Autour de l'entropie libre de Voiculescu

Yoann Dabrowski

Directeurs de thèse : Dimitri Shlyakhtenko et Philippe Biane

Introduction

Les probabilités libres ont été introduites au milieu des années 80 lorsque D. Voiculescu a commencé à utiliser des techniques probabilistes pour étudier les algèbres de von Neumann des groupes libres. Le point central est l'introduction d'une notion de liberté, analogue à celle d'indépendance de la théorie usuelle des probabilités, mais modelée sur la notion de produit libre d'algèbres au lieu de la notion de produit tensoriel. Ceci introduit une notion hautement non commutative qui trouve donc naturellement sa place dans la théorie des algèbres de von Neumann, que l'on veut penser comme un analogue de la théorie de la mesure, mais où l'algèbre des fonctions mesurables bornées sur un espace mesuré est remplacée par une algèbre non commutative.

Une connexion a priori inattendue de la notion de liberté a été trouvée au début des années 90 avec la théorie des grandes matrices aléatoires, de nombreuses classes de familles de matrices aléatoires à entrées indépendantes se révélant asymptotiquement libres. Nous rappelons brièvement toutes ces notions dans une première partie. C'est la tentative de quantifier numériquement cette approximation qui a amené Voiculescu à définir une notion d'entropie libre analogue sous maints égards, bien que nous ne developperons pas sur ce point, à l'entropie introduite en physique statistique, entropie qui a trouvé des applications en théorie des grandes déviations. C'est cette notion d'entropie libre microcanonique qui a permis à la fin des années 90 de résoudre de vieux problèmes sur les algèbres de von Neumann des groupes libres. Par ailleurs, certains problèmes techniques non résolus ont amené Voiculescu à introduire une seconde définition d'entropie libre non microcanonique. Nous consacrons donc deux parties à l'aperçu des définitions, propriétés et applications de l'entropie libre aux algèbres de von Neumann.

Nous n'aurons pas manqué au passage d'indiquer quelques conjectures remarquables sur les entropies de Voiculescu. Mais nous nous attacherons pour conclure à introduire au champ prometteur d'une théorie homologique pour les algèbres de von Neumann, récemment introduite par Alain Connes et Dimitri Shlyakhtenko, qui s'est avérée liée à l'entropie libre non microcanonique de Voiculescu.

1 Rappels : Intégration et probabilités non commutatives

1.1 Algèbres de von Neumann

Définition 1.1. Une **algèbre de von Neumann** est une sous-algèbre unifère involutive (i.e. stable par adjonction) de $B(H)$, algèbre des opérateurs bornés (i.e. applications linéaires continues) sur l'espace de Hilbert (complexe) H, ayant en plus la propriété d'être égale à son bicommutant, ou de manière équivalente, fermé pour la topologie faible-* (induite sur $B(H)$ en le voyant comme dual de l'ensemble des opérateurs à traces $x \in B(H)$, $tr(|x|) < \infty$) ou pour la topologie faible/forte d'opérateur.

Le premier exemple est $L^\infty(\Omega, \mu)$, algèbre des (classes de) fonctions mesurables essentiellement bornées sur un espace mesuré, agissant par multiplication sur $L^2(\Omega, \mu)$. Réciproquement, toute algèbre de von Neumann commutative est de ce type avec Ω un espace topologique localement compact et μ une mesure de Radon (cf. e.g. [1] III.1.18 p 109), ce qui motive, parmi bien d'autres analogies, le fait de penser la théorie des algèbres de von Neumann comme théorie de l'intégration non commutative.

Le deuxième exemple fondamental pour nous est l'algèbre de von Neumann $L(G)$ d'un groupe discret dénombrable G, agissant par définition sur $\ell^2(G)$, et définie comme le bicommutant de l'algèbre du groupe agissant par translation à gauche sur $\ell^2(G)$. Dans le cas où le groupe a des classes de conjuguaison (autres que $\{e\}$) infinies, cette algèbre est un **facteur** (i.e. son centre est réduit aux scalaires). Il est à noter pour plus tard que différencier des facteurs (à *-homomorphisme près) est très difficile, Murray et von Neumann, les initiateurs de la théorie, ne savaient distinguer que deux facteurs : ils savaient que $L(S_\infty)$ (S_∞ limite inductive des groupes symétriques) n'est pas isomorphe à aucun des $L(F_p)$, $p > 1$, où F_p est le groupe libre (non commutatif) à p générateurs, l'isomorphisme ou non de ces derniers étant d'ailleurs encore inconnu à ce jour.

