Marches aléatoires auto-évitantes et déterminants

Antoine Dahlqvist, encadré par Gordon Slade et David Brydges

Introduction

Soit $X = (V, E)$ un graphe. Un chemin auto-évitant sur X est une suite finie d'éléments de V $(\omega_0, \cdots, \omega_n)$, telle que ω_i est voisin de ω_{i+1} pour $0 \leq i \leq n-1$ et $\omega_i \neq \omega_j$ si $i \neq j$. Connaître l'asympotique du nombre de chemins auto-évitants de longueur n sur un graphe fixé est un problème largement ouvert. Pour un panorama des résultats connus on pourra consulter [12]. Je me suis intéressé dans mon mémoire de M2 aux différentes représentations de fonctionnelles de marches aléatoires. J'essaye ici de montrer comment l'étude des processus auto-évitants fait naturellement intervenir des déterminants. Dans la dernière partie, j'explique pourquoi cette question est aussi reliée à l'étude de certains champs gaussiens.

1 Effacement de cycles et algorithme de Wilson

Supposons que X est connexe et fini. L'objectif de cette partie est d'obtenir une loi sur des chemins auto-évitants à partir de la loi d'une marche aléatoire.
Munissons les arêtes de X de conductances $(c_e)_{e\in E} \in \mathbb{R}_+^*$, et considérons la marche aléatoire réversible sur X dont le noyau de transition P est défini par $P_{x,y} = \frac{c_{\{x,y\}}}{\sum_{z\in V:\{x,z\}\in E} c_{\{x,z\}}}$ et de mesure réversible λ donné par $\lambda_x = \sum_{e\in E: x\in e} c_e$.
L'énergie $\mathcal{E}(\phi)$ d'un potentiel $\phi \in l^2(V)$ est définie par

$$\mathcal{E}(\phi) = \sum_{\{x,y\}\in E} c_{\{x,y\}}(\phi_x - \phi_y)^2 = \sum_{x\in V} (I-P)(\phi)_x \lambda_x.$$

Soit F un sous-ensemble non vide de V et $D = V \setminus F$. X étant connexe, $\mathcal{E}$ est une forme quadratique sur $l^2(V)$ dont la restriction $\mathcal{E}_D$ à l'espace des fonctions nulles en F est non dégénérée. On appelle fonction de Green sur D, l'opérateur $G_D : l^2(D) \to l^2(D)$ défini par

$$\mathcal{E}_D(\phi, G_D.\phi) = \sum_{x\in D} |\phi_x|^2,$$

pour tout $\phi \in l^2(D)$, où on a identifié $l^2(D)$ à l'espace des fonctions de V à support dans D. $G_D = ((D_\lambda - C)_{D\times D})^{-1}$ où C est la matrice symétrique induite par $(c_e)_{e\in E}$ et D_λ la matrice diagonale avec coefficients diagonaux λ.
On appelle potentiel sur D, l'opérateur $U_D : l^2(D) \to l^2(D)$ défini par $U_D = ((I -$

$P)_{D\times D})^{-1} = G_D D_{\lambda}^{-1}{}_{D}$. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur V de noyau de transition P issu de $x \in D$, et $T_F = \inf\{n \geq 1 : Y_n \in F\}$, pour tout $f \in l^2(D)$,

$$U_D.f(x) = \mathbb{E}_x[\sum_{0\leq n<T_F} f(Y_n = y)].$$

Une manière d'obtenir un chemin auto-évitant à partir d'un chemin quelconque est d'effacer ses cycles dans l'ordre chronologique. Soit $(\omega_0, \cdots, \omega_n)$ un chemin de X, on construit $(y_0, \cdots, y_m)$ par récurrence sur $m \leq n$: soit $y_0 = \omega_0$. Si $(y_0, \cdots, y_m)$ est défini, soit $T_m = \sup\{k \geq 1 : \omega_k = y_m\}$, on pose $y_{m+1} = \omega_{T_m+1}$, si $T_m < n$, y_m sinon. On définit alors $LE(\omega) = (y_0, \cdots, y_l)$ où $l = \inf\{k \in [0, n] : y_k = y_{k+1}\}$.

