# Mesures sur la sphère et harmoniques sphériques

Jeremy Daniel et Martin Puchol

22 septembre 2009

## Introduction

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Le groupe $SO(n)$ des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ agit naturellement sur la sphère unité $\mathbb{S}_{n-1}$ de cet espace. Nous nous proposons dans cet exposé d'étudier différents aspects de cette action de groupe.

Un groupe agissant sur un ensemble agit aussi par précomposition sur les fonctions numériques définies sur cet ensemble. Nous consacrons ainsi une partie de cet exposé à l'étude (non exhaustive) de l'action de $SO(n)$ sur un espace fonctionnel sur la sphère : l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_{n-1})$ des fonctions complexes de carré intégrable pour la mesure de probabilité *naturelle* sur $\mathbb{S}_{n-1}$. Comme $SO(n)$ préserve cette mesure, il agit continûment sur cet espace de Hilbert par automorphismes unitaires. Une question intéressante est alors de savoir si cette représentation est irréductible. Bien que les représentations irréductibles de $SO(n)$ soient classées (voir par exemple [FH]), nous n'étudierons pas cette question mais nous exhiberons une décomposition de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_{n-1})$ en sous-espaces irréductibles. Cette décomposition est remarquable car elle est non seulement élémentaire et explicite, mais elle est de plus intimement liée aux propriétés spectrales du laplacien sur la sphère.

La première partie de cet exposé consiste à prouver l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité borélienne invariante par les rotations sur $\mathbb{S}_{n-1}$. Nous profitons de cette étude sur les mesures pour digresser sur les mesures finiment additives : leur lien étroit avec les groupes libres est à l'origine d'une décomposition surprenante de la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ : c'est le fameux paradoxe de Banach-Tarski.

La deuxième partie regroupe quelques formules d'intégration et calculs sur le laplacien utiles pour la suite.

La troisième partie débute par l'introduction élémentaire de l'opérateur laplacien de la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$. Nous en donnerons sa décomposition spectrale et nous montrerons le lien qui unit cette décomposition à celle sus-citée. Ce lien peut se deviner au vu des remarquables propriétés de commutation du laplacien et des rotations. Nous introduirons ensuite une famille de polynômes dits *sphériques*. Ces polynômes sont en lien avec la décomposition spectrale du laplacien car ils permettent d'engendrer (en un sens à préciser) les espaces propres du laplacien. Pour finir, nous étudierons certaines propriétés de ces polynômes et les relierons aux propriétés d'une classe plus générale d'opérateurs définis sur l'ensemble des fonctions numériques continues sur la sphère.

Nous remercions Frédéric Paulin pour sa disponibilité, son investissement méticuleux dans notre travail et le soutien qu'il nous a apporté tout au long de la rédaction de cet exposé ; ainsi que Catherine Kikuchi et Silvain Rideau pour leur relecture attentive.

## Table des matières

# 1 Mesures sur la sphère

## 1.1 Théorèmes préliminaires

Avant d'entreprendre la construction de la mesure usuelle sur la sphère, nous avons besoin de deux théorèmes.

**Définition 1.1.** (mesure extérieure) On appelle *mesure extérieure* sur un ensemble X toute fonction $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0; +\infty]$ vérifiant

$$\begin{cases} \mu^*(\emptyset) = 0, \\ si\ A \subset B\ alors\ \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B), \\ si\ (A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}\ alors\ \mu^*(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \end{cases}$$

Si $\mu^*$ est une mesure extérieure, on notera

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{B \in \mathcal{P}(X)\ :\ \forall A \in \mathcal{P}(X),\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)\}$$

l'ensemble des parties de $X$ dites $\mu^*$-mesurables.

**Théorème 1.2.** *L'ensemble $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est une tribu et la restriction de $\mu^*$ à $\mathcal{M}_{\mu^*}$ est une mesure sur $\mathcal{M}_{\mu^*}$.*

*Démonstration.* Voir [Co] théorème 1.3.4. □

**Théorème 1.3.** (Riesz) *Soit $X$ un espace localement compact, et $I$ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ (espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes sur $X$ et à support compact). Alors il existe une unique mesure borélienne $\mu$ telle que*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X),\ \ I(f) = \int f d\mu\,.$$

*De plus cette mesure est régulière. On identifiera donc dorénavant les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(X)$ et les mesures positives boréliennes régulières sur X.*

*Démonstration.* Voir [Co] théorème 7.2.8. □

## 1.2 Existence et unicité d'une mesure invariante

**Définition 1.4.** (mesure invariante) Soit $G$ un groupe agissant continûment sur un espace topologique $X$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Une mesure borélienne $\mu$ sur $X$ est invariante par $G$ si

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), \forall g \in G,\ \ \mu(g.A) = \mu(A)\,.$$

Dans ce paragraphe, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une mesure borélienne de probabilité sur la sphère invariante par les rotations. Nous donnerons à la fois des arguments abstraits liés à la mesure de Haar et pouvant s'adapter à des situations plus générales et d'autres plus simples utilisant davantage certaines propriétés de la sphère. Quand ce n'est pas explicite, toutes les mesures considérées dans ce paragraphe sont boréliennes.

### 1.2.1 Mesure de Haar sur les groupes localement compacts

**Définition 1.5.** Soit $G$ un groupe localement compact. On appelle *mesure de Haar à gauche* sur $G$ toute mesure borélienne non nulle $\mu$ sur $G$ telle que

$$\forall x \in G, \forall A \in \mathcal{B}(G),\ \mu(xA) = \mu(A).$$

**Théorème 1.6.** (existence) *Si $G$ est un groupe localement compact, alors il existe une mesure de Haar à gauche sur $G$.*

*Démonstration.* Nous n'exposons ici que les grands traits de la preuve ; pour les détails, on pourra se reporter à [Co], théorème 9.2.1.

