Introduction au thème de recherche :

homogénéisation de lois de conservation scalaires

Anne-Laure Dalibard

Sous la direction de Pierre-Louis Lions

CEREMADE

Université Paris IX - Dauphine

On s'intéresse ici à des équations aux dérivées partielles, appelées lois de conservation scalaires (équations de continuité en physique), qui traduisent la conservation locale, et *a fortiori* globale d'une certaine grandeur physique (quantité de mouvement ou énergie d'une particule dans un fluide, densité d'un gaz, etc.) La particularité de notre étude vient de ce que le milieu dans lequel on considère l'évolution temporelle de cette grandeur comporte de fortes hétérogénéités (e.g. changement rapide de densité du fluide dans lequel évolue la particule, juxtaposition de plusieurs matériaux très "rapprochés", etc.) Notre but est de décrire l'évolution du système lorsque la taille des hétérogénéités tend vers 0 : en particulier, on aimerait parvenir à exhiber un nouveau milieu dit "homogénéisé", ainsi que les équations de conservation de la grandeur étudiée dans ce milieu.

Dans une première partie, on donnera quelques définitions et résultats utiles sur les lois de conservations scalaires. On explique ensuite comment modéliser les milieux hétérogènes et une méthode générale pour trouver le problème limite dans le cadre de la théorie mathématique de l'homogénéisation. Dans une troisième partie, on applique, sans succès, cette méthode aux lois de conservation scalaires : il faudrait à présent arriver à comprendre le problème homogénéisé formel auquel on arrive.

1 Quelques notions sur les lois de conservation scalaires

Une loi de conservation scalaire (L.C.S.) est une équation du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,u) = 0, \tag{1}$$

où les $A_i : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières données, dont la dépendance en x rend compte du milieu extérieur.

$u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue, qui dépend des variables de temps t et d'espace x. Elle représente la "grandeur conservée" : densité de masse, d'énergie... Les physiciens parlent de grandeur *intensive*.

Définition 1. *Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On dit que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N))$ est solution faible de la loi de conservation scalaire* (1) *avec comme donnée initiale u_0 si u vérifie l'équation* (1) *au sens des distributions et si*

$$u(t=0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pour essayer de comprendre la signification de cette équation, intégrons-la sur un domaine $V \subset \mathbb{R}^N$ régulier et borné : en utilisant la formule de Stokes, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_V u(t,x)\, dx = \int_{\partial V} A(x,u(t,x)) \cdot n(x)\, dS(x),$$

où $n(x) \in \mathbb{R}^N$ est la normale sortante au volume V. Imaginons par exemple que u est une densité de masse; on lit sur ce bilan que le flux sortant du volume V

$$\int_{\partial V} A(x,u(t,x)) \cdot n(x)\, dS(x)$$

est la masse qui sort du volume V par unité de temps, d'où le terme “conservation”.

Exemple : le trafic routier est bien décrit par une loi de conservation scalaire en dimension 1 ($N=1$) :

- La route est représentée par une droite, sur laquelle la position des véhicules est notée x ($x \in \mathbb{R}$);
- $u(t,x)$: densité des véhicules à la position x de la route;
- $A(x,u) = u\, v(x,u)$, où $v(x,u)$ est la vitesse des véhicules à la position x de la route lorsque le trafic a la densité u.

La modélisation de particules dans un fluide (par exemple du pétrole dans la mer) donne la même équation : $v(x,u)$ est alors la vitesse du fluide (vitesse des courants marins) modifiée par la présence des particules.

Par ailleurs, en intégrant l'équation (1) sur tout l'espace, on obtient formellement :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\; dx = 0$$

Par conséquent, on s'attend à ce que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\; dx = \text{constante} = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\; dx. \tag{2}$$

Sous certaines conditions, cette équation sera vérifiée pour u solution de (1); elle est appelée équation de conservation de la masse.