Proposition 1.1. *Pour tout chemin auto-évitant* $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_l)$,

$$P_{\omega_0}(LE((Y_n)_{0\leq n\leq T_{\{\omega_l\}}} = \omega) = \omega) = (\prod_{i=0}^{l-1} c_{\omega_i,\omega_{i+1}}) \det((G_{V\setminus\{\omega_l\}}(\omega_i, \omega_j))_{0\leq i,j\leq l-1}).$$

Preuve :Notons $a = \omega_0$, et $F_0 = \{\omega_l\}$. Si $l \geq 2$,

$$P_a(LE((Y_n)_{0\leq n\leq T_{F_0}}) = \omega) = \mathbb{E}_a[\sum_{0\leq k<T_{F_0}} 1_{Y_k=\omega_0} 1_{LE((Y_{n+k+1})_{0\leq n\leq T_{F_1}}((Y_{m+k+1})_{m\geq 0}))=(\omega_1,\cdots,\omega_l)}],$$

où $F_1 = F_0 \cup \{a\}$.
Par propriété de Markov,

$$P_a(LE((Y_n)_{0\leq n\leq T_{F_0}})) = U_{D_0}(\omega_0, \omega_0)P_{\omega_1}(LE((Y_n)_{0\leq n\leq T_{F_1}}) = (\omega_1, \cdots, \omega_l))$$

$$= U_{D_0}(\omega_0, \omega_0)P_{\omega_0,\omega_1}U_{D_1}(\omega_1, \omega_1)\cdots U_{D_{l-2}}(\omega_{l-2}, \omega_{l-2})P_{\omega_{l-2},\omega_{l-1}}P_{\omega_{l-1}}(LE((Y_n)_{0\leq n\leq T_{F_{l-1}}}) = (\omega_{l-1}, \omega_l)),$$

$$= (\prod_{i=0}^{l-2} \frac{c_{\omega_i,\omega_{i+1}}}{\lambda_{\omega_i}} U_{D_i}(\omega_i, \omega_i))U_{D_{l-1}} \frac{c_{\omega_{l-1},\omega_l}}{\lambda_{\omega_{l-1}}} = \prod_{i=0}^{l-1} c_{\omega_i,\omega_{i+1}} G_{D_i}(\omega_i, \omega_i).$$

où $F_i = \{\omega_l, \omega_0, \cdots, \omega_{i-1}\}$, et $D_i = V \setminus F_i$ pour $0 \leq i \leq l$.

Par la formule de Cramer, pour $0 \leq i \leq l-2$,

$$G_{D_i}(\omega_i, \omega_i) = \frac{\det(G_{D_i})}{\det(G_{D_{i+1}})}.$$

La probabilité recherchée vaut donc $(\prod_{i=0}^{l-1} c_{\omega_i,\omega_{i+1}}) \frac{\det(G_{D_0})}{\det(G_{D_l})} = (\prod_{i=0}^{l-1} c_{\omega_i,\omega_{i+1}}) \det(G_{|F_l\setminus\{\omega_l\}\times F_l\setminus\{\omega_l\}})$.□

Ce processus a été introduit et étudié quand le graphe est plan par G. Lawler. Il a montré avec O.Schramm et W. Werner que la marche à boucle effacée (en anglais loop erased random walk, LERW)sur $\delta\mathbb{Z}^2$ partant de 0 et arrêtée quand elle sort d'un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$ fixé, induit une mesure sur les courbes du plan qui converge faiblement quand la maille du réseau δ tend vers 0. La limite est un processus SLE_2

chordal (voir [6]).

Par ailleurs, sur un graphe fini, on peut générer un arbre aléatoire en lançant indépendamment en chaque point une marche à boucle effacée. Si $\{v_0, \cdots, v_n\} = V$, soit $(\eta^1, \cdots, \eta^n)$ n LERW indépendantes issues de $v_1, \cdots, v_n$ arrêtées en v_0. Soit $T(i)$ la famille croissante d'arbres définie par $T(0) = v_0$, $T(i+1) = \{\{\eta^i_k \eta^{i+1}_{k+1}\} : 0 \leq k \leq T_{T(i)} - 1\}$ si $v_{i+1} \in T(i)$, et $T(i)$ sinon. Notons $\mathcal{T}$ l'arbre couvrant $T(n)$. En utilisant la proposition précédente, on obtient

Proposition 1.2. *La loi de $T(n)$ est donnée par*

$$P(\mathcal{T} = T) = (\prod_{e \in T} c_e) \det(G_{\{v_0\}^c}).$$

En particulier, $\det(G^{-1}_{\{v_0\}^c}) = \sum_{e \in E} \prod_{e \in T} c_e$ est indépendant de v_0 et la loi de $\mathcal{T}$ ne dépend pas de l'ordre de V.