- On commence par construire une mesure extérieure sur $G$.
  Soit $V$ un voisinage de $e$. Pour $K$ compact, on note $\#(K:V)$ l'entier $k \geqslant 1$ minimal tel qu'il existe $x_1, ..., x_k$ tels que $K \subset \bigcup_i x_i V$ . On fixe $K_0$ un voisinage compact de $e$, compact servant de référence pour mesurer les autres. On pose enfin, pour $U$ voisinage ouvert de $e$, $h_U(K) = \frac{\#(K:U)}{\#(K_0:U)}$. Notre mesure extérieure sera une "limite" de $h_U$ quand U devient "petit".
- On montre que $h_U$ est invariante à gauche ($h_U(xK) = h_U(K)$) et que pour tout K compact de G, nous avons $h_U(K) \in I_K := [0; \#(K:K_0)]$. Si $X = \prod_{K \in \mathcal{C}} I_K$ , où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des compacts de $G$ alors l'espace topologique produit $X$ est compact par le théorème de Tychonoff.
  Pour tout voisinage ouvert $V$ de $e$ , soit

  $$S(V) = \overline{\{h_U\ :\ U \in \mathcal{U} \text{ et } U \subset V\}}.$$

  où les applications $h_U$ sont vues comme des éléments de $X$ et où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des voisinages ouverts de $e$. Comme $X$ est compact, on a alors $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V) \neq \emptyset$ car sinon il existe $n$ et $V_1, ..., V_n \in \mathcal{U}$ tels que $\bigcap_{i=1}^n S(V_i) = \emptyset$ , ce qui est absurde étant donné que $h_{\bigcap_{i=1}^n V_i} \in \bigcap_{i=1}^n S(V_i)$.
  Soit donc $h \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V)$ : ce sera notre "limite".
- Certaines propriétés de $h$ montrent alors que l'on peut définir $\mu^*$ par

  $$\mu^*(U) = \sup\{h(K)/K \subset U \text{ et } K \in \mathcal{C}\} \text{ si } U \text{ ouvert}$$
  $$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U)/A \subset U \text{ et } U \text{ ouvert}\} \text{ si } A \subset G$$

  et que c'est une mesure extérieure non nulle sur $G$.
- On montre que les ouverts sont dans $\mathcal{M}_{\mu^*}$ et que $\mu := \mu^*_{|\mathcal{M}_{\mu^*}}$ est finie sur les compacts et est invariante à gauche (propriété transmise des $h_U$ à $h$ puis de $h$ à $\mu$). □

**Théorème 1.7.** (unicité) *Si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures de Haar à gauche sur $G$, alors il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\nu = c\mu$.*

*Démonstration.* De nouveau les détails sont dans [Co] théorème 9.2.3.
On utilise d'abord le lemme suivant : si $U$ est un ouvert non vide, alors $\mu(U) \neq 0$ et si $g \in \mathcal{C}_c(G)$ est non nulle et positive alors $\int g d\mu > 0$.

On considère une fonction $g$ comme ci-dessus et $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Nous allons montrer que le quotient $\frac{\int f\,d\mu}{\int g\,d\mu}$ (qui existe par ce qui précède) ne dépend pas de la mesure $\mu$ et donc que

$$\frac{\int f\,d\mu}{\int g\,d\mu} = \frac{\int f\,d\nu}{\int g\,d\nu}\,.$$

Alors si $c = \frac{\int g\,d\nu}{\int g\,d\mu}$, pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$ nous avons $\int f\,d\nu = c\int f\,d\mu$. Donc par le théorème de représentation de Riesz, $\nu = c\mu$.

Revenons à notre quotient $\frac{\int f\,d\mu}{\int g\,d\mu}$ : pour $h \in \mathcal{C}_c(G \times G)$ , nous avons

$$\begin{aligned}\iint h(x,y)\,d\nu(y)d\mu(x) &= \iint h(x,y)\,d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \iint h(y^{-1}x,y)\,d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \iint h(y^{-1},xy)\,d\mu(x)d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

En appliquant cette identité à la fonction $h : (x,y) \mapsto \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx)\,d\nu(t)}$ nous trouvons :

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int g(x)\,d\mu(x)\int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})\,d\nu(t)}d\nu(y)$$

et donc $\frac{\int f\,d\mu}{\int g\,d\mu}$ ne dépend pas de la mesure $\mu$ , ce qui conclut la preuve. □

Le théorème suivant, faux dans le cas des groupes localement compacts généraux, utilise abondamment le résultat d'unicité précédent.

**Théorème 1.8.** *Si $G$ est un groupe compact, une mesure invariante à gauche sur $G$ est aussi invariante à droite.*

*Démonstration.* Soit $\mu$ une mesure invariante à gauche sur $G$ (que nous pouvons supposer non nulle) et $t \in G$. Pour toute application $f : G \to \mathbb{C}$, on pose $ft : x \mapsto f(xt^{-1})$ et $tf : x \mapsto f(t^{-1}x)$. On définit une mesure $\nu$ en tant que forme linéaire positive par $\nu(f) = \mu(ft)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$. On a alors que $\nu$ est invariante à gauche car pour tout $s \in G$ et $f \in \mathcal{C}_c(G)$, nous avons $\nu(sf) = \mu((sf)t) = \mu(s(ft)) = \mu(ft) = \nu(f)$. Donc par unicité il existe $\Delta(t) > 0$ tel que $\nu = \Delta(t)\mu$. L'application $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes continu : en effet on a pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$ et $s,t \in G$ :

$$\begin{aligned}\Delta(st)\int f(x)\,d\mu(x) &= \int f(xt^{-1}s^{-1})\,d\mu(x)\\ &= \Delta(s)\int f(xt^{-1})\,d\mu(x)\\ &= \Delta(s)\Delta(t)\int f(x)\,d\mu(x)\,.\end{aligned}$$

Si on choisit de plus $f$ telle que $\int f(x)\,d\mu(x) = 1$ on obtient :

– $\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t)$ pour $s,t$ quelconques,

– avec de plus $t = e$ on a $\Delta(s) = \int f(xs^{-1})\, d\mu(x)$ qui est bien une fonction continue de $s$ car $f \in \mathcal{C}_c(G)$.