On pourrait s'interroger sur la conservation (ou la décroissance) éventuelle d'autres quantités dépendant de u; de fait, si on multiplie l'équation (1) par $S'(u)$, où $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on trouve, si u est régulière :

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta_i(x,u)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(x,u) S'(u) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}(x,u) = 0, \tag{3}$$

où η_i est défini par :

$$\eta_i(x,v) = \int_0^v a_i(x,v')S'(v')\; dv' \tag{4}$$

et

$$a_i(x,v) = \frac{\partial A_i(x,v)}{\partial v}.$$

Précision sur les notations : comme u dépend de x, $\frac{\partial \eta_i(x,u)}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}(x,u)$ ne représentent pas la même quantité. Si u est régulière, on peut dériver la fonction composée $\eta_i(x,u)$ et on a la relation suivante entre les deux expressions :

$$\frac{\partial \eta_i(x,u(t,x))}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}(x,u(t,x)) + \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\frac{\partial \eta_i}{\partial v}(x,u(t,x)).$$

Mais comme une solution faible d'une L.C.S. n'est pas régulière en général, une telle relation n'existe pas et il n'y a pas de simplification possible entre ces deux termes.

L'égalité (3) conduit à la définition suivante :

Définition 2. *On dit qu'une solution faible* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+,L^\infty(\mathbb{R}^N))$ *de l'équation* (1) *est une solution entropique si elle vérifie l'inégalité d'entropie suivante, pour tout fonction convexe* S *:*

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta_i(x,u)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(x,u) S'(u) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}(x,u) \leq 0. \tag{5}$$

Le signe de l'inégalité précédente peut être expliqué par la méthode de viscosité évanescente (voir [2]): on approche la loi de conservation scalaire (1) par une équation parabolique

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,u^\varepsilon) - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0. \tag{6}$$

Le terme de viscosité $\varepsilon \Delta u^\varepsilon$ a tendance à régulariser les solutions de (6); ainsi, partant d'une donnée initiale suffisamment régulière, on peut montrer que (6) possède une unique solution régulière.

À présent, si on multiplie (6) par $S'(u^\varepsilon)$, où S est une entropie convexe, $S \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(u^\varepsilon)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta_i(x,u^\varepsilon)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(x,u^\varepsilon) S'(u^\varepsilon) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}(x,u^\varepsilon) & \\ = \varepsilon \Delta S(u^\varepsilon) - \varepsilon S''(u^\varepsilon)(\nabla u^\varepsilon)^2 & \\ \leq \varepsilon \Delta S(u^\varepsilon). & \end{aligned}$$

On suppose que u^ε converge (fortement dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}^N))$ par exemple) vers une fonction u qui sera donc une solution faible de (1). Le terme $\varepsilon \Delta S(u^\varepsilon)$ tend vers 0 au sens des distributions, et u vérifie alors l'inégalité entropique (5) au sens des distributions.

Un des intérêts de la condition (5), d'un point de vue mathématique, est d'assurer l'unicité des solutions des lois de conservation scalaires, et ainsi de sélectionner les "bonnes" solutions physiques. Bien que l'équation (1) admette en général plusieurs solutions faibles, elle ne possède qu'une seule solution entropique pour une condition initiale donnée, solution que l'on retiendra par la suite.

Pour démontrer ce résultat, on se limite à une famille particulière d'entropies, dites entropies de Kruzkhov : $S(u) = |u-k|$, $k \in \mathbb{R}$. On montre que si $u,v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}^N))$ sont des solutions entropiques de la loi de conservation scalaire (1), alors l'inégalité suivante est vérifiée au sens des distributions :

$$\frac{\partial}{\partial t}|u-v| + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\operatorname{sgn}(u-v)(A_i(x,u) - A_i(x,v))\right) \leq 0, \tag{7}$$

Cette inégalité fait apparaître la norme L^1 comme la "bonne" norme pour l'étude des lois de conservation scalaires; en général, ce sera la seule norme conservée par l'équation. Par ailleurs, l'inégalité (7) fournit l'unicité des solutions entropiques : en effet, si on intègre (7) sur $\mathbb{R}^N$ et entre $t = 0$ et $t = T > 0$, on obtient :

$$||u(T) - v(T)||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq ||u_0 - v_0||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

On donne à présent un théorème d'existence et d'unicité pour les solutions de la loi de conservation scalaire (1); les conditions de régularité sur A que l'on a prises ici ne sont pas optimales, mais cette question sort de notre propos. La démonstration de ce résultat suit de près celle de [1].