La deuxième assertion est connue sous le nom de théorème "Matrix tree " ou théorème de Cayley. Il existe plusieurs théorèmes "Matrix-tree" qui expriment le déterminant de certains Laplaciens sur des graphes décorés comme une somme de poids indexé par des arbres avec des propriétés associées à la décoration.
Quand le graphe est plan, le dual d'un arbre couvrant est un arbre couvrant sur le graphe dual et à un arbre couvrant on peut associer une courbe délimitant l'arbre couvrant et son dual. Soit $D \neq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, les mêmes auteurs ont montré que la mesure sur le courbes de D obtenue à partir de l'arbre aléatoire sur $\delta.Z^2 \cap D$ avec certaines conditions au bord converge faiblement. La limite est un SLE_8 chordal(voir [6]).

On va maintenant essayer de comprendre pourquoi apparaissent des déterminants quand on veut décrire des ensemble aléatoires.

2 Processus déterminantaux sur un espace fini, cas des arbres

Pour des preuves des résultats qui suivent on pourra consulter [10] et [9].
Soit X un ensemble fini. A toute fonction $f \in l^2_{\mathbb{C}}(X)$ de norme 1, on peut associer un singleton de X aléatoire $\mathfrak{S}_f$ définie par $P(\mathfrak{S}_f = \{x\}) = |f(x)|^2$ pour tout $x \in X$. De la même manière, on voudrait associer à tout sous-espace vectoriel H de $l^2_{\mathbb{C}}(X)$ un sous-ensemble aléatoire de X. Pour ce faire, on introduit l'algèbre extérieur $\bigwedge l^2_{\mathbb{C}}(X)$. La base canonique $(1_x)_{x \in X}$ et un ordre de X induisent une base de $\bigwedge l^2_{\mathbb{C}}(X)$, $\{\theta_\emptyset\} \cup \{\theta_Y : Y \subset X\}$. Munissons $\bigwedge l^2_{\mathbb{C}}(X)$ d'un produit scalaire $(,)$ rendant cette base orthonormée. Par multilinéarité , pour tout $f_1, \cdots, f_k \in l^2_{\mathbb{C}}(X)$, $||f_1 \wedge \cdots \wedge f_k||^2 = \det((f_i, f_j)_{1 \leq i,j \leq k})$.

Soit H un sous-espace vectoriel de $l^2_{\mathbb{C}(X)}$ de dimension n, on définit l'ensemble aléatoire $\mathfrak{S}_H$ par

$$P(\mathfrak{S}_H = Y) = (P_{\bigwedge^n H} \theta_Y, \theta_Y),$$

pour tout $Y \subset X$, où si K est un sous-espace vectoriel de $\bigwedge l^2_{\mathbb{C}}(X)$, P_K est la projection orthogonale sur K.
On montre alors

Proposition 2.1. *Pour tout sous-ensemble Y_1, Y_2 de X,*

$$P(\mathfrak{S}_H \supset Y_1, \mathfrak{S}_H \cap Y_2 = \emptyset) = (P_{\bigwedge H}\theta_{Y_1} \wedge P_{\bigwedge H^\perp}\theta_{Y_2}, \theta_{Y_1} \wedge \theta_{Y_2}),$$

en particulier,

$$P(\mathfrak{S}_H \supset Y) = ||P_{\bigwedge H}(\theta_Y)||^2 = \det((P_H(y,y'))_{y,y' \in Y}).$$

Definition 2.1. *Soit une matrice carrée K indexée par X, un sous-ensemble aléatoire de X $\mathfrak{S}$ est un processus déterminantal de noyau K si*

$$P(\mathfrak{S} \supset Y) = \det((K(y,y'))_{y,y' \in Y}),$$

pour tout $Y \subset X$.

Exemple 2.1.
- *Soit $x_1, \cdots, x_n$ n variables de Bernouilli indépendantes de paramètre p. $\{i \in \{1, \cdots, n\} : x_i = 1\}$ est déterminantal avec pour matrice $K = p.I_n$.*
- *Soit $G = (V, E)$ un graphe fini muni de conductances $(c_e)_{e \in E}$. L'arbre couvrant $\mathcal{T}$ est un processus déterminantal sur E. Si on voit G comme un réseau électrique, où on a fixé les orientations des arêtes, $K(e, f)$ est la valeur du courant électrique passant dans f quand on branche un générateur aux extrêmités de e faisant circuler un courant unitaire. Ce résultat est due à Burton et Pemantle.*

On considère maintenant une propriété importante des processus déterminantaux associés à une matrice de projection.

