

Introduction au domaine de recherche :
Limite d'échelle de cartes planaires aléatoires.
Encadrant : Jean-François Le Gall.

Octobre 2008

On étudie les propriétés asymptotiques des grandes cartes planaires renormalisées. On étudie également les espaces métriques aléatoires appelées cartes browniennes apparaissant comme limite d'échelle de grandes cartes planaires.

1 Introduction

1.1 Qu'est ce qu'une carte ?

Bien que simple *a priori*, la notion de carte est très riche et intervient dans de nombreux domaines des mathématiques. Il existe principalement trois définitions (heureusement équivalentes) de **carte**. Ainsi une carte est

- un plongement propre¹ d'un graphe fini connexe dans une surface compacte connexe sans bord (ccsb) orientée identifiée à homéomorphisme direct près.
- un graphe fini connexe muni en chaque sommet d'un ordre cyclique sur les arêtes adjacentes.
- un couple de permutation $(\alpha, \sigma) \in \mathbf{S}_{2n}$ tel que $\alpha^2 = \text{Id}$ et $\langle \alpha, \sigma \rangle$ agit transitivement sur $\{1, \dots, 2n\}$.

Nous ne rappellerons pas ici les notions élémentaires sur les graphes, mais insistons cependant sur le fait que deux graphes peuvent représenter deux cartes différentes. La structure de carte est plus contraignante (et donc plus riche !) que la structure de graphe. Citons tout de même le joli théorème

Théorème 1 (Whitney). *Tout graphe planaire fini 3-connecté ne possède qu'un unique plongement dans la sphère (à homéomorphisme direct près). Ainsi un graphe planaire fini et 3-connecté ne représente qu'une seule carte.*

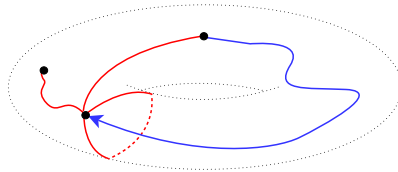


FIG. 1 – Voici une carte enracinée dessinée sur le tore.

Une carte est **enracinée** si l'on a distingué une arête orientée. L'enracinement d'une carte est utile pour briser les éventuelles symétries de l'objet. Le **genre** d'une carte est le genre $g \in \mathbb{N}$ d'une surface ccsb sur laquelle un représentant de cette carte peut être dessiné (nous insistons sur le fait que le plongement doit être propre). Le fait que l'on puisse définir g sans ambiguïté découle de la célèbre formule d'Euler :

Théorème 2 (Formule d'Euler). *Si un graphe est dessiné sur une surface ccsb de façon à ce que les arêtes ne se coupent qu'en les sommets du graphe, alors on a*

$$S + F - A = 2 - 2g,$$

où S, F, A sont les nombres de sommets, de faces et d'arêtes du graphe et g est le genre de la surface.

¹les arêtes du graphe ne peuvent se couper qu'en les sommets et les faces sont homéomorphes à des disques

Une carte est **planaire** si son genre est 0, ou en d'autres termes, si elle peut être représentée sur la sphère \mathbb{S}_2 .

Les problèmes d'énumération de cartes sont difficiles, Tutte dans les années 60 a, à l'aide de méthodes récursives montré que le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est égal à

$$\frac{2}{n+2} 3^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (1)$$

L'énumération des cartes est aussi étroitement relié à la théorie des matrices aléatoires, voir par exemple le Chapitre 3 de [11] et [2] pour l'article fondateur. La physique a aussi beaucoup motivé le développement de la théorie des cartes, depuis que certains physiciens ont suggéré leurs utilisation comme modèle de métrique discrète. C'est dans cet optique que l'on étudie les limites d'échelles.

Sauf cas contraire, dans la suite de l'exposé les cartes seront toutes planaires. Pour une carte m , on notera d_{gr} la distance de graphe entre les sommets de la carte, (m, d_{gr}) est donc un espace métrique compact (fini !). Afin d'étudier la convergence de ces espaces métriques compacts, nous allons définir une métrique sur les classes d'isométrie d'espaces métriques compacts appelée la distance de Gromov-Hausdorff.