Les matrices à coefficients dans une algèbre de von Neumann agissant sur H^n forment aussi une algèbre de von Neumann, en particulier, c'est le cas de l'algèbre des matrices aléatoires $L^\infty(\Omega, \mu; M_n(\mathbb{C}))$

1.2 Espace de probabilités non commutatif et liberté

Définition 1.2. Un espace de probabilité non commutatif (A, τ) est la donnée d'une algèbre involutive unifère A munie d'une forme linéaire τ, positive (i.e. $\tau(x^*x) \geq 0, \forall x \in A$), normalisée par $\tau(1_A) = 1$ (on dit un **état**).

Si A est une algèbre de von Neumann, et τ est normal(i.e. continu pour la topologie faible-* mentionnée plus haut) et fidèle (i.e. $\tau(x^*x) > 0$ si $x \neq 0$), on parle de W^*-espace de probabilité (la donnée d'une algèbre de von Neumann revient à la donnée d'une W^*-algèbre, qui est la notion abstraite correspondante quand on ne se donne pas explicitement l'espace de Hilbert sur lequel une algèbre de von Neumann agit, d'où le nom). On le qualifie de tracial si $\tau(ab) = \tau(ba)$. La partie précédente fournit des exemples : $L^\infty(\Omega, \mu)$, avec l'intégration par rapport à μ comme état ; $L^\infty(\Omega, \mu; M_n(\mathbb{C}))$ avec l'intégration de la trace normalisée τ_n des matrices aléatoires comme état ; $L(G)$ avec comme état $\tau =< .\delta_e, \delta_e >_{\ell^2(G)}$ (où e est le neutre du groupe, $\delta_e(x) = \delta_{e,x}$ (symbole de Kronecker) l'élément évident de $\ell^2(G)$).

Des éléments de (A, τ) sont appelés **variables aléatoires** non commutatives. La **distribution** d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de v.a. est alors la forme linéaire sur les polynômes non commutatifs $\mathbb{C}\langle X_i, i \in I\rangle$ qui à P associe $\tau(P(x_i))$. Dans le cas d'une variable autoadjointe, cela revient à la donnée des moments de la v.a., qui détermine, e.g. dans le cas d'un W^*-espace (ou même d'un C^*-espace) de probabilité, une mesure à support compact sur $\mathbb{R}$ en étendant la forme linéaire ci-dessus aux fonctions continues via le théorème de Weierstrass (idem avec des v.a. normales et des mesures sur $\mathbb{C}$ et des "$*$-distributions"). On obtient donc une généralisation de la notion pour les variables aléatoires bornées usuelles.

Définition 1.3. Des sous-algèbres unifères $(A_i)_{i\in I}$ de (A, τ) sont dites libres si pour tout $x_1, ..., x_n$ avec $x_k \in A_{i_k}$, $\tau(x_k) = 0$, et $i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_n$, on a $\tau(x_1...x_n) = 0$. Des (familles de) variables aléatoires sont dites libres si les algèbres qu'elles engendrent le sont.

Un exemple est donné sur l'algèbre du groupe G produit libre de groupes discrets dénombrables G_i, avec son état déjà explicité, les sous-algèbres engendrés par chacun des G_i sont libres (cf. [2]).

On peut remarquer qu'un argument de multilinéarité appliqué à un produit de $a_i - \tau(a_i)$ montre que la donnée d'un état sur chaque algèbre d'une famille libre, détermine l'état sur l'algèbre qu'elles engendrent, ceci pouvant même donner lieu à des formules combinatoires explicites dans le cadre d'une théorie développée par Speicher (cf. [3]), et analogue à une combinatoire dévelloppée par Gian Carlo Rota dans le cas des probabilités classiques.

Plus généralement, utilisant e.g. cette théorie combinatoire, on montre que le produit dans la catégorie des algèbres non commutatives, d'algèbres involutives munies d'états, peut être muni d'un état, dont les restrictions aux dites algèbres sont les états précédents et tels que ces algèbres soient libres (cf e.g. [3] chapitre 3).

Définition 1.4. On dit aussi que des suites de (familles de) v.a. **convergent en distribution** s'il existe une distribution limite ponctuelle (vue comme forme linéaire sur $\mathbb{C}\langle X_i, i \in I\rangle$) des distributions. De même de telles suites sont **asymptotiquement libres** si elles ont une distribution limite τ et si $(X_i, i \in I)$ est une famille libre dans $(\mathbb{C}\langle X_i, i \in I\rangle, \tau)$

Il faut enfin remarquer que la théorie des probabilités libres a donné des énoncés analogues aux probabilités classiques, notion de convolution, théorème central limite usuel et poissonien, lois infiniment divisibles, qui ont généralement un traitement combinatoire simple. Pour la suite, il est peut être utile de garder en mémoire que, dans ces résultats, l'analogue libre des v.a. gaussiennes, sont les v.a. (autoadjointes) semicirculaires de variance $\sigma = r^2/4$, i.e. dont les mesures associées sur $\mathbb{R}$ ont pour distribution (à support $[-r, r]$) donnée par $\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}dt$.