Definition 2.2. *On dit qu'une partie $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ est croissante si $A \in \mathfrak{A}$ implique $B \in \mathfrak{A}$ pour tout $B \supset A$. Pour tout $Y \subset X$ on dit que $\mathfrak{A}$ est mesurable par rapport à Y si $\mathfrak{A} \in \sigma\{\{B \subset X : y \in B\} : y \in Y\}$.*
Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble aléatoire sur X. On dit que $\mathfrak{S}$ est négativement corrélé si pour toutes parties croissantes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ de $\mathcal{P}(X)$ qui sont mesurables par rapport à des parties disjointes , on a

$$P(\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \leq P(\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}_1)P(\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}_2).$$

En particulier si $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble négativement corrélé de X, pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$, $P(x \in \mathfrak{S} | y \in \mathfrak{S}) \leq P(x \in \mathfrak{S})$.

Théorème 2.2. *Soit $\mathfrak{S}$ un sous-ensemble aléatoire de X associé à un sous-espace vectoriel H de $l^2_{\mathbb{C}}(X)$, alors $\mathfrak{S}$ est négativement corrélé.*

On montre maintenant comment ce résultat peut être appliqué au processus $\mathcal{T}$ sur les arbres couvrants d'un graphe fini $G = (V, E)$.

Fixons une orientation de E, pour $e \in E$, soit e_- et e_+ son entrée et sa sortie. Munissons $l^2_{\mathbb{C}}(E)$ de la norme $\|.\|$ définie par $\|J\|^2 = \sum_{e\in E} r(e)|J(e)|^2$, pour tout $J \in l^2_{\mathbb{C}}(E)$, où $r(e) = \frac{1}{c(e)}$.
Pour tout $v \in V$, soit $\star_v = \sum_{e\in E:} c(e)(1_{e_+=v} - 1_{e_-=v})$, et pour tout cycle orienté $\circlearrowright = (e_1, \cdots, e_n)$, soit $\diamond_{\circlearrowright} = \sum_{i=1}^n (1_{e_i} - 1_{\hat{e_i}})$, où $\widehat{(x,y)} = (y,x)$.
Notons $\bigstar = \text{vect}\{\star_v : v \in V\}$ et $\diamondsuit = \text{vect}\{\diamond_{\circlearrowright} : \circlearrowright \text{ cycle orienté}\}$.

Lemme 2.1. $\bigstar^\perp = \diamondsuit$.

Soit $P_\bigstar$ la projection orthogonale sur $\bigstar$.

Proposition 2.3. *Pour deux arêtes orientées e, f soit $p(e,f)$ la probabilité que le chemin de l'arbre couvrant $\mathcal{T}$ allant de e_- vers e_+ passe par f en respectant son orientation. Pour $e, f \in E$ on a*

$$(P_\bigstar 1_e, 1_f) = p(e,f) - p(e,\hat{f}),$$

en particulier, $P(e \in \mathcal{T}) = (P_\bigstar 1_e, 1_e)$.

On s'intéresse maintenant au comportement de $\mathcal{T}$ quand on transforme le graphe. Soit $F \subset E$ un ensemble d'arêtes. On note $G/F = (\tilde{V}, \tilde{E})$ le graphe (avec des boucles) obtenu en identifiant les extrémités des arêtes de F. En utilisant la formule explicitant la loi de $\mathcal{T}$, on trouve que $\mathcal{T}_{G/F}$ a même loi que $\mathcal{T}_G$ sous $P(.|F \subset \mathcal{T}_G)$.

Soient $\hat{\bigstar}$ et $\hat{\diamondsuit}$ la décomposition orthogonale $l^2(\tilde{E}, r)$ associé au graphe G/F. Tout cycle de G/F est la composition de cycles dans G et de boucles, donc $\hat{\diamondsuit} \supset \diamondsuit$ et $\hat{\bigstar} \subset \bigstar$. Soit $\blacklozenge = \hat{\diamondsuit} \cap \bigstar$, on a alors la décomposition orthogonale $l^2(E,r) = \hat{\bigstar} \bigoplus \blacklozenge \bigoplus \diamondsuit$, et $P_{\hat{\bigstar}} = P_{\blacklozenge^\perp} P_\bigstar$. En particulier,$(P_{\hat{\bigstar}} 1_e, 1_e) \leq (P_\bigstar 1_e, 1_e)$ et

$$P(e \in \mathcal{T}_G | F \subset \mathcal{T}) \leq P(e \in \mathcal{T}_G).$$

On peut alors montré par récurrence le résultat de Burton et Pemantle :