Donc $\Delta(G)$ est un compact de $\mathbb{R}_+^*$ nécessairement réduit à $\{1\}$ (car si $\Delta(g) \neq 1$ on a $\Delta(g^n) \to 0$ ou $+\infty$ ce qui est absurde). Donc pour tout $t \in G$, $\mu(ft) = \mu(f)$ et $\mu$ est bien invariante à droite. $\square$

### 1.2.2 Constructions d'une mesure invariante sur la sphère

**Théorème 1.9.** *Il existe sur la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ une mesure de probabilité invariante par les rotations.*

*Démonstration.* On peut procéder de différentes manières :

– On peut utiliser les résultats sur la mesure de Haar. Soit $\mu$ la mesure de Haar à gauche et de masse 1 sur $SO(n)$ (d'après le théorème précédent, c'est aussi une mesure de Haar à droite car $SO(n)$ est compact). En considérant l'application continue $\phi$ de $SO(n)$ dans la sphère qui à $g$ associe $gx_0$ où $x_0$ est un point quelconque de la sphère, on peut pousser la mesure en avant par $\phi$ et la mesure $\nu$ obtenue convient. En effet pour tout $g \in SO(n)$ et pour tout $A$ borélien de $\mathbb{S}_{n-1}$, on a : $\nu(gA) = \mu(\phi^{-1}(gA)) = \mu(g\phi^{-1}(A)) = \mu(\phi^{-1}(A)) = \nu(A)$, la deuxième égalité résultant de l'équivariance de $\phi$. Ceci prouve l'invariance de $\nu$ par les rotations.

– On peut pousser en avant la mesure de Lebesgue $\lambda$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ (convenablement restreinte) par l'application $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ : la mesure-image $\nu$ sur la sphère est alors donnée par $\nu(A) = \lambda(c(A))$ où $c(A)$ est le demi-cône engendré par $A$ :

$$c(A) = \{tx \ : \ t \in ]0,1] \text{ et } x \in A\}.$$

La mesure de Lebesgue étant invariante par les rotations, il en est de même de $\nu$. De plus $\nu$ est de masse finie ; quitte à normaliser, c'est une mesure de probabilité.

– On peut enfin considérer la mesure normalisée associée à la forme différentielle lisse

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

sur la variété différentielle lisse orientée $\mathbb{S}_{n-1}$. La mesure obtenue est bien invariante car $\omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$ pour tous $x \in \mathbb{S}_{n-1}$ et $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_x\mathbb{S}_{n-1}$ et donc si $\phi$ est une rotation, $\phi$ est restriction d'une application linéaire, $d_x\phi = \phi$ et $(\phi^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det(\phi(x), \phi(v_1), \ldots, \phi(v_{n-1})) = \det(\phi)\det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$ c'est-à-dire $\phi^*\omega = \omega$. $\square$

### 1.2.3 Preuves d'unicité

**Théorème 1.10.** (Weil) *Soit $G$ un groupe compact et $H$ un sous-groupe fermé de $G$. Il existe au plus une mesure de probabilité sur $G/H$ invariante par l'action de $G$.*

*Démonstration.* Pour un énoncé et une preuve dans le cadre plus général des groupes localement compacts, on se reportera à [Na], théorème 1, chapitre $III$.
Dans le cas des groupes compacts, la démonstration est plus aisée. Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $G/H$ invariante par l'action par translations à gauche de $G$.

Soit $\lambda$ l'unique mesure de Haar de masse 1 sur le groupe compact $H$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G) = \mathcal{C}(G)$, l'application $F : x \in G \mapsto \int f(xh)\, d\lambda(h)$ est continue et est constante sur les classes modulo $H$ par invariance de $\lambda$. Ainsi $F$ passe au quotient en une application continue notée $\bar{f} : G/H \to \mathbb{C}$. En identifiant mesure et forme linéaire positive, on définit une mesure $\nu$ sur $G$ par $\nu(f) = \mu(\overline{f})$ pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$.

En notant $g \cdot f : x \mapsto f(gx)$, on a

$$\nu(g \cdot f) = \mu(\overline{g \cdot f}) = \mu(g \cdot \overline{f}) = \mu(\overline{f}) = \nu(f),$$

la deuxième égalité venant de ce que $\overline{g \cdot f} = g \cdot \overline{f}$, ce qui est immédiat.
L'application $\nu$ est donc une mesure de Haar de masse 1 sur $G$ ; elle est donc entièrement déterminée. De plus $\nu$ détermine $\mu$ : si $h \in C(G/H)$, on a $\overline{f} = h$ où si $\pi : G \to G/H$ est la projection canonique, $f(x) = h(\pi(x))$. Il y a donc au plus une mesure de probabilité sur $G/H$ invariante par l'action par translation à gauche de $G$. □