Théorème 1. *Soit* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Si $A \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^{N+1})$, *il existe une unique solution entropique* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^N))$ *au problème* (1) *avec comme donnée initiale* $u(t=0) = u_0$. *Cette solution vérifie l'équation de conservation de la masse.*

De plus, deux solutions entropiques u *et* v *de données initiales respectives* u_0 *et* v_0 *obéissent au principe de contraction dans* L^1 *:*

$$||u(t) - v(t)||_{L^1} \leq ||u_0 - v_0||_{L^1} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Remarque : on pourrait s'interroger quant au peu de régularité exigée sur les solutions. Si on part d'une donnée initiale très régulière (dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour fixer les idées), la solution entropique correspondante sera-t-elle régulière? La réponse est négative si on considère des solutions globales en temps, i.e. définies sur $\mathbb{R}_+$. On montre que sous certaines hypothèses assez générales sur le flux A, il se forme des chocs (c'est-à-dire des discontinuités) en temps fini. La solution ne restera donc régulière que sur un petit intervalle de temps, ce qui impose de ne considérer que des solutions dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

2 Notions sur l'homogénéisation

2.1 Modélisation

La théorie de l'homogénéisation s'est essentiellement développée ces trente dernières années, dans le but de décrire mathématiquement les propriétés des matériaux composites; ces matériaux sont composés d'au moins deux substances différentes intimement mêlées, par exemple un corps principal dans lequel sont disséminées de petites particules dont la taille est très petite devant une distance caractéristique du milieu. Le rapport entre ces deux longueurs typiques est noté ε.

L'intérêt pour de telles structures s'explique par les propriétés physiques macroscopiques particulières qu'elles présentent : par exemple, la conduction de la chaleur ou du courant électrique s'effectueront différemment, et parfois "mieux" que dans chacun des deux constituants homogènes pris séparément en raison de leur juxtaposition au niveau microscopique. De nombreuses applications industrielles tirent parti de ces propriétés "améliorées", par exemple la supraconductivité des composites multifilamentaires (voir [4]). Le but de la théorie de l'homogénéisation est justement de décrire les propriétés moyennes des matériaux au niveau macroscopique en tenant compte de leur arrangement microscopique.

On considère donc un milieu fortement hétérogène, dans lequel on veut étudier la loi de conservation scalaire décrite précédemment. On modélise ce problème en supposant que les hétérogénéités sont réparties périodiquement, et on découpe ainsi le milieu en des cubes, appelés cellules, translatés du cube de référence εY, où $Y = \Pi_{i=1}^{N}(0,T_i)$. Le même motif se répète de cellule en cellule (voir la figure 1). Dans toute la suite, on note Ω le domaine étudié ($\Omega = \mathbb{R}^N$ dans le cas des lois de conservation scalaires).

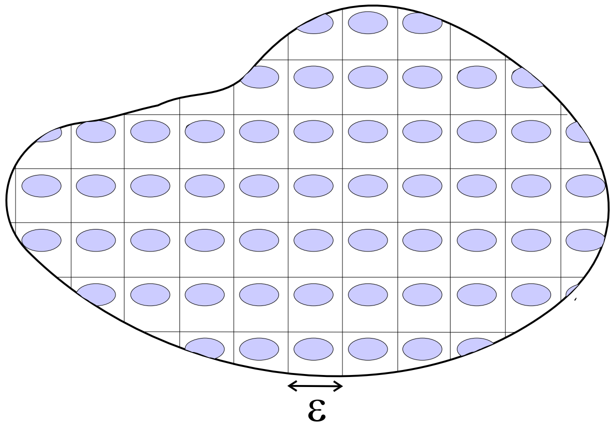

FIG. 1 – *Modélisation du milieu*

Les données du problème qui dépendent du milieu extérieur Ω seront donc de la forme $f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, avec $x \in \Omega$, et f Y-périodique : si on suppose que f est continue, cela signifie que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $k = (k_1, \cdots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$,