1.3 Grandes matrices aléatoires

Terminons ces rappels par une motivation pour la partie suivante :

Théoreme 1.5. *([4]) Pour tout n, soit $(V(s,n))_{s\in S}$ une famille de matrices aléatoires unitaires indépendantes (i.e. les familles de coefficients de matrices différentes sont indépendantes) ayant chacune pour distribution la mesure de Haar sur $U(n)$. Soit $W(n)$ une suite de matrices $n \times n$ (non aléatoires) convergeant en distribution. Alors, la suite de famille de v.a. $((W(n), W(n)^*), (V(s,n), V(s,n)^*)_{s\in S})$ est asymptotiquement libre. De plus, pour chaque $s \in S$, la limite de $\{V(s,n), V(s,n)^*\}$ est la mesure de Haar sur le disque unité.*

Ce théorème peut faire l'objet d'améliorations, notamment on peut obtenir un résultat de convergence en proba, on se reportera à mon mémoire de M2 (ou à l'article original déjà cité) pour une version intermédiaire plus forte que le théorème mais moins fort que celui-là ayant des applications à l'entropie libre.

2 Différentes versions de l'entropie libre

2.1 Définition de l'entropie libre microcanonique

Le but de la définition de l'entropie libre est de quantifier numériquement la manière dont la distribution de v.a. (disons *autoadjointes* pour simplifier) d'un W^*-espace de probabilité tracial est approchée par celle de matrices. En physique statistique, l'entropie de Boltzmann d'un système est définie comme proportionnelle à $\log \Omega$ où Ω est le nombre de microétats d'un système, et on remplace ce cardinal par un volume pour les systèmes continus. Dans notre cas, nous allons considérer des volumes euclidiens Λ_k^n dans l'espace des n-uplets de matrices hermitiennes $(M_k^{sa})^n$ associés à la norme euclidienne $||(A_1, ..., A_n)||_{HS}^2 = Tr(|A_1|^2 + ... + |A_n|^2)$, soit pour fixer les idées la mesure produit (n fois) des $\Lambda_k^1(dx) = \prod_{i=1}^n dx_{ii} \prod_{i<j} d(\sqrt{2}\Re x_{ij})d(\sqrt{2}\Im x_{ij})$.

On considère donc l'ensemble $\Gamma_R(X_1, ..., X_n; m, k, \epsilon)$ des n-uplets $(A_1, .., A_n) \in (M_k^{sa})^n$ tels que :

$$|\tau_k(A_{i_1}...A_{i_p}) - \tau(X_{i_1}...X_{i_p})| < \epsilon$$

pour tout $p \in [1, m]$ et $(i_1, ..., i_p) \in [1, n]^p$ (pour rappel τ_k la trace normalisée sur $M_k(\mathbb{C})$) et tels que pour tout $j \in [1, n]$: $||A_j|| \leq R$.

On considère alors

$$\limsup_{k\mapsto\infty}(\frac{1}{k^2}\log \Lambda_k^n(\Gamma_R(X_1, ..., X_n; m, k, \epsilon)) + \frac{n}{2}\log(k)),$$

puis le $\sup_{R>0} \inf_{m\in\mathbb{N}} \inf_{\epsilon>0}$ pour obtenir l'entropie libre $\chi(X_1, ..., X_n)$. On peut remarquer que les deux infema sont des limites décroissantes et que le supremum en R peut être supprimé en prenant $R > ||X_j||, 1 \leq j \leq n$.

2.2 Propriétés fondamentales

On pourra se reporter pour les preuves de ces propriétés soit aux articles originaux (cf. [5],[6],[7], notamment pour les propriétés à une variable), ou à mon mémoire de M2 pour les propriétés spécifiquement à plusieurs variables dont j'ai détaillé la preuve (2,3,5,7,8), généralement dans des énoncés techniques un peu plus généraux nécessaires aux applications.

Proposition 2.1. *1.* ***Borne supérieure*** *:*$\chi(X_1, ..., X_n) \leq \frac{n}{2}\log(2\pi e n^{-1}C^2)$ *avec* $C^2 = \tau(X_1^2 + ... + X_n^2)$ *(ce qui justifie le terme ajouté* $2^{-1}n\log(k)$ *dans la définition pour obtenir un résultat fini ou* $-\infty$*).*