**Théorème 1.11.** (unicité) *Sur la sphère, deux mesures de probabilité invariantes par les rotations sont égales.*

*Démonstration.* Deux arguments sont possibles :

– On peut voir la sphère comme le quotient de $SO(n)$ par le stabilisateur du dernier vecteur $e_n$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, isomorphe à $SO(n-1)$. Le théorème de Weil permet de conclure dans le cas de ce groupe quotient. Il suffit donc de vérifier que l'homéomorphisme $\phi : SO(n)/SO(n-1) \to \mathbb{S}_{n-1}$ est équivariant pour les actions de $SO(n)$ à la source et au but. Or $\phi$ est induite par $\psi : g \mapsto \ ge_n$ de $SO(n)$ dans $\mathbb{S}_{n-1}$. Si $g, x \in SO(n)$, en notant $\overline{y}$ la classe à droite modulo $SO(n-1)$ d'un élément $y$ de $SO(n)$,

$$g\phi(\bar{x}) = g\psi(x) = g(xe_n) = (gx)e_n = \psi(gx) = \phi(\overline{gx}) = \phi(g\bar{x}).$$

– On peut aussi utiliser le fait que les mesures de probabilité $\mu$ sur $\mathbb{R}^n$ sont caracterisées par leur fonction caractéristique ([LeG]) :

$$\hat{\mu} : \xi \in \mathbb{R}^n \to \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} d\mu(x).$$

Si $\mu$ est invariante et à support inclus dans $\mathbb{S}_{n-1}$, alors pour toute rotation $\phi$, on a

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\xi) &= \int e^{i\xi \cdot \phi^{-1}(x)} d\mu(x) \\ &= \int e^{i\phi(\xi) \cdot x} d\mu(x) \\ &= \hat{\mu}(\phi(\xi)). \end{aligned}$$

Ainsi il existe une application mesurable $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $\hat{\mu}(\xi) = M(\|\xi\|)$. Si $\sigma$ est une autre mesure de probabilité invariante par les rotations sur la sphère, on a de même qu'il existe une application mesurable $S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $\hat{\sigma}(\xi) = S(\|\xi\|)$ mais alors pour tout $r > 0$ :

$$
\begin{aligned}
\iint e^{ir(\xi\cdot x)} d\mu(x) d\sigma(\xi) &= \int d\mu(x)\hat{\sigma}(rx) \\
&= \int d\mu(x) S(r) \qquad \text{car } \operatorname{Supp}(\mu) \subset \mathbb{S}_{n-1} \\
&= S(r)
\end{aligned}
$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
\iint e^{ir(\xi\cdot x)} d\mu(x) d\sigma(\xi) &= \int d\sigma(\xi)\hat{\mu}(r\xi) \\
&= \int d\sigma(\xi) M(r) \qquad \text{car } \operatorname{Supp}(\sigma) \subset \mathbb{S}_{n-1} \\
&= M(r).
\end{aligned}
$$

Donc $M = S$, $\hat{\mu} = \hat{\sigma}$ et finalement $\mu = \sigma$. □

## 1.3 Digressions autour des mesures

Les mesures considérées dans le paragraphe précédent étaient boréliennes. Un problème intéressant est celui de l'existence ou non sur un ensemble $X$ d'une mesure additive ou seulement finiment additive, non nulle, invariante par l'action d'un certain groupe et mesurant toutes les parties de $X$. Si $X = \mathbb{R}^n$, nous montrons que la réponse à cette question dépend de la valeur de $n$.

### 1.3.1 Théorème de von Neumann et conséquences

**Définition 1.12.** (mesure finiment additive) Soit $\Omega$ un ensemble et $\mu$ une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$. On dit que $\mu$ est une *mesure finiment additive* si elle vérifie : $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$ pour $A$ et $B$ disjoints dans $\Omega$.

En particulier, une mesure finiment additive sur $\Omega$ est universelle, c'est-à-dire définie sur l'ensemble des parties de $\Omega$.

**Théorème 1.13.** (von Neumann, 1929) *Soit $G$ un groupe abélien. Alors il existe sur $G$ une mesure finiment additive, de masse 1 et invariante par translation. Une telle mesure est appelée une mesure de von Neumann.*

*Démonstration.* Une preuve détaillée se trouve dans [Gu], appendice III.
Soit G un groupe abélien. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{P}(G)$ dans $[0, 1]$ est compact pour la topologie produit d'après la théorème de Tychonoff. On cherche alors une fonction $\mu$ vérifiant : $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$ pour $A$ et $B$ disjoints dans $\mathcal{P}(G)$, $\mu(G) = 1$ et $\mu(gA) = \mu(A)$ pour $g \in G, A \in \mathcal{P}(G)$.

Par compacité, on peut se ramener à un groupe de type fini. En effet, notons $I$ l'ensemble des sous-groupes de type fini de $G$. Alors pour tout $H \in I$, considérons l'ensemble $M_H$ des applications de $\mathcal{P}(G)$ dans $[0; 1]$ vérifiant $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$ pour $A$ et $B$ disjoints dans $\mathcal{P}(G)$, $\mu(G) = 1$ et $\mu(g.A) = \mu(A)$ pour $g \in H$ et $A \in \mathcal{P}(G)$. Un élément de l'intersection de tous ces $M_H$ répondrait au problème ; par compacité, il suffit de montrer

que les intersections finies des $M_i$ pour $i \in I$ sont non vides. Or, pour tous $H_1, ..., H_p \in I$, le sous-groupe $H$ engendré par $H_1, ..., H_p$ est encore de type fini ; si $\nu$ répond au problème pour $H$, on pose $\lambda(A) = \nu(A \cap H)$ pour $A \in \mathcal{P}(G)$. Alors $\lambda$ est dans l'intersection de $M_{H_1}, ..., M_{H_p}$.
Si $G = \langle g_1, ...g_p \rangle$ est un tel groupe, il est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}^p$ par le noyau du morphisme.