1.2 Distance de Gromov-Hausdorff

Si (E, d) est un espace métrique, nous noterons $d_H^E(., .)$ la distance de Hausdorff entre deux parties compacts dans E .

Définition 1 (Distance de Gromov-Hausdorff). Soient X, Y deux espaces métriques compacts. La distance de Gromov-Hausdorff entre X et Y , notée $d_{GH}(X, Y)$ est

$$d_{GH}(X, Y) := \inf_{\substack{E \text{ espace métrique} \\ \phi : X \rightarrow E \text{ isométrie} \\ \psi : Y \rightarrow E \text{ isométrie}}} d_H^E(\phi(X), \psi(Y))$$

Définition 2 (distorsion de la métrique). Soit X et Y deux espaces métriques. Soit \mathcal{R} une correspondance entre X et Y (ie une partie du produit $X \times Y$ telle que $\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in \mathcal{R}$ et $\forall y \in Y, \exists x \in X, (x, y) \in \mathcal{R}$), la distorsion de \mathcal{R} est définie par

$$\text{dist}(\mathcal{R}) = \sup_{(x,y), (x',y') \in \mathcal{R}} |d_X(x, x') - d_Y(y, y')|.$$

La distance de Gromov-Hausdorff est effectivement une distance sur les classes d'isométrie d'espaces métriques compacts, elle mesure "intrinsèquement" les distorsions de la métrique c'est-à-dire que si X, Y sont deux espaces métriques alors

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{R}: X \leftrightarrow Y} \text{dist}(\mathcal{R}).$$

D'autres résultats et explications sur la distance de Gromov-Hausdorff peuvent être trouvés dans [3].

Nous pouvons maintenant expliquer notre but : soit \mathbb{P}_n la mesure de probabilité uniforme sur les quadrangulations à n sommets (défini que pour certaines valeurs de n auxquelles on se limitera dès à présent) munies d'une distance qui est un multiple convenable de la distance de graphe, l'objectif est de montrer que la probabilité induite sur les espaces métriques compacts associés converge étroitement vers une probabilité à valeurs dans les classes d'isométries d'espaces métriques compacts.

2 La bijection de Schaeffer

Une très jolie bijection a été re-découverte par Gilles Schaeffer [15] reliant un certain type d'arbre étiquetés et les **quadrangulations** (cartes dont toutes les faces sont de degré 4). Cet outil est à la base des développements récents sur les grandes cartes planaires aléatoires, qui ont été initiés dans l'article [14].

On appelle arbre enraciné étiqueté (la racine est notée \emptyset) un arbre τ dont les sommets $u \in \tau$ possèdent une étiquette $l(u) \in \mathbb{Z}$. Un arbre τ est dit bien étiqueté (positif) s'il vérifie les conditions suivantes :

1. L'étiquette de la racine est 1.
2. Les différences d'étiquettes entre deux sommets voisins sont dans $\{-1, 0, 1\}$.
3. L'arbre est dit positif si pour tout $u \in \tau$, on a $l(u) \geq 1$.

On peut maintenant décrire la bijection qui envoie un arbre τ bien étiqueté positif sur une quadrangulation planaire enracinée. On commence par supposer que τ est dessiné dans le plan et l'on ajoute un sommet numéroté 0 que l'on nomme ∂ . Puis pour tous les sommets rangés dans l'ordre de contour horaire (les sommets peuvent intervenir plusieurs fois) v_0, \dots, v_k de τ on effectue la construction suivante :

- Si $l(v_i) = 1$, alors on relie par une arête le sommet v_i et le sommet ∂ , l'arête reliant la racine de l'arbre (d'étiquette 1) au sommet étiqueté 0 est l'arête distinguée de la carte, son origine étant le sommet ∂ .
- Si $l(v_i) \geq 2$, on dessine une arête entre v_i et le premier sommet de v_{i+1}, \dots, v_{2k-2} dont l'étiquette est $l(v_i) - 1$. Ce sommet existe toujours si τ est bien étiqueté positif.