2. ***Sous-additivité*** *:* $\chi(X_1, ..., X_n) \leq \chi(X_1, ..., X_m) + \chi(X_{m+1}, ..., X_n)$
3. ***Semi-continuité*** *: Si* $||X_j^{(p)}|| \leq C < \infty$ *et* $(X_1^{(p)}, ..., X_n^{(p)})$ *converge en distribution vers* $(X_1, ..., X_n)$ *alors* $\limsup_{n\to\infty} \chi(X_1^{(p)}, ..., X_n^{(p)}) \leq \chi(X_1, ..., X_n)$.
4. ***Cas Une variable*** *:* $\chi(X) = \int\int \log|s-t|d\mu(s)d\mu(t) + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\log 2\pi$ *avec* μ *la distribution de* X.
5. ***Additivité et indépendance libre*** *Supposons* $\chi(X_j) > -\infty$*, alors* $\chi(X_1, ..., X_n) = \chi(X_1) + ... + \chi(X_n)$ ***ssi*** *les* X_i *sont libres.*
6. ***Maximum pour des variables semicirculaires*** *Supposons* $\tau(X_i^2) = 1$*. Alors* $\chi(X_1, ..., X_n)$ *est maximum* ***ssi*** *les* X_i *sont des semicirculaires centrés libres de variances 1.*
7. ***Changements de variable analytiques*** *Soit* $F_1, ..., F_n$ *et* $G_1, ..., G_n$ *des séries formelles non commutatives avec* $F_i = F_i^*$ *et* $G_i = G_i^*$*, tel que :*

$$G_i(F_1(X_1, ..., X_n), ..., F_n(X_1, ..., X_n)) = X_i, \quad (1 \leq i \leq n).$$

Soit $(R_1, ..., R_n)$ *et* $(R'_1, ..., R'_n)$ *des multi-rayons de convergence commun de* F_i *et* G_i *respectivement. Si* $(a_1, ..., a_n) \in M^{sa}$ *satisfont :*

$$||a_i|| < R_i, \quad M(F_i; ||a_1||, ..., ||a_n||) < R'_i, \qquad (1 \leq i \leq n).$$

alors, on a l'inégalité :

$$\chi(F_1(a_1, ..., a_n), ..., F_n(a_1, ..., a_n)) \geq \chi(a_1, ..., a_n) + \log|\mathcal{I}|(F)(a_1, ..., a_n).$$

avec égalité si on peut appliquer le même résultat aux G_i*. Ici si* $DF(a_1, ..., a_n) := (D_jF_i(a_1, ..., a_n))_{(i,j)} \in M_n(M\otimes M^{op})$ *(cf 2.4 pour la définition de* D_iF_j*) alors* $|\mathcal{I}|(F)(a_1, ..., a_n) := \Delta(DF(a_1, ..., a_n))$ *avec le déterminant dit de Flugede-Kadison :* $\Delta(a) = \exp(\frac{1}{2}\tau'(\log(a^*a)))$ *appliqué avec* $\tau' = Tr_k \otimes (\tau\otimes\tau)$.

8. ***Convexité dégénérée*** *Supposons* $n \geq 2$ *et* $\tau_1 \neq \tau_2$ *deux états traciaux sur* $M = W^*(X_1, ..., X_n)$ *et* $\tau = \theta\tau_1 + (1-\theta)\tau_2$ *avec* $\theta \in (0, 1)$*. Alors dans* (M, τ)*,* $\chi(X_1, ..., X_n) = -\infty$.

2.3 Conjectures

-Premièrement, étant donnés $X_1, ...X_n$, et $m \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$, existe-t-il des $k \in \mathbb{N}$ et $R > 0$ tels que $\Gamma_R(X_1, ..., X_n; m, k, \epsilon) \neq \emptyset$? Cette question est en fait équivalente à une grande conjecture d'Alain Connes sur la réalisation de tout facteur II_1 (un facteur M, sur lequel il existe un état tracial normal fidèle) comme sous-facteur de l'ultraproduit du facteur II_1 hyperfini (i.e. $L(S_\infty)$).

-Deuxièmement, on ne sait pas si la $\limsup$ de la définition est une limite sauf dans le cas une variable.

Il est possible qu'une amélioration de la connaissance de l'entropie libre fournisse une solution à un très vieux problème sur les algèbres de von Neumann des groupes libres déjà mentionné : A-t-on $L(F_n) \simeq L(F_m)$ implique $m = n$? On sait (cf. [8]) en particulier que pour $m > 1$, ces groupes libres (et même une version interpolée pour m réel) vérifient que ces algèbres sont soit toutes isomorphes, soit toutes non isomorphes. Pour montrer comment un résultat sur l'entropie libre pourrait donner une réponse, on définit la dimension entropique libre :

$$\delta(X_1, ..., X_n) = n + \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\chi(X_1 + \epsilon S_1, ..., X_n + \epsilon S_n)}{|\log \epsilon|},$$

avec S_1,...,S_n semicirculaires centrés de variances 1 tel que $\{X_1, ..., X_n\}$,$\{S_1\}$,...,$\{S_n\}$ libres.