Théorème 2.4. *$\mathcal{T}$ est un processus déterminantal sur les arêtes de noyau $c(f)(P_\bigstar 1_e, 1_f)_{e,f\in E}$.*

De même que précédemment, on peut montrer que si $G' = (V', E')$ est un sous-graphe de G, pour tout $e \in E'$,

$$P(e' \in \mathcal{T}_{G'}) = (P_{\bigstar'} 1_{e'}, 1_{e'}) \geq (P_\bigstar 1_{e'}, 1_{e'}) = P(e' \in \mathcal{T}_G).$$

Considérons $G = (V,E)$ un graphe infini avec une suite croissante de parties finies de V $(V_n)_{\geq 0}$, telle que $V = \cup_{n\geq 0} V_n$.
Pour $X \subset V$, soit $\partial X = \{\{x,y\} \in E : x \in X, y \notin X\}$ et $\bar{X} = V \cup_{\{x,y\}\in\partial X} \{x,y\}$.
Soit μ_n^F(resp. μ_n^W) la mesure induite par $\mathcal{T}_{\bar{V_n}}$ (resp. par $\mathcal{T}_{\bar{V_n}/\partial V_n}$. Identifions $\mathcal{P}(E)$ à $\{0,1\}^E$ que l'on munit de la tribu cylindrique. Pour tout $F \subset E$, $P(\mathcal{T}_{\bar{V_n}} \supset F)$ et $P(\mathcal{T}_{\bar{V_n}/\partial V_n} \supset F)$ sont des suites décroissantes. Par principe d'exclusion-inclusion et par théorème d'extension de Kolmogorov, il existe deux mesures μ^F et μ^W sur $\{0,1\}^E$ telles que pour tout cylindre C, $\mu^\cdot(C) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^\cdot(C)$, et si C est croissant, $\mu^F(C) \geq \mu^W(C)$. On montre que ces mesures ne dépendent pas du choix de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$.

Théorème 2.5. *μ^F et μ^W sont invariantes par translation et pour tout événement A de la tribu asymptotique de $\{0,1\}^E$, $\mu(A) \in \{0,1\}$. De plus ces deux mesures ont support sur les forêts de G (sous-graphes sans cycle) sans composantes finies.*

Le nombre de composantes connexes des forêts dans le support de μ^W est reliés aux propriétés d'intersection de la marche aléatoire sur G :

Théorème 2.6. *Le support de μ^W est compris dans l'ensemble des arbres couvrants ssi pour tout $x, y \in V$ $x \neq y$, deux marches aléatoires indépendantes de noyau P issue respectivement de x et de y s'intersectent p.s. .*

Notons $\mathcal{HD}$ l'ensemble des fonction harmoniques sur V d'énergie de Dirichlet finie : $\mathcal{H} = \{f \in \mathbb{C}^V : \lambda_x \phi_x = \sum_{y \text{ voisin de } x} c_{\{x,y\}} \phi_y$, et $\nabla \phi \in l^2(E,r)\}$, $\bigstar = \mathrm{adh}_{l^2(E,r)}(\langle \star_v : v \in V \rangle)$ et $\diamondsuit = \mathrm{adh}_{l^2(E,r)}(\langle \diamond_{\circlearrowleft} : \circlearrowleft \text{ cycle de } G \rangle)$.

Théorème 2.7. *On a la décomposition orthogonale $l^2(E) = \bigstar \bigoplus \diamondsuit \bigoplus \nabla \mathcal{H}$. μ^F et μ^W coïncident si et seulement si les seules fonctions harmoniques sont les constantes.*

Pour $G = \mathbb{Z}^d$, la situation est décrite par le

Théorème 2.8.
- *$\mu^W = \mu^F$ pour tout $d > 0$.*
- *Le support de $\mu^\cdot$ est compris dans l'ensemble des arbres couvrants ssi $d \leq 4$.*

Le lecteur intéressé pourra consulter [10] et [9].

3 Champs Gaussiens et temps local

En mécanique statistique il est d'usage de représenter des caractéristiques du modèle, comme la corrélation entre les valeurs du spin en deux points différents d'une configuration aléatoire de + et de -, par l'espérance d'une fonction d'un champs gaussien. On explique ici que l'on peut représenter des fonctionnelles d'une marche à temps continu par des fonctionnelles d'un champs gaussien.