Pour avoir une preuve de la bijection on se référera à l'article [8] qui présente une bijection plus générale. Nous listons dans le théorème suivant quelques propriétés relatives à la bijection présentée que nous appellerons bijection de Schaeffer.

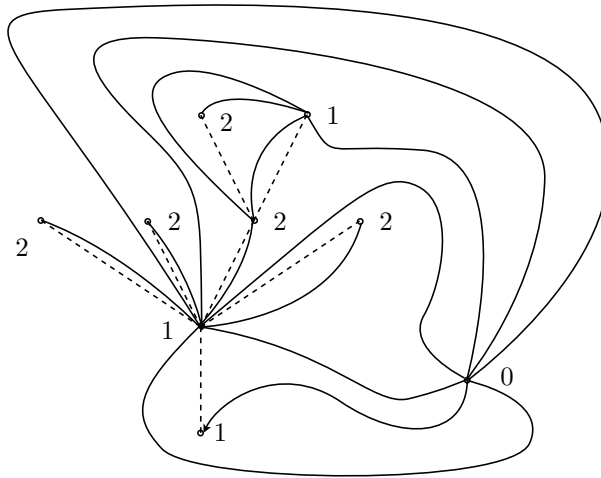


FIG. 2 – Voici une illustration de la construction d'une quadrangulation à l'aide d'un arbre enraciné et bien étiqueté positif. Remarquez qu'avec les conventions sur les cartes planaires, une arête incluse dans une face est comptée deux fois.

Nous avons donc démontré par l'exemple le théorème suivant :

Théorème 3 (Schaeffer). *Il existe une bijection Ψ entre les arbres à $k - 1$ sommets, bien étiquetés, positifs, et les quadrangulations enracinées à k sommets. De plus les sommets de l'arbre correspondent aux sommets différents du sommet racine de la carte et l'étiquette d'un sommet dans l'arbre correspond à la distance à la racine du sommet associé dans la carte.*

REMARQUE(S) : La bijection inverse transformant une quadrangulation en un arbre étiqueté et tout aussi intéressante, nous invitons le lecteur à consulter [15]. Le dénombrement des arbres bien étiquetés positifs à $k - 1$ sommets permet de retrouver la formule (1), en sachant que les quadrangulations à n faces sont en bijection avec les cartes à n arêtes. La bijection de Schaeffer a connu de nombreuses généralisations depuis 1998, elle a par exemple été étendue à des cartes plus générales dites biparties [8] ou au genre supérieur.

3 Théorèmes limites pour les arbres étiquetés

Le transport de la mesure de probabilité \mathbb{P}_n par la bijection ψ est évident : sous \mathbb{P}_n un arbre est choisi uniformément parmi les arbres bien étiquetés positifs à $n - 1$ sommets. Nous allons maintenant citer les théorèmes limites relatifs aux arbres étiquetés. Il est commode d'introduire les fonctions de contours des arbres. Nous renvoyons à [5] pour un très bon cours sur les arbres aléatoires.

3.1 Fonctions associées à un arbre

Pour un sommet $u \in \tau$, on note $|u|$ la hauteur du sommet u , c'est-à-dire sa distance à la racine.

Définition 3 (Fonction de hauteur, d'étiquettes). *Soit τ un arbre à n sommets. Soit $\varnothing = u(0) \leq u(1) \leq \dots \leq u(n - 1)$ ses n sommets listés dans l'ordre lexicographique. La fonction de hauteur de l'arbre τ est $H_\tau(k) = |u(k)|$, $0 \leq k \leq n - 1$. On définit la fonction d'étiquettes $L_\tau^h(k) = l(u(k))$, $0 \leq k \leq n - 1$. On notera de la même façon les fonctions interpolées sur \mathbb{R} .*

3.2 Théorèmes limites

3.2.1 Serpent brownien

Théorème 4. *Il existe une mesure de probabilité $\mathbb{N}_0^{(1)}$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ sous laquelle la loi du couple $(e, Z) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ est donnée par*

- La loi de $(e)_{0 \leq t \leq 1}$ est celle de l'excursion brownienne normalisée.
- conditionnellement à $(e_t)_{0 \leq t \leq 1}$, Z est un processus gaussien centré de covariance

$$\text{cov}(Z_s, Z_t) = \inf_{s \wedge t \leq u \leq s \vee t} e_u$$

Ce processus est appelé "la tête du serpent brownien dirigé par l'excursion brownienne normalisée".