C'est une grandeur inférieure à n, sous-additive, additive dans le cas libre que l'on connait dans le cas 1 variable et vaut n si l'entropie libre est finie. Voiculescu a montré (cf. [5]) que si la dimension entropique libre était semi continue au sens que si des $X_j^{(p)}$ convergent vers X_j pour la topologie forte d'opérateurs, alors

$$\liminf_{p \to \infty} \delta(X_1^{(p)}, ..., X_n^{(p)}) \geq \delta(X_1, ..., X_n),$$

alors les facteurs des groupes libres seraient non isomorphes. Mais formulée ainsi, la propriété est fausse (cf. [9] pour un contre-exemple), cependant le contre-exemple n'est pas valide si on demande par exemple aux $X_i^{(p)}$ et aux X_i limites d'engendrer la même algèbre de von Neumann, ce qui suffirait aussi à conclure le problème de l'isomorphisme (toujours en montrant qu'une "dimension entropique libre modifiée" (cf. [6]) de tout système de générateur de $L(F_n)$ est la même).

2.4 L'entropie libre non microcanonique

Face principalement aux problèmes pour avoir les ensembles de micro-états non vides, Voiculescu a proposé une autre définition pour une grandeur se comptant comme l'entropie libre, essentiellement basée sur une autre méthode de définition dans le cas classique, mais dont on ne sait pas si elle donne le même résultat ici mis à part en une variable.

Voiculescu introduit une dérivation $\partial : B[X] \to B[X] \otimes B[X]$ via :

$$\begin{aligned}
&\partial(X) = 1 \otimes 1 \\
&\partial(b) = 0 \text{ si } b \in B \\
&\partial(m_1 m_2) = \partial(m_1)(1 \otimes m_2) + (m_1 \otimes 1)\partial(m_2) \text{ pour } m_1, m_2 \in B[X]
\end{aligned}$$

Si on suppose donné un W^*-espace de proba (M, τ) avec τ fidèle (i.e. les semi-normes suivantes sont des normes), on note $|x|_p = \tau((x^*x)^{p/2})^{1/p}$ et $L^p(M, \tau)$ le complété de M pour cette norme. Ces espaces sont analogues aux espaces L^p usuels (cf [10]). Dans notre cas, on peut voir ∂ comme un opérateur non borné de $L^2(B[X], \tau) \to L^2(B[X], \tau) \otimes L^2(B[X], \tau)$. $\mathscr{J}(X : B)$ défini ci-dessous peut alors être vue comme $\partial^* 1 \otimes 1$ si cette quantité existe.

Définition 2.2. Un élément $\xi \in L^1(W^*(B[X]))$ est appelé *variable conjuguée* de X (du premier ordre) par rapport à B si

$$\tau(\xi m) = \tau^{\otimes 2}(\partial m), \forall m \in B[X].$$

On note un tel élément $\mathscr{J}(X : B)$ s'il existe.

L'*information libre relative* de $X_1, ..., X_n \in M$ par rapport à B est définie par :

$$\Phi^*(X_1, ..., X_n : B) = \sum_{1 \leq j \leq n} \left| \mathscr{J}(X_j : B[X_1, ..., \hat{X}_j, ..., X_n]) \right|_2^2$$

si $\mathscr{J}(X_j : B[X_1, ..., \hat{X}_j, ..., X_n]) \in L^2(M)$ pour $1 \leq j \leq n$ et $\Phi^*(X_1, ..., X_n : B) = \infty$ sinon.

Enfin, l'*entropie libre (non microcanonique) relative* de $X_1, ..., X_n \in M$ par rapport à B est :

$$\chi^*(X_1, ..., X_n : B) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{n}{1+t} - \Phi^*(X_1 + t^{1/2} S_1, ..., X_n + t^{1/2} S_n : B) \right) dt + \frac{n}{2} \log(2\pi e)$$

où les S_j sont des éléments semicirculaires de moyenne 0 et de variance 1 et où $B[X_1, ..., X_n]$, $\{S_1\}$,..., $\{S_n\}$ sont libres (on peut voir loin que la quantité intégrée est toujours majorée par une quantité intégrable, la définition pouvant donc s'entendre comme l'intégrale (finie ou $-\infty$) de fonctions négatives une fois retirée cette quantité).

Avec ces définitions, cette entropie libre vérifie des propriétés analogues à la précédente, on a des propriétés de sous-additivité, semi-continuité, additivité dans le cas libre (voir mon mémoire de M2 ou [11]), on peut définir une dimension libre comme précédemment. Nous reviendrons là-dessus en dernière partie, car cette définition permet un lien avec une homologie L^2 pour les algèbres de von Neumann.

3 Applications aux algèbres de von Neumann

3.1 Un exemple (relativement) simple : non-Γ

Commençons par un rappel de définition :

Définition 3.1. Soit (M, τ) un W^*-espace de probabilité, une *suite centrale* dans (M, τ) est une suite $(t_k)_{k\geq 0}$, bornée dans M, telle que pour tout x de M, $\lim_{k\to\infty} |[t_k, x]|_2 = 0$.