$$f(y_1 + k_1 T_1, \cdots, y_N + k_N T_N) = f(y).$$

Dans toute la suite, pour une fonction f Y-périodique, on note $< f >_Y$ la moyenne de f sur Y :

$$< f >_Y := \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y)\, dy.$$

Par exemple, dans le cas de la loi de conservation scalaire (1), l'équation à considérer devient, à $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon\right) = 0, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon, \end{array} \right. \tag{9}$$

où $A(y,u)$ est Y-périodique en y pour tout $u \in \mathbb{R}$, $A \in W^{2,\infty}(Y \times \mathbb{R})$, et u_0^ε est une famille de fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Grâce au théorème 1, on sait que à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une unique solution entropique $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^N))$ du système (9).

2.2 Position du problème

Le but est de trouver le "problème homogénéisé", autrement dit de décrire le comportement de u^ε lorsque ε tend vers 0.

Schématiquement, on a une famille d'équations

$$A^\varepsilon u^\varepsilon = 0,$$

où $(A^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est, dans notre cas, une famille d'opérateurs différentiels. On voudrait arriver à un résultat du type

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} u$$

(dans un sens à préciser et éventuellement à une sous-suite près) où u est solution d'un problème de la forme

$$Au = 0,$$

l'idéal étant que A soit un opérateur differentiel "du même genre" que la famille $(A^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (par exemple un opérateur elliptique si $(A^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille d'opérateurs elliptiques, etc.)

2.3 Exemple : équations elliptiques

Pour préciser un peu ce que l'on vient de dire, on donne un exemple de résultat classique en théorie de l'homogénéisation (voir [3, 5]): on considère, dans un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, une famille $(A^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ d'opérateurs uniformément elliptiques : on se donne des fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq i,j \leq N)$, Y-périodiques, et qui vérifient l'inégalité

$$a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ p.p. } y \in Y.$$

On se donne aussi $f \in L^2(\Omega)$ et $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, Y-périodique et telle que

$$a_0(y) \geq \alpha_0 > 0 \quad \text{p.p. } y \in Y.$$

On considère alors, à $\varepsilon > 0$ fixé, la solution $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) + a_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon = f. \tag{10}$$

On montre grâce à la coercivité de l'opérateur différentiel que la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. À une sous-suite près, il existe donc $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} u \quad w - H_0^1(\Omega).$$

De plus, on peut montrer que u est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de l'équation

$$-\bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \bar{a}_0 u = f, \tag{11}$$

où

$$\bar{a}_0 := \frac{1}{|Y|}\int_Y a_0,$$
$$\bar{a}_{ij} := \frac{1}{|Y|}\int_Y a_{ij} - a_{ik}\frac{\partial \chi_j}{\partial y_k},$$

et pour $1 \leq j \leq N$, χ_j est l'unique solution à une constante additive près dans $H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ (i.e. dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et Y-périodique) de

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}(y)\frac{\partial \chi_j}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}.$$

On arrive bien au résultat souhaité : u^ε converge vers une fonction u qui est solution du même type de problème que u^ε. Cependant, on remarque que les coefficients de l'équation, les $\bar{a}_{ij}$, ne se réduisent pas au terme dit "de mélange"

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y a_{ij};$$

la présence du terme correcteur

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y a_{ik}\frac{\partial \chi_j}{\partial y_k}$$

rend compte des inhomogénéités du milieu.