Pour une construction de ce processus et d'autres informations sur le serpent brownien nous renvoyons à [4]. Définissons maintenant quelques fonctionnelles :

Définition 4. *On appelle amplitude (resp positive, négative, totale) du serpent brownien les variables aléatoires définies sous $\mathbb{N}_0^1(\text{ded}Z)$, $\Delta^+(Z) = \sup_{t \in [0,1]} Z_t$, $\Delta^-(Z) = \inf_{t \in [0,1]} Z_t$, $\Delta(Z) = \Delta^+(Z) - \Delta^-(Z)$. On définit les mesures aléatoires $\mathcal{I}(Z)(\cdot)$ et $\overline{\mathcal{I}}(Z)(\cdot)$ sous $\mathbb{N}_0^1(\text{ded}Z)$*

$$\langle \mathcal{I}, f \rangle = \int_0^1 f(Z_t) dt \quad \text{et} \quad \langle \overline{\mathcal{I}}(Z), f \rangle = \int_0^1 f(Z_t - \Delta^-(Z)) dt.$$

Noter que le support de la mesure $\overline{\mathcal{I}}(Z)(\cdot)$ est porté par \mathbb{R}_+ .

Le théorème suivant est le principal outil pour étudier les propriétés limites des grandes cartes planaires. Il décrit les processus limites des fonctions de hauteur et d'étiquetage.

Théorème 5. [14] Il existe des constantes explicites σ, Σ telles que (le long des valeurs de n pour lesquelles \mathbb{P}_n a un sens)

$$\left(\left(\frac{H_\tau(t(\#\tau - 1))}{n^{1/2}} \right)_{0 \leq t \leq 1}, \left(\frac{L_\tau^h(t(\#\tau - 1))}{n^{1/4}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \right) \text{ sous } \mathbb{P}_n \\ \xrightarrow{(i)} \mathbb{E} [((\sigma e_t)_{0 \leq t \leq 1}, (\Sigma Z_t)_{0 \leq t \leq 1}) | Z_t \geq 0, \forall 0 \leq t \leq 1] \text{ sous } \mathbb{N}_0^{(1)},$$

au sens de la convergence en loi sur $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Il faut prendre des précautions pour définir le processus conditionné intervenant dans le théorème.

3.2.2 Fonctionnelles de cartes planaires

Si l'on se note (m, r, e) une carte planaire enracinée en e et pointée en r , on définit le rayon de la carte

$$\mathcal{R}(m) = \max_{u \text{ sommets de } m} d_m(r, u),$$

et le profil normalisé de la carte

$$\mathcal{P}_m(k) = \frac{\text{Card}\{u \text{ sommets de } m : d_m(r, u) = k\}}{\text{Card}\{u \text{ sommets de } m\}}, k \geq 0.$$

Le profil est une mesure aléatoire (qui dépend de la carte (m, e, r)). On notera $\lambda^{-1} \mathcal{P}_m$ pour la mesure définie par $\lambda \mathcal{P}_m(A) = \mathcal{P}_m(\lambda A)$ pour A un borélien de \mathbb{R}_+ .