3.1 Marches à temps continu et champs libre gaussien

Considérons le graphe fini $X = (V, E)$ dont les arêtes sont munis de conductances $(c(e))_{e \in E}$, $F \subset V$ non vide, $D = V \setminus F$, et $\bar{D} = \{x \in V : d(x, D) \leq 1\}$, où d est la métrique induite par le graphe.

Definition 3.1. *Soit $\psi \in l^2_{\mathbb{R}}(V)$ à support dans F . On appelle champs libre gaussien sur D avec conditions aux bords ψ le vecteur gaussien $(\Phi_x)_{x \in D}$ dont la densité est*

$$\det(D_\lambda - C \mid D) \exp(-\mathcal{E}_{\bar{D}}(\phi + \psi, \phi + \psi)).$$

Un tel vecteur gaussien a pour covariance G_D et pour moyenne $(\mathbb{E}_x[\psi(Y_{\tau_F})])_{x \in D}$, où $(Y_n)_{n \geq 0}$ est la marche aléatoire réversible associé au réseau (X, c).
Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus Markovien de sauts sur X à temps continue de générateur

$C - D_\lambda$. Pour $f \in l^2(V)$, pour $x \in V$, $\mathbb{E}_x[f(X_t)] = \exp(-t(D_\lambda - C)).f(x)$. Notons $\tau_F = \inf\{t > 0 : X_t \in F\}$, pour tout $x, y \in D$, $\mathbb{E}_x[\int_0^{\tau_F} 1_{X_t=y} dt] = G_D(x, y) = \mathbb{E}[(\Phi_x, \Phi_y)]$. On peut généraliser légèrement ceci de la manière suivante :
Pour tout $x \in D$, soit $L_x^T = \int_0^{\tau_F} 1_{X_t=x}$. Pour tout $(n_x)_{x\in D} \in \mathbb{N}^D$, et pour $a, b \in D$ notons $\mathcal{W}_{a,b}^{(n_x)_{x\in D}} = \{(a, \omega_1, \cdots, \omega_n, b) \in D^{(\mathbb{N})} : \omega_i \sim \omega_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n - 1$ et $\sum_{i=0}^n (1_{\omega_i=x}) = (n_x)\}$. Pour un chemin discret $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_n)$ sur X, notons $G_D(\omega) = \prod_{i=0}^n G_D(\omega_i, \omega_{i+1})$.
En utilisant la propriété de Markov, et l'égalité précedente, on trouve que

$$\mathbb{E}_a[1_{\tau_F^- = b} \prod_{x\in D} L_x^{n_x}] = \sum_{\omega \in \mathcal{W}_{a,b}^{(n_x)_{x\in D}}} G_D(\omega).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}_a[1_{\tau_F^- = b} \prod_{x\in D} (1 + L_x)] = \sum_{\omega \in \mathcal{S}_{a,b}(D)} G_D(\omega),$$

où $\mathcal{S}_{a,b}$ est l'ensemble des chemins auto-évitants de a à b.
On aimerait alors expliciter le membre de gauche en terme d'une fonctionnelle du champs gaussien. On a en fait le résultat suivant : considérons l'algorithme de Wilson mais avec des marches à temps continu. Pour $x \in D$, notons $\mathcal{L}_x$ le temps passé en x par l'ensemble des cycles effacés pendant l'algorithme. On peut montrer que la loi de $(\mathcal{L}_x)_{x\in D}$ ne dépend pas de l'ordre choisi dans l'algorithme.

Proposition 3.1 ([7]). *Le vecteur aléatoire $(\mathcal{L}_x)_{x\in D}$ a même loi que $(\|\Phi_x\|^2)_{x\in D}$.*

De plus, un théorème de Dynkin donne la relation suivante :

Théorème 3.2. *Soit Φ le champ libre sur D avec condition au bord nulle indépendant de $(X_t)_{t\geq 0}$,*

$$\mathbb{E}[1_{X_0=a, X_{\tau_F^-}=b} F(\|\Phi\|^2 + L)] = \mathbb{E}[(\Phi_a, \Phi_b) F(\|\Phi\|^2)],$$

pour toute fonction mesurable F sur $\mathcal{M}(D) = \mathbb{R}_+^D$.

Si on lance un algorithme de Wilson indépendamment de $(X_t)_{t\geq 0}$, on obtient

$$\mathbb{E}[1_{X_0=a, X_{\tau_F^-}=b} F(L + \mathcal{L})] = \mathbb{E}[(\Phi_a, \Phi_b) F(\|\Phi\|^2)].$$

Une manière d'obtenir une expression sans faire intervenir de cycle est d'introduire un déterminant dépendant du champ libre dans le membre de droite.