Un suite centrale est dite triviale si $\lim_{k\to\infty} |t_k - \tau(t_k).1|_2 = 0$.

On dit que (M, τ) a la propriété Γ s'il existe une suite centrale non-triviale dans M. Ceci équivaut, au moins dans le cas où M est $|.|_2$-séparable, à l'existence de $\theta \in (0, 1/2)$, et une suite centrale de projecteurs orthogonaux P_n avec $\theta < \tau(P_n) < 1 - \theta$.

Nous allons illustrer le principe des applications aux algèbres de von Neumann par un exemple présent dans notre mémoire de M2, dans la mesure où il permet au passage de démontrer la propriété de convexité 8 de la proposition 2.1 ci-dessus : nous allons donner quelques indications de la preuve que si $\chi(X_1, ..., X_n) > -\infty$ alors l'algèbre de von Neumann M engendré par les X_i dans W ((W, τ) comme d'usage un W^*-espace de probabilité tracial fixé) n'a pas la propriété Γ ce qui implique évidemment que c'est un facteur. Nous rappelons dans notre mémoire le vieux résultat selon lequel cela (la factorialité) équivaut à dire que (la restriction de) τ à M est extrémal dans le convexe des états traciaux. Dans le cas des $L(F_n), n > 1$ (i.e. avec les X_i e.g. n semi-circulaires libres), on retrouve un résultat bien connu de Murray et von Neumann (qui était leur critère pour distinguer $L(F_n), n > 1$ de $L(S_\infty)$ qui a la propriété Γ).

La preuve de l'énoncé ci-dessus est par contraposé à partir de ce corollaire de la propriété Γ. Comme dans toutes les applications de l'entropie libre que nous avons en vue dans cette partie, on montre une inégalité impliquée par ce résultat, et on conclut en montrant que cela force l'entropie libre à valoir $-\infty$. Ici, on a le résultat (cf. toujours mon mémoire de M2 ou [6]) :

Lemme 3.2. *Soit (M, τ) un W^*-espace de probabilité tracial engendré par un n-uplet $(X_1, ..., X_n)$, vérifiant $\tau(X_i^2) \leq 1$, soient $\theta \in (0, 1/2)$ et $P \in A$ une projection orthogonale telle que $\theta < \tau(P) < 1 - \theta$ et $|[P, X_i]|_2 < \omega$ pour $i = 1..n$. Alors on a $\chi(X_1, ..., X_n) \leq C_1 + C_2 \log \omega$ avec les C_i des constantes > 0 connues et ne dépendant que de n et θ.*

La preuve consiste à recouvrir les $\Gamma_R(X_1, ..., X_n; m, k, \epsilon)$ par un nombre fini de "boules", pour cela on approche P par un polynôme en les X_i et on trouve, en considérant des polynômes analogues pour un point $(M_1, ..., M_n)$ de Γ_R qui ont donc des moments proches de ceux du projecteur de départ, un projecteur orthogonal Π (de trace q/k proche de celle de P) dans $M_k(\mathbb{C})$, ce projecteur commutant à 2ω près aux M_i. En voyant $M_k(\mathbb{C})$ décomposé par bloc $q, (n - q)$ après diagonalisation de notre projecteur, la commutation s'exprime par un recouvrement de Γ_R par des produits de boules de rayons différents, avec un rayon plus petit dans les espaces correspondants aux termes non diagonaux de la matrice, le recouvrement étant indicé par de unitaires $U \in U(N)/U(q) \times U(n-q)$ nécessaire à la diagonalisation de Π. C'est là qu'on utilise (une version faible d')un résultat de Szarek ([12]) sur cette grassmanienne $U(N)/U(q) \times U(n-q)$ indiquant qu'on peut la recouvrir par des boules de rayon δ en nombre inférieur à $(C\delta^{-1})^{N^2-q^2-(N-q)^2}$ et un simple calcul avec des formules de Stirling conclut (Pour plus de détails, voir mon mémoire de M2... ou l'exposé de P. Biane au séminaire Bourbaki de Juin 2001 «Entropie libre et algèbres d'opérateurs»).

3.2 Autres résultats

Ces techniques ont permis d'obtenir des résultats plus avancés. Par exemple, $L(F_n), n > 1$ sont les premiers facteurs de type II_1 à prédual séparable dont on sait démontrer qu'ils n'ont pas de sous-algèbres de Cartan (i.e. de sous-algèbres de von Neumann abéliennes maximales, régulières au sens où son normalisateur engendre le facteur tout entier, cf. [6]). Pour mieux situer le résultat, rappelons que Feldman et Moore ont montré (cf. [13]) que les facteurs ayant une sous-algèbre de Cartan, sont exactement ceux pouvant être produit par une généralisation appropriée utilisant des relations d'équivalences mesurées de la "group measure space construction" de Murray et von Neumann (cette dernière construction consiste à considérer un groupe dénombrable agissant sur un espace mesuré X, ceci fournissant des unitaires agissant par translation sur $L^2(X)$, et des fonctions mesurables bornées agissant par multiplication, la construction en question consiste à prendre le bicommutant de tous ces opérateurs).

