux autres théorèmes laissent supposer qu'il y a effectivement de nombreux liens entre les zéros de la fonction Zêta, et les matrices aléatoires ; et qu'a fortiori, la conjecture de Montgomery est vraie.

4 Conclusion

L'étude des matrices aléatoires s'est énormément développée au cours des dernières années. En plus d'avoir un intérêt dans d'autres domaines - en physiques, informatique -, elle en a aussi également en Mathématiques même, où un lien avec les matrices aléatoires permettrait ainsi, pour la fonction Zêta de Riemann par exemple, de résoudre des conjectures difficiles, de manière beaucoup plus simple.

Même s'il reste de nombreux élements inconnus dans l'étude des matrices aléatoires, les découvertes faites en peu de temps rendent l'étude des matrices aléatoires intéressante, prenante, y compris dans une vision plus d'avenir.

5 Références

[1] Madan Lal Mehta : *Random matrices (3e édition)*. Pure and Applied Mathematics Series 142, Elsevier. 2004.

[2] Philippe Biane : *La fonction zêta de Riemann et le mouvement brownien*. Journées X UPS. 2002

[3] H.L. Montgomery : *The pair correlation of zeros of the zeta function*. Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 24, American Mathematical Society. 1973.

[4] Florent Benaych-Georges : *Probabilités libres et matrices aléatoires*. Thèse. 2005.

[5] F. Hiai, D. Petz : *The semicircle law, free random variables, and entropy*. Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs Volume 77. 2000.