Nous pouvons citer le théorème de convergence des deux fonctionnelles définies précédemment (voir [14] ou [10])

Théorème 6. Sous \mathbb{P}_n on a les convergences en loi suivantes (le long des valeurs de n pour lesquelles \mathbb{P}_n a un sens)

$$cn^{-\frac{1}{4}} \mathcal{R}(m) \xrightarrow{(i)} \Delta(Z) \text{ sous } \mathbb{N}_0^1(\text{ded}Z)$$

$$cn^{-\frac{1}{4}} \mathcal{P}_m(\cdot) \xrightarrow{(i)} \overline{\mathcal{I}}(Z)(\cdot) \text{ sous } \mathbb{N}_0^1(\text{ded}Z).$$

Nous avons réussi grâce à un théorème limite sur les fonctions de hauteurs d'arbres étiquetés à établir une convergence du profil des quadrangulations. En particulier, la taille typique d'une quadrangulation est $n^{\frac{1}{4}}$, résultat conjecturé par les physiciens depuis de nombreuses années.

4 Étude topologique et métrique

La partie précédente présentait la convergence de certaines fonctionnelles de cartes planaires. Nous aimerions en savoir plus. Le bon point de vue à adopter (introduit dans [16]) est celui de la convergence des cartes planaires en tant qu'espaces métriques compacts pointés. Le but ultime (non atteint) serait de trouver une variable aléatoire (m_∞, d_∞) à valeurs dans les espaces métriques compacts telle que

$$(m, n^{-1/4}d_{\text{gr}}) \text{ sous } \mathbb{P}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (m_\infty, D) \quad (2)$$

au sens de la convergence en loi sur l'ensemble des classes d'isométries d'espaces métriques compacts, muni de la distance de Gromov-Hausdorff.

On rappelle que l'ensemble \mathcal{E} des classes d'isométries d'espaces métriques compacts muni de la distance de Gromov-Hausdorff d_{GH} est un espace polonais (métrique, séparable, complet). La première grande avancée dans le sens de (?) est une idée de relative compacité (due à JF Le Gall, voir [6]) :

Théorème 7. [6] *Il existe une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ convergeant vers $+\infty$ tels que la convergence (2) ait lieu le long de $(n_k)_{k \geq 0}$. Nous appellerons **carte brownienne** tout espace métrique aléatoire (m_∞, D) sous \mathbb{P} apparaissant comme limite d'échelle de quadrangulations.*

Les cartes browniennes sont donc des variables aléatoires à valeurs dans les espaces métriques compacts apparaissant comme valeurs d'adhérence pour la convergence étroite.

REMARQUE(S) : Attention ! L'unicité de la limite (m_∞, D) n'est pas prouvée, il est concevable que deux extractions différentes aboutissent à deux cartes browniennes différentes. Toutefois la nature topologique de toutes les limites est bien connue : dans [6] Le Gall montre que toutes les cartes browniennes sont homéomorphes à un quotient du CRT (continuum random tree [1]) par une relation d'équivalence définie en termes d'étiquettes browniennes attachées à l'arbre. Dans [9] Le Gall et Paulin montrent même que cette limite est topologiquement très simple.

4.1 Sphéricité

Théorème 8 (Le Gall-Paulin [6]). *Soit (m_∞, D) sous \mathbb{P} une carte brownienne, alors m_∞ est \mathbb{P} -presque-sûrement homéomorphe à \mathbb{S}_2 , la sphère en dimension 3.*

Nous avons une proposition étroitement liée au théorème 8 qui est un très joli exemple d'application aux cartes finies de résultat limite sur les cartes browniennes.

Proposition 1 ([6]). *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\theta(n) = o(n^{\frac{1}{4}})$, avec une probabilité sous \mathbb{P}_n qui tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$, il n'existe pas de cycle C dans la carte aléatoire m_n de longueur plus petite que $\theta(n)$ qui découpe la carte en deux parties de diamètre au moins $\varepsilon n^{\frac{1}{4}}$.*

Cette proposition est vue comme un corollaire du théorème 8 dans [9]. Dans un récent article [12], G. Miermont utilise la proposition 1 avec un renforcement de la convergence au sens de Gromov-Hausdorff pour aboutir au théorème 8.

4.2 Propriétés métriques

Bien qu'homéomorphes à la sphère 2-dimensionnelle, les cartes browniennes sont très particulières.