De même, Li Ming Ge (cf. [14]) a aussi montré que les $L(F_n), n > 1$ ne sont pas isomorphes aux produits tensoriels de deux facteurs II_1 (on dit qu'ils sont premiers).

4 Perspectives : liens à une homologie L^2 des algèbres de von Neumann

Tentons d'indiquer brièvement le lien de l'entropie libre non microcanonique avec une homologie L^2 des algèbres de von Neumann introduite récemment par Alain Connes et Dimitri Shlyakhtenko ([15]).

Deux points sont à conserver à l'esprit, le premier est que l'on sait peu de chose sur les précédentes tentatives de définir des homologies pour les algèbres de von Neumann, en général des résultats d'annulation, le second est que Connes et Shlyakhtenko ont essayé d'introduire une théorie permettant de définir des nombres de Betti qui coincideraient (en considérant l'algèbre du groupe) au moins dans des cas favorables avec les nombres de Betti L^2 déjà definis pour les groupes.

Rappelons donc que une cohomologie L^2 pour certains groupes discrets G a d'abord été introduite par Atiyah, quand il existait pour ce groupe une action libre propre et cocompacte sur une variété connexe X (cf. [16]), mais la définition que Connes et Shlyakhtenko ont généralisée aux algs de v.N. est une version plus récente due à Lück faite pour éviter les restrictions précédentes : on considère alors l'homologie algébrique $H_*(G, L(G)) = Tor_*^{Mod(G)}(\star; L(G))$, construite dans la catégorie des modules à gauche sur le groupe G, où $\star$ désigne la représentation triviale, $L(G)$ étant une "version L^2" du module associé à la représentation régulière gauche comme on a vu plus haut. Le point pour définir des nombres de Betti dans ce cadre est d'utiliser une version étendue de la dimension de Murray et von Neumann, due à Lück (cf. [17] ou [18] dans le cas de $L(G)$). Pour rappel, Murray et von Neumann ont défini une dimension à valeur dans $[0, \infty]$ pour les modules hilbertiens séparables sur M (disons ici facteur II_1)(i.e. les espaces de Hilbert munis d'un *-homomorphisme unital de M dans un facteur II_1 agissant sur H) en obtenant une isométrie u de H dans $L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$, M-linéaire, et considérant $tr(u^*u)$, u^*u appartenant au commutant de M dans son action sur $L^2(M)\otimes\ell^2(\mathbb{N})$, et une trace (finie ou infinie) pouvant être définie sur celui ci (car on peut montrer que c'est soit un facteur II_1 soit le produit tensoriel d'un facteur II_1 avec un $B(K)$ pour un autre espace de Hilbert K) (Cette dimension permet essentiellement de définir une dimension sur les modules "algébriques" projectifs de type fini sur M qui sont toujours hilbertiens). Lück a montré que cette dimension (avec de bonnes propriétés) pouvait s'étendre aux modules "algèbriques" sur M de type fini (c'est en fait le supremum des dimensions des modules projectifs de type fini qu'on peut injecter dans celui-ci). En ce sens on peut définir les nombres de Betti : $\beta_*^{(2)}(G) := \dim_{L(G)} Tor_*^{Mod(G)}(\star; L(G))$, vu que l'homologie hérite d'une structure de $L(G)$ module induite de la structure de $G, L(G)$-bimodule de $L(G)$.

Partant de la théorie des correspondances (i.e. des $M \otimes M^{op}$-modules), qui ont été découvertes par Connes comme les bons analogues des représentations à gauche pour les groupes (notamment dans la définition de propriétés analytiques comme la moyennabilité ou la propriété (T) de Kashdan pour les algèbres de von Neumann, cf e.g. [19]), on connait des analogues à tous les objets nécessaires précedemment, Connes et Shlyakhtenko ont donc donné la définition pour un espace de probabilité non-commutatif (A, τ) avec τ bornée (i.e. $\forall b \in A,\ \exists C > 0,\ \forall a \in A,\ \tau\ (a^*b^*ba) \leq C\tau(a^*a)$ de sorte q'on a une définition de $L^2(A, \tau)$, et une algèbre de von Neumann engendrée $M = W^*(A) \subset B(L^2(A, \tau)))$:

$$\beta_k^{(2)}(A, \tau) = \dim_{M\bar{\otimes}M^{op}} Tor_k^{ModA\otimes A^{op}}(A; M\bar{\otimes}M^{op}).$$

Connes et Shlyakhtenko peuvent ainsi montrer que pour $A = \mathbb{C}G$ l'algèbre du groupe, avec la restriction de la trace de $L(G)$, alors ces nombres coïncident avec les nombres de betti L^2 du G définis plus haut, le résultat restant bien sûr ouvert pour $A = L(G)$.