$$\phi : \begin{array}{c} \mathbb{Z}^p \to G \\ (n_1, ..., n_p) \mapsto g_1^{n_1} ... g_p^{n_p} \end{array}.$$

On a donc un morphisme surjectif $\pi$ de $\mathbb{Z}^p$ sur G. On peut alors se ramener au cas de $\mathbb{Z}^p$ car l'image par $\pi$ d'une mesure finiment additive $\mu$ invariante sur $\mathbb{Z}^p$ est une mesure finiment additive invariante sur G. En effet, si $\pi(\alpha) = g \in G$, pour tout $A \subset G$, on a

$$\pi_*\mu(gA) = \mu(\pi^{-1}(gA)) = \mu(\alpha^{-1}\pi^{-1}(A)) = \mu(\pi^{-1}(A)) = \pi_*\mu(A).$$

Sur $\mathbb{Z}^p$, on considère les mesures de comptage $\phi_n : A \mapsto \frac{1}{n^p}|A \cap C_n|$ où $C_n$ est l'ensemble des points dont les p coordonnées sont comprises entre 1 et n. Si t est une translation de longueur 1 suivant la direction d'un des axes directeurs, on a $|\phi_n(A) - \phi_n(tA)| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout A. On a ainsi des mesures *presque* invariantes par translations et on note $M_n$ l'ensemble des mesures finiment additives de masse 1 vérifiant cette inégalité. Les conditions définissant l'ensemble $M$ des mesures finiment additives et de masse 1 sont fermées. Donc M est compact car fermé dans le compact des applications de $\mathcal{P}(G)$ dans $[0, 1]$. Ainsi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ est non vide car les intersections finies contiennent un $\phi_n$ pour n assez grand ; un élément de cet ensemble répond au problème. □

**Corollaire 1.14.** (Banach, 1923) *Il existe sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$) une mesure finiment additive, invariante par les isométries et attribuant une masse 1 au segment (resp. au carré plein) de côté 1.*

*Démonstration.* Soient $\mu_0, \nu_0$ des mesures de von Neumann sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On les prolonge par translations à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ en des mesures $\mu_1$ et $\nu_1$ :

$$\mu_1(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_0(\pi_1(A \cap [n, n+1]))$$

$$\nu_1(A) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \mu_1(\pi_2(A \cap [n_1, n_1 + 1] \times [n_2, n_2 + 1])).$$

où $\pi_1, \pi_2$ désignent les projections canoniques sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On pose $\mu_2(A) = \frac{1}{2}(\mu_1(A) + \mu_1(-A))$ et $\nu_2(B) = \frac{1}{2}(\nu_1(B) + \nu_1(s(B)))$ où s est une symétrie axiale de $\mathbb{R}^2$ et où $A$ et $B$ sont des parties quelconques de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Alors $\mu_2$ répond au problème pour $\mathbb{R}$ mais il faut encore moyenner $\nu_2$ par les rotations. Soit $\rho$ une mesure de von Neumann sur $SO(2)$, qui est abélien. Alors $\nu_3(A) = \int_{SO_2} \mu(g.A)\rho(dg)$ est bien définie car toute application est mesurable pour $\rho$ (la construction de l'intégrale s'étend sans rien changer aux mesures finiment additives). Alors $\nu_3$ est invariante par les translations, par les rotations et par $s$. Comme toute isométrie peut s'écrire comme la composée de ces trois transformations, $\nu_3$ convient. □

On peut donc définir la mesure de toute partie de la droite réelle ou du plan réel tout en respectant la conservation de la mesure après découpage et recollement finis de parties. Ce n'est plus vrai si l'on demande à la mesure d'être $\sigma$-additive.
Les deux prochains paragraphes consistent en la preuve du théorème de Banach-Tarski ; il prouve en particulier qu'il n'existe pas de telle mesure finiment additive en dimension 3. La preuve des deux théorèmes précédents se trouve dans [Pe], partie 4.

### 1.3.2 Groupes libres et équidécomposabilité

Un groupe libre est intuitivement un groupe dont les relations entre les éléments sont toutes triviales : les seules simplifications possibles sont ainsi la multiplication par l'élément neutre et la multiplication d'un élément et de son inverse. Plus exactement :

**Définition 1.15.** (groupe libre sur S) Soit S un ensemble. Un *groupe libre sur $S$* est un couple $(F, i)$ où $F$ est un groupe et $i$ une application de $S$ dans $F$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe $G$ et toute application $f$ de $S$ dans $G$, il existe un unique morphisme de groupes $\bar{f} : F \to G$ tel que $f = \bar{f} \circ i$.