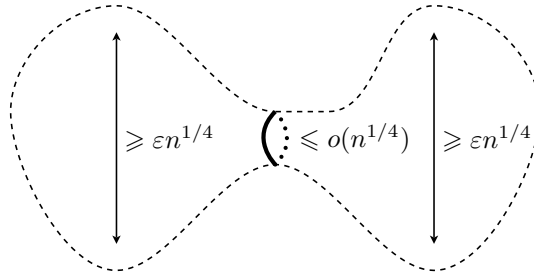


FIG. 3 – L'existence d'un "goulot d'étranglement" séparant la carte en deux régions assez grandes est proscrite.

Théorème 9 (Le Gall [6]). *Soit (m_∞, D) sous \mathbb{P} une carte brownienne, alors \mathbb{P} -presque sûrement $\dim_{\text{H}}(m_\infty, D) = 4$.*

Bien que la métrique des cartes browniennes n'est pas encore identifiée, nous pouvons donner des résultats géométriques. Le théorème suivant en est un récent exemple.

Théorème 10 (Le Gall [7]). *Soit (m_∞, D) sous \mathbb{P} une carte brownienne enracinée en un point ρ . Il existe un arbre noté $\text{Skel}_\infty \subset m_\infty$ tel que les propriétés suivantes soient vraies avec probabilité 1*

- pour tout $x \in m_\infty \setminus \text{Skel}_\infty$ il existe une unique géodésique de x à ρ ,
- pour tout $x \in \text{Skel}_\infty$, le nombre de géodésiques de ρ à x est égal au nombre de composantes connexes de $\text{Skel}_\infty \setminus \{x\}$ qui vaut soit 2 ou 3.

L'ensemble Skel_∞ est appelé "cut-locus de m_∞ relatif à ρ ."

Conclusion et perspectives

Les cartes planaires forment un domaine particulièrement riche du point de vue mathématique, de la formule d'Euler aux cartes browniennes, en passant par le théorème des quatre couleurs et les liens avec les intégrales matricielles. Mentionnons qu'une autre approche des cartes aléatoires a été entreprise par Schramm et Angel dans [13] où les limites sont non plus globales, mais locales.

Remerciements : Je remercie très chaleureusement Jean-François Le Gall de m'avoir proposé ce mémoire passionnant. Son attention, son écoute attentive et ses excellents conseils me furent d'une grande aide.

Références

- [1] David Aldous. The continuum random tree iii. *The Annals of Probability*, 21(1) :248–289, 1993.
- [2] Parisi G. Zuber J.-B. Brézin E., Itykson C. Planar diagrams. *Communications in Mathematical Physics*, 1978.
- [3] S. Ivanov D. Burago, Y. Burago. *A course in metric geometry*. American Mathematical Society.
- [4] J.F. Le Gall. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations*. Birkhäuser.
- [5] J.F. Le Gall. Random trees and applications. *Probability Surveys*, 2005.
- [6] J.F. Le Gall. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Inventiones Mathematicae*, 2007.
- [7] J.F. Le Gall. Geodesics in large planar maps and in the brownian map. *preprint disponible sur arxiv*, 2008.
- [8] E. Guitter J. Bouttier, P. Di Francesco. Planar maps as labeled mobile. *the electronic journal of combinatorics* 11, 2004.
- [9] F. Paulin J.F. Le Gall. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geometric and Functional Analysis, à paraître*, 2007.
- [10] G. Miermont J.F. Marckert. Invariances principles for random bipartite planar maps. *Annals of Probability*, 2007.
- [11] Zvonkin A. Lando S. K. *Graphs on surfaces and their applications*. Springer-Verlag, 2004.
- [12] G. Miermont. On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Disponible sur arxiv*, 2007.
- [13] O. Schramm O. Angel. Uniform infinite planar triangulations. *Communications in Mathematical Physics*, 2003.
- [14] Gilles Schaeffer Philippe Chassaing. Random planar lattices and integrated superbrownian excursion. *Probability Theory and Related Fields*, 2004.
- [15] Gilles Schaeffer. Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires. phd thesis. 1998.
- [16] Oded Schramm. Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems. *Plenary Lecture ICM Madrid 2006*.