Le point important pour nous est qu'étant donné une famille finie de générateur F d'un W^*-espace de proba (M, τ), et A l'algèbre qu'ils engendrent, il est naturel en tentant d'approximer $\beta_1^{(2)}(M) - \beta_0^{(2)}(M) + 1$ d'introduire la quantité suivante, qui, indépendemment de la définition homologique que l'on va donner ici, a une défition concrète :

$$\Delta(F) := \dim_{M\bar{\otimes}M^{op}} Tor_1^{Mod(M\otimes M^{op})}(M \otimes_A M, M\bar{\otimes}M^{op}) + 1 - \beta_0^{(2)}(M).$$

Connes et Shlyakhtenko peuvent montrer que cette quantité se comporte comme la dimension entropique libre, est sous additive, additive dans le cas libre, inférieur à n, inférieur à $\beta_1^{(2)}(G) - \beta_0^{(2)}(G) + 1$, quand les éléments de F sont les unitaires associés à une famille de générateur du groupe finiment engendré G.

Par ailleurs, on a l'inégalité suivante connue avec les entropies de Voiculescu, la première dérivant d'un résultat profond de Biane-Guionnet-Capitaine (obtenu en étudiant les propriétés de grandes déviations d'un mouvement brownien à valeur hermitienne, cf [20]) :

$$\delta(X_1, ..., X_n) \leq \delta^*(X_1, ..., X_n) \leq \Delta(X_1, ..., X_n),$$

ceci étant la meilleure motivation de non trivialité dans certains cas de cette homologie (notamment dans le cas des algèbres de von Neumann des groupes libres).

Références

[1] M. Takesaki. *Theory of operator algebras I.* Springer, 1979.

[2] K.J. Dykema D. Voiculescu and A.Nica. *Free Random Variables.* AMS, Providence, RI, 1992.

[3] M. Takesaki. Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 132 :no. 627, 1998.

[4] D. Voiculescu. Limit laws for random matrices and free products. *Inventiones mathematicae*, 104 :201–220, 1983.

[5] D. Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, II. *Inventiones mathematicae*, 118 :411–440, 1994.

[6] D. Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, III : The absence of Cartan subalgebras. *Geometric and Functional Analysis*, Vol 6,No. 1 :172–199, 1996.

[7] D. Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, IV : maximum entropy and freeness. In *Free probability*, volume Vol 12,No. 1, pages 293–302. AMS Providence, 1997.

[8] F. Radulescu. Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neumann algebra of the free group, of noninteger index. *Inventiones Mathematicae*, 115, no 2 :347–389, 1994.

[9] D. Shlyakhtenko. Remarks on free Entropy Dimension. *arxiv*, OA :0504062, 2005.

[10] G. Pisier et Q. Xu. Non commutative L^p-spaces. In *Handbook of the geometry of Banach Spaces, Vol 2*, pages 1459–1517. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[11] D. Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, V : Non commutative Hilbert Transforms. *Inventiones mathematicae*, 132 :189–227, 1998.

[12] S.J. Szarek. Nests of Grassmann manifolds and orthogonal group, Proceedings of Research Workshop on Banach Space Theory. The University of Iowa, June 29-31 1981.

[13] J. Feldman et C.C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras, I, II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 234 :289–359, 1977.

[14] L. Ge. Applications of free entropy to finite von neumann Algebras II. *Annals of Mathematics*, 147 :143–157, 1998.

[15] A. Connes et D. Shlyakhtenko. L^2-Homology for von Neumann algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 586 :125–168, 2005.

[16] M.F. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. In *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 43–72. Asterisque, No 32-33., Soc. Math. France, Paris, 1976.

[17] W. Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers I : foundations. *J. Reine Angew. Math*, 495 :135–162, 1998.

[18] W. Lück. *L^2-Invariants : Theory and Applications to Geometry and K-Theory*. Springer, 2002.

[19] A. Connes. *Non-commutative Geometry*. Academic Press, 1994.

[20] P. Biane A. Guionnet et M. Capitaine. Large deviation bounds for matrix Brownian motion. *Invent. Math.*, 152 :433–459, 2003.

[21] J. Peterson. L^2-rigidity in von Neumann algebras. *arxiv*, math.OA :0605033, preprint 2006.

[22] J. Peterson. A 1-cohomology characterisation of Property (T) in von Neumann algebras, year=preprint 2004,journal=arxiv. math.OA :0409527.

[23] F. Cipriani et J.-L. Sauvageot. Derivations as square roots of Dirichlet forms. *Journal of Functionnal Analysis*, 201 :78–120, 2003.