**Théorème 1.16.** *Pour tout ensemble $S$, un tel groupe libre existe. Si $(F_1, i_1), (F_2, i_2)$ sont deux groupes libres sur $S$, alors $F_1$ et $F_2$ sont isomorphes. De plus l'isomorphisme $\phi : F_1 \to F_2$ est unique si l'on demande que $\phi \circ i_1 = i_2$.*

*Démonstration.*
**Unicités** : Soient $(F_1, i_1), (F_2, i_2)$ deux groupes libres sur S. Alors la propriété universelle donne l'existence de deux morphismes $\phi_1, \phi_2$ respectivement de $F_1$ dans $F_2$ et de $F_2$ dans $F_1$ tels que $\phi_1 \circ i_1 = i_2$ et $\phi_2 \circ i_2 = i_1$. Alors $\phi_2 \circ \phi_1$ est un morphisme de $F_1$ dans lui-même vérifiant $(\phi_2 \circ \phi_1) \circ i_1 = i_1$. L'identité de $F_1$ est un autre tel morphisme et l'unicité dans la propriété universelle assure que $\phi_2 \circ \phi_1$ est égal à l'identité de $F_1$. On a le même raisonnement pour $\phi_1 \circ \phi_2$ et ceci prouve que $\phi_1$ et $\phi_2$ sont des isomorphismes de groupes réciproques l'un de l'autre.
La propriété universelle donne de plus l'unicité d'un morphisme $\phi$ de $F_1$ dans $F_2$ vérifiant $\phi \circ i_1 = i_2$.
**Existence** : Soit $S'$ un ensemble disjoint de $S$ et de même cardinal. On choisit une bijection entre $S$ et $S'$ et on note, pour tout $s$ de $S$, $s'$ l'élément correspondant. Soit $M$ l'ensemble des mots (suites finies) dans $S \cup S'$. On introduit une relation d'équivalence sur $M$ : deux mots sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par ajout ou suppression de mots de longueur 2 de la forme $(s, s')$ ou $(s', s)$. On vérifie que la classe d'équivalence de la concaténation de deux mots ne dépend que de la classe d'équivalence des deux mots ; ceci donne une loi de composition interne sur l'ensemble $F_S$ des classes d'équivalence de $M$. Le mot vide est élément neutre pour cette loi, $(s'_n, ..., s'_1)$ est inverse de $(s_1, ..., s_n)$ et l'associativité est claire de sorte que $F_S$ muni de la concaténation est un groupe.
On a une application $i : s \mapsto (s)$ de $S$ dans $F_S$. Vérifions maintenant la propriété universelle. Soit $G$ un groupe et $f$ une application de $S$ dans $G$. On prolonge d'abord $f$ à $S \cup S'$ en associant $f(s)^{-1}$ à $s' \in S'$. Notant encore $f$ ce prolongement, on introduit

$$\tilde{f} : \begin{array}{c} M \to G \\ (t_1, ..., t_n) \mapsto f(t_1)...f(t_n) \end{array}$$

L'image d'un mot ne dépend pas de sa classe d'équivalence donc $\tilde{f}$ se factorise en une application $\bar{f} : F_S \to G$ que l'on vérifie être un morphisme de groupes, vérifiant $\bar{f} \circ i = f$. L'unicité du morphisme est immédiate : les suites à un élément dans $S$ engendrent $F_S$ et donc un morphisme dont l'image de ces éléments est connue est entièrement déterminée. □

Par la suite, on omettra de préciser l'injection $i$ et l'on considérera l'ensemble comme inclus dans *son* groupe libre. Cette notion interviendra dans la preuve du théorème de Banach-Tarski. Dans le groupe $SO(3)$, on définit les quatre rotations :

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Lemme 1.17.** *Le sous-groupe $G$ de $SO(3)$ engendré par $\rho$ et $\phi$ est un groupe libre sur $\{\rho, \phi\}$.*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que, si $v_i, w_i \in \{\phi, \phi^{-1}, \rho, \rho^{-1}\}$, les produits $v_1...v_p$ et $w_1...w_r$ ne sont égaux que si les suites $(v_1, ..., v_p)$ et $(w_1...w_r)$ sont équivalentes pour la relation introduite dans la preuve précédente. Il suffit alors de montrer que $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ sont différents de l'identité et deux à deux distincts (ce qui est clair) et qu'un produit $t_1...t_n$ où $n \geqslant 2$ et où deux $t_i \in \{\phi^{\pm 1\}, \rho^{\pm 1}}$ consécutifs ne sont pas inverses l'un de l'autre n'est pas égal à l'identité de $SO(3)$.
Soit $w = t_1...t_n$. Quitte à considérer $\phi^{-1} w \phi$, on peut supposer que $w$ finit par $\phi$ ou $\phi^{-1}$. Par récurrence sur la longueur de $w$, on montre que $w(1,0,0)$ est de la forme $(\frac{a}{3^k}, \frac{b\sqrt{2}}{3^k}, \frac{c}{3^k})$ où $a, b, c$ sont des entiers relatifs. Si $w$ est de longueur 1, $w$ est égal à $\phi$ ou $\phi^{-1}$. Les égalités suivantes concluent ainsi la récurrence :

$$\phi^{\pm 1}(1,0,0) = (\frac{1}{3}, \frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}, 0)$$

$$\rho^{\pm 1}(\frac{a}{3^k}, \frac{b\sqrt{2}}{3^k}, \frac{c}{3^k}) = (\frac{a}{3^{k+1}}, \frac{(b \mp 2c)\sqrt{2}}{3^{k+1}}, \frac{c \pm 4}{3^{k+1}})$$

$$\phi^{\pm 1}(\frac{a}{3^k}, \frac{b\sqrt{2}}{3^k}, \frac{c}{3^k}) = (\frac{a \pm 2b}{3^{k+1}}, \frac{(b \pm 2a)\sqrt{2}}{3^{k+1}}, \frac{c}{3^{k+1}}).$$