3.2 Superchamps

Considérons l'espace complexifié des formes différentielles réelles C^∞ sur $l^2_{\mathbb{C}}(D)$, noté $\Omega(D)$. Notons $(\phi_x)_{x\in D}$ les coordonnées complexes canoniques de $l^2_{\mathbb{C}}(D)$, et $(u_x, v_x)_{x\in D}$ ses coordonnées réelles avec $u_x = \Re(\phi_x)$ et $v_x = \Im(\phi_x)$. Notons $d\phi_x = e^{\frac{i\pi}{4}}(du_x + i.dv_x)$

et $d\bar{\phi}_x = e^{\frac{i\pi}{4}}(du_x - i.dv_x)$.
Pour $\omega \in \Omega$, notons $\mathcal{E}_D(\omega) = \sum_{\{x,y\}\in E} C_{\{x,y\}}(\omega_x - \omega_y) \wedge (\bar{\omega}_x - \bar{\omega}_y)$, et

$$\daleth : \Omega \to \mathbb{C}, \omega \mapsto (\prod_{x\in D} d\bar{\phi}_x d\phi_x, \exp(-\mathcal{E}(d\phi))).$$

Soient U et V deux copies indépendantes du champ libre gaussien sur D, et soit Z le champ complexe défini par $Z_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_x + i.V_x)$. Pour $x \in D$, soit Θ_x la forme différentielle aléatoire $|Z_x|^2 + d\phi_x \wedge d\bar{\phi}_x$, et τ_x la forme différentielle $\phi_x\bar{\phi}_x + d\phi_x d\bar{\phi}_x$.On a alors la correspondance suivante :

Théorème 3.3.

$$\mathbb{E}[1_{X_0=a, X_{\tau_F^-}=b} R(L)] = \mathbb{E}[\bar{Z}_a Z_b \daleth(R(\Theta))] = \int_{l^2_{\mathbb{C}}(D)} e^{-S_{\mathcal{E}}} R(\tau),$$

pour tout polynôme $R \in \mathbb{C}[Y_x, x \in D]$*, où* $S_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\phi) + \mathcal{E}(d\phi)$.

Remarque 3.1.
– *Cette expression caractérise la loi jointe des temps locaux* $(L_x)_{x\in D}$ *, pour voir des applications on pourra consulter [5] (théorème de grandes déviations et théorème de Ray-Knight en dimension 1).*
– *Une propriété importante de la forme* τ *et que pour tout polynôme* R*,*

$$\int_{l^2_{\mathbb{C}}(D)} e^{-S_{\mathcal{E}}} R(\tau) = R(0).$$

Ceci provient du fait suivant. Si H *désigne le champ de vecteur* $H(\phi_x) = -2i\pi\phi_x$*, soit* $Q = d + i_H$ *. Par théorème de Lie-Cartan, la dérivée de Lie de* H *est* $Q^{(2)} = d \circ i_H + i_H \circ d$*.* τ *et* $e^{-S_{\mathcal{E}}}$ *sont* Q*-exactes. Par théorème de Stokes, si* ω *est* Q*-exacte, alors* $\int \omega = 0$*. En physique théorique* ϕ *correspond à un champ bosonic tandis que* $d\phi$ *correspond à un champ fermionic , une forme* Q*-fermée est dite supersymétrique, et les intégrales ci-dessus sont dites mixtes.*

En combinant les égalité précédantes, on obtient la relation suivante :

$$\sum_{\omega\in S_{a,b}(D)} G(\omega) = \int_{l^2_{\mathbb{C}}(D)} e^{-S_{\mathcal{E}}} \bar{\phi}_b \phi_a \prod_{x\in D\setminus\{a,b\}} (1 + \tau_x).$$

Cette égalité est à la base des travaux de Gordon Slade et David Brydges [4], pour étudier la fonction génératrice du nombre de chemins auto-évitants, en dimension 4. Gordon Slade et Takashi Hara ont montré qu'en dimension ≥ 5, si $\omega(n)$ désigne la loi uniforme sur les chemins auto-évitants de longueur n, il existe une constante C telle que $(\frac{\omega(\lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{Cn}})_{t\geq 0}$ converge en loi vers le mouvement brownien.
La méthode utilisée est celle du groupe de renormalisation initialement introduite par Kogut et Wilson et développée par David Brydges (voir [1]). Elle consiste à décomposer décomposer le champ libre Φ sur $\mathbb{Z}^d$ en une somme de champs libres indépendants

$(\Phi_n)_{n\geq 0}$ sur des sous-graphes de $\mathbb{Z}^d$ dont les composantes connexes sont de volume plus petit que l^n. On étudie alors les espérance de fonctions du champ gaussien en conditionnant par rapport aux champs interagissants à distance plus grande que l^n. On obtient ainsi une suite d'opérateurs dont on veut trouver un point fixe et caractériser la vitesse de convergence.