2.4 Méthode générale pour trouver le problème homogénéisé

Une méthode pour trouver le problème homogénéisé, i.e. l'opérateur A, est de postuler un développement asymptotique multi-échelles en puissances de ε pour la solution u^ε: on utilise "l'Ansatz" suivant (voir par exemple [3]):

$$u^\varepsilon(t,x) = u^0\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u^2\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots,$$

où chaque $u^i(t,x,y)$ est Y-périodique en y.

On injecte alors ce développement dans l'équation vérifiée par u^ε, et on identifie les puissances de ε en utilisant la règle de calcul suivante : pour $f = f(x,y)$ régulière Y-périodique,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y_i}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On obtient alors des équations sur u^0, u^1, etc. Tous ces calculs étant formels, il faut, dans un second temps, démontrer que la suite u^ε "converge" effectivement (dans un sens à déterminer) vers $u^0(t,x,y)$, où u^0 est la solution (si elle existe) des équations trouvées grâce au développement formel. Par exemple, il faut montrer que

$$\left\|u^\varepsilon(t,x) - u^0\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}^N))} \to 0.$$

Nous allons à présent appliquer la méthode décrite précédemment aux lois de conservation scalaires; comme on le verra, ce procédé se solde par un échec relatif. Le travail consistera par la suite à donner un sens aux solutions du problème homogénéisé, puis à établir une preuve de convergence.

3 Échec de la méthode pour les lois de conservation scalaires

On applique à l'équation (9) la méthode décrite dans la deuxième partie.

En identifiant les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans l'équation, on trouve le "problème de la cellule" (les seules dérivées qui apparaisent sont des dérivées en y; (t,x) sont donc des paramètres de l'équation, que l'on considère dans une cellule Y, d'où le nom donné à l'équation) :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(A_i(y,u^0(t,x,y))\right) = 0. \tag{12}$$

L'identification des termes d'ordre ε^0 donne l'équation d'évolution sur u^0 :

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(y,u^0) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_i(y,u^0)u^1\right). \tag{13}$$

La forme de l'équation (12) laisse penser que u^0 peut se mettre sous la forme

$$u^0(t,x,y) = \bar{u}(t,x) + \tilde{u}(y,\bar{u}(t,x)),$$

où $\tilde{u}$ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_i} A_i(y,p+\tilde{u}(y,p)) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}, \\ <\tilde{u}>_Y = 0. \end{cases} \tag{14}$$

En prenant la moyenne sur Y de l'équation (13), on trouve l'équation vérifiée par $\bar{u}$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \bar{A}_i(\bar{u})}{\partial x_i} = 0, \tag{15}$$

où

$$\bar{A}_i(p) =< A_i(\cdot,p+\tilde{u}(\cdot,p)) >_Y .$$

À première vue, on est parvenu à un résultat satisfaisant, puisque la limite supposée de u^ε vérifie une équation du même type, à savoir une loi de conservation scalaire; on remarque que même à l'ordre 0, la partie oscillante (i.e. qui dépend de y) n'est pas nulle. L'influence de l'hétérogénéité du milieu se voit donc dès les premiers termes.

Malheureusement, tout ce que nous venons de faire est purement formel : on ne sait même pas quel sens donner à des solutions éventuelles de (12) ou de (14), et il est donc hors de question pour l'instant de faire la moindre preuve de convergence. La première étape vers l'homogénéisation de lois de conservation scalaires serait donc de montrer l'existence de solutions de (14), pour ensuite essayer d'établir une preuve de convergence.

Références

[1] Benoît Perthame, *Kinetic Formulation of Conservation Laws*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **21**, Oxford University Press (2002).

[2] Benoît Perthame, *Équations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques, théorie et méthodes numériques*, cours donné au DEA d'Analyse numérique de Paris 6 en 2003-2004.

[3] Alain Bensoussan, Jacques-Louis Lions, George Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures,* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[4] D. Cioranescu, P. Donato, *An Introduction to Homogenization,* Oxford University Press, 1999.

[5] V.V. Jikov, S.M. Kozlov et O.A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.