Il suffit maintenant de démontrer que $b$ n'est jamais divisible par 3. En particulier il ne sera pas nul et $w$ ne sera pas l'identité. Cela se fait à nouveau par une récurrence :
Si $w$ est de longueur 1 ou 2, $w \in \{\phi^{\pm 1}, \rho\phi^{\pm 1}, \rho^{-1}\phi^{\pm 1}, \phi^{\pm 2}\}$. On a $b = \pm 2$ dans les trois premiers cas et $b = \pm 4$ dans le dernier.
Si $w = \phi^{\pm 2} v$ avec $v(1,0,0) = (\frac{a}{3^k}, \frac{b\sqrt{2}}{3^k}, \frac{c}{3^k})$, on a $w(1,0,0) = (*, \frac{\pm(4a-7b)\sqrt{2}}{3^{k+2}}, *)$. Or la deuxième coordonnée de $v(1,0,0)$ est $b' = b \pm 2a$. Donc $4a - 7b = 2b' - 9b$ ; comme on a l'hypothèse de récurrence sur $v$ et $\phi^{\pm 1} v$, on peut conclure pour $w$. Tous les autres cas de $w$ comme concaténation d'un mot de deux lettres et d'un mot $v$ sont analogues.
Ainsi G est un groupe libre. □

**Définition 1.18.** (parties G-équidécomposables, ensemble G-paradoxal) Soit $G$ un groupe agissant sur un ensemble $X$. Deux parties $A$ et $B$ de $X$ sont *G-équidécomposables* s'il existe des partitions finies de $A$ en $(A_i)$, de $B$ en $(B_i)$ de même cardinal $n$ et $n$ éléments $g_i$ de $G$ tels que $B_i = g_i A_i$ pour $i \in 1, ..., n$. On écrira $A \approx B$. On vérifie que c'est une relation d'équivalence sur les parties de X ; pour la transitivité, il suffit de faire l'intersection des deux partitions considérées avec la partie du milieu et le reste est évident.
Un ensemble $X$ est *G-paradoxal* s'il existe $A$ et $B$ deux parties disjointes de $X$ telles que $X \approx A$ et $X \approx B$.

**Proposition 1.19.** *Soit $G$ un groupe libre sur un ensemble à deux éléments. L'ensemble $G$ est G-paradoxal pour l'action sur lui-même par translations à gauche.*

*Démonstration.* Soit $G$ un groupe libre sur $S = \{a, b\}$ avec $a \neq b$. On pose $A'$ ensemble des mots réduits (c'est-à-dire ne contenant aucun sous-mot de la forme $xx^{-1}$ pour $x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$) commençant par $a$, $A''$ par $a^{-1}$, $B'$ par $b$ et $B''$ par $b^{-1}$. On pose aussi $A = A' \cup A''$ et $B = B' \cup B''$. Alors $A'$ et $A''$ constituent une partition de $A$ et l'on a $G = A' \cup aA''$ car $aA''$ est l'ensemble des mots réduits ne commençant pas par $a$. Ceci prouve que $G \approx A$ ; de même pour $B$. Comme $A$ et $B$ sont disjoints, $G$ est G-paradoxal. $\square$

### 1.3.3 Le théorème de Banach-Tarski

Dans tout ce paragraphe, $G$ désigne le groupe libre à deux éléments introduit au lemme 1.16. Par restriction de l'action naturelle de $SO(3)$ sur $\mathbb{S}_2$, on a une action de $G$ sur $\mathbb{S}_2$. Nous avons suivi la démonstration de [De] ; l'idée est la même que dans [Pe], partie 7.

**Théorème 1.20.** (Hausdorff) *Il existe une partie dénombrable $D$ de $\mathbb{S}_2$ telle que $\mathbb{S}_2 - D$ soit G-paradoxale.*

*Démonstration.* Le groupe $G$ est dénombrable car il est de type fini. Soit $D$ l'ensemble des points de $\mathbb{S}_2$ fixés par un élément de $G$ différent de l'identité. Une telle rotation fixe deux éléments de $\mathbb{S}_2$ donc $D$ est aussi dénombrable. Le groupe $G$ agit sur $\mathbb{S}_2 - D$. En effet, si $gx = y \in D$, il existe $g'$ tel que $g'y = y$ et alors $x \in D$ car $g^{-1}g'gx = x$. Soit $O$ l'ensemble des orbites de $\mathbb{S}_2 - D$ sous l'action de $G$. Par l'axiome du choix, on peut choisir un élément dans chaque orbite ; on note $\Omega$ un ensemble de représentants des orbites.
On note $A'$ l'ensemble des mots réduits sur $\{\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}\}$ commençant par $\phi$, $A''$ par $\phi^{-1}$, $B'$ par $\rho$ et $B''$ par $\rho^{-1}$ et $A'_\Omega, A''_\Omega, B'_\Omega, B''_\Omega$ l'image de $\Omega$ par $A', A'', B', B''$. Supposons $x = gy = g'y'$ avec $y, y' \in \Omega$ et $g, g' \in G$. Alors $y$ et $y'$ sont dans la même orbite donc sont égaux. Comme $y$ n'est pas dans $D$, on a aussi $g = g'$. Ceci montre que les ensembles $A'_\Omega, A''_\Omega, B'_\Omega, B''_\Omega$ sont deux à deux disjoints. Si l'on pose $A_\Omega = A'_\Omega \cup A''_\Omega$ et $B_\Omega = B'_\Omega \cup B''_\Omega$, les parties $A_\Omega$ et $B_\Omega$ sont disjointes et $\mathbb{S}_2 - D = A'_\Omega \cup \phi A''_\Omega = B'_\Omega \cup \rho B''_\Omega$. Donc $\mathbb{S}_2 - D$ est G-paradoxale. $\square$

**Théorème 1.21.** (Banach-Tarski, 1924) *La sphère $\mathbb{S}_2$ est G-paradoxale.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que $\mathbb{S}_2$ et $\mathbb{S}_2 - D$ sont G-équidécomposables. Soit $P$ un point de $\mathbb{S}_2 - D$. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on considère $\rho_\theta$ la rotation d'axe $(OP)$ et d'angle $\theta$. Pour $M \in D$, l'ensemble des $\theta$ tels que $\rho_\theta^n(M) \in D$ pour un certain $n \geqslant 1$ est dénombrable car D l'est, donc l'union de ces ensembles pour M décrivant D est aussi dénombrable. Soit alors $\theta_0$ n'y appartenant pas.