Il est conjecturé qu'en dimension 4, $(\frac{\omega(\lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{Cn}\log(n)^{\frac{1}{8}}})_{t\geq 0}$ converge en loi vers le mouvement brownien.
Cependant, les seuls résultats montrés jusqu'à présent ([2]) portent sur un autre modèle appellé marche faiblement auto-évitante : à chaque chemin sur X on associe un poids qui pénalise le nombre d'intersections (ou le temps d'intersection si le chemin est indexé par un intervalle de temps). On mesure le temps d'intersection du processus $(X_t)_{0\leq t\leq T_F}$ par la quantité :

$$\int_{\mathbb{R}_+{}^2} 1_{X_t=X_s} dsdt = \sum_{x\in D} \int_{\mathbb{R}_+{}^2} 1_{X_t=X_s=x} dsdt = \sum_{x\in D} L_x^2.$$

A chaque marche discrète ω on associe le poids $\mathbb{E}[1_{(\hat{X}_t)_{0\leq t\leq T_F}=\omega} e^{-g\sum_{x\in D} L_x^2 + \lambda.T_F}]$, où $g>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(\hat{X}_t)_{0\leq t\leq T_F}$ est la marche à temps discret associée à $(X_t)_{0\leq 0\leq T_F}$.

L'introduction d'un temps continu permet d'avoir l'analogue de l'égalité pour la marche auto-évitante portant sur la somme des poids de toutes les marches :

$$\mathbb{E}_a[1_{X_{T_F^-}=b} e^{-g\sum_{x\in D} L_X^2 + \lambda}] = \int_{l^2_{\mathbb{C}}(D)} e^{-S_{\mathcal{E}_D}} \bar{\phi}_a \phi_b e^{-g\sum_{x\in D} \tau_x^2 + \lambda \tau_x}.$$

Le modèle à temps discret (appellé modèle de Domb-Joyce) a été beaucoup étudié, contrairement au modèle à temps continu sur un espace discret. Par exemple, j'ai montré dans mon mémoire que le membre de gauche tend bien vers la somme des poids des chemins auto-évitants quand g et λ tendent vers l'infini avec λ de l'ordre de $\sqrt{g\log(g)}$.

Références

[1] D. Brydges. Lectures on the Renormalisation Group, à paraître dans PCMI Lecture Series.

[2] David C. Brydges, Steven N. Evans, and John Z. Imbrie. Self-avoiding walk on a hierarchical lattice in four dimensions. *The Annals of Probability*, 20(1) :82–124, 1992.

[3] David C. Brydges, John Z. Imbrie, and Gordon Slade. Functional integral representations for self-avoiding walk. *Probability Surveys*, 6 :34–61, 2009.

[4] David C. Brydges and Gordon Slade. Papier en préparation.

[5] D.C. Brydges, Remco Van der Hofstad, and Wolfgang Konig. Joint density for the local times of continuous-time markov chains. *The Annals of Probability*, 35(4) :1307–1332, 2007.

[6] Gregory F.Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal invariance of planarloop-erased random walks and uniform spanning trees. *The Annals of Probability*, 32(1B), 2004.

[7] Yves Le Jan. Markov paths, loops and fields. *preprint arXiv :0808.2303v3*.

[8] Yves Le Jan. Temps local et superchamps. *Lecture Notes in Mathematics*, 1247 :176–190, 1987.

[9] R. Lyon, Y. Peres, I. Benjamini, and O. Schramm. Uniform spanning forests. *The Annals of Probability*, 29(1) :1–65, 2001.

[10] R. Lyons. Determinantal probability measures. *Publications Mathématiques de L'IHÉS*, 98(1) :167–212.

[11] Tomoyuki Shirai and Yoichiro Takahashi. Random point fields associated with certain fredholm determinants i : fermion, poisson and boson point processes. *Journal of Functional Analysis*, 205 :414–463, 2003.

[12] Gordon Slade and Neal Madras. *The Self-Avoiding Walk*. Birkhäuser.