En posant $r = \rho_{\theta_0}$ et $E = D \cup r(D) \cup r^2(D) \cup ...$ on a $r(E) = E - D$ car par construction $D \cap r^n(D)$ est vide pour tout $n \geqslant 1$. On a donc $E \approx E - D$ et donc, en ajoutant $\mathbb{S}_2 - D$ des deux côtés, $\mathbb{S}_2 \approx \mathbb{S}_2 - D$. La $G$-équidécomposabilité étant une relation d'équivalence, on en déduit que $\mathbb{S}_2$ est $G$-paradoxale. $\square$

Ce théorème exprime donc que l'on peut découper la sphère unité en un nombre fini de morceaux, déplacer ces morceaux par des rotations et finalement perdre *une bonne partie* de la sphère initiale. En particulier, les morceaux découpés ne sont pas tous mesurables pour la mesure borélienne construite en 1.1.
La même preuve fonctionne pour la boule unité privée d'un point : on considère l'action de G sur les segments $]OM]$ pour $M$ décrivant $\mathbb{S}_2$. Il en résulte le théorème qui a historiquement motivé le paradoxe de Banach-Tarski :

**Théorème 1.22.** *Sur $\mathbb{R}^3$, il n'existe pas de mesure finiment additive, invariante par les isométries et attribuant une masse 1 au cube de côté 1.*

Réciproquement le corollaire 1.13 montre que pour la boule unité de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, il ne peut y avoir de tel paradoxe. On peut enfin noter qu'il a été prouvé qu'il est nécessaire de recourir à l'axiome du choix dans la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski.

# 2 Calculs sur la sphère

Cette partie regroupe divers calculs dont nous aurons besoin par la suite. Ils proviennent de [Fa], parties IX - 1 et 2. Dans tout ce qui suit, on suppose $n \geqslant 3$.

## 2.1 Formules d'intégration

Dans ce paragraphe, nous démontrons deux formules d'intégration. La première est bien connue et permet d'intégrer une fonction sur $\mathbb{R}^n$ en décomposant sur des couronnes sphériques ; la seconde donne l'intégrale d'une fonction définie sur la sphère en décomposant selon les parallèles.

Nous noterons $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 1.8, si $\sigma = \sigma_{n-1}$ est l'unique mesure de probabilité invariante par les rotations sur la sphère et si $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{S}_{n-1}$, on a :

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\overline{\omega}_n} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} f\omega$$

où $\omega = \omega_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n$ et $\overline{\omega}_n = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \omega$.

Par le choix d'orientation de la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$, on a $\overline{\omega}_n > 0$.

**Proposition 2.1.** *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \overline{\omega}_n \int_0^\infty (\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(ru) d\sigma(u)) r^{n-1} dr.$$

*Si $f(x) = F(||x||)$ est radiale avec $F$ définie sur $[0, +\infty[$, on a donc*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \overline{\omega}_n \int_0^\infty F(r) r^{n-1} dr.$$

*Démonstration.* On note $\alpha = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. On considère le difféomorphisme $\phi$ :

$$\phi : ]0, +\infty[ \times \mathbb{S}_{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\}, (r, u) \mapsto ru.$$

Par le théorème du changement de variable, il suffit donc de montrer que $\phi^* \alpha = r^{n-1} dr \wedge \omega$ (où l'on a prolongé $dr$ et $\omega$ en des formes différentielles sur l'espace produit). Soient $X \in \mathbb{R}$ et $Y$ un vecteur tangent à $\mathbb{S}_{n-1}$ en $u$, c'est-à-dire orthogonal à $u$. Comme $\phi$ est restriction d'une application bilinéaire, on a :

$$(T\phi)_{(r,u)}(X, Y) = Xu + rY.$$

Si $Y_1, ..., Y_{n-1}$ sont $n-1$ vecteurs tangents à $\mathbb{S}_{n-1}$ en $u$, on a, en écrivant $X$ le vecteur $(X, 0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^n$ et $Y_i$ le vecteur $(0, Y_i)$ :

$$\begin{aligned}
(\phi^*\alpha)_{(r,u)}(X, Y_1, ..., Y_{n-1}) &= \alpha((T\phi)_{(r,u)}X, (T\phi)_{(r,u)}Y_1, ..., (T\phi)_{(r,u)}Y_{n-1}) \\
&= \alpha(Xu, rY_1, ..., rY_{n-1}) \\
&= Xr^{n-1}\alpha(u, Y_1, ..., Y_{n-1}) \\
&= Xr^{n-1}\omega_u(Y_1, ..., Y_{n-1}).
\end{aligned}$$

D'où $\phi^*\alpha = r^{n-1} dr \wedge \omega$. □

En appliquant cette proposition à la fonction radiale $x \mapsto \exp(-||x||^2)$, on trouve

$$\overline{\omega_n} = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x > 0$.

On note $\mathbb{S}_{n-2}$ l'équateur de $\mathbb{S}_{n-1}$, $\sigma_{n-2}$ la mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_{n-2}$ et $e_n$ le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 2.2.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{S}_{n-1}$. On a l'égalité*

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi (\int_{\mathbb{S}_{n-2}} f(\sin\theta u + \cos\theta e_n)d\sigma_{n-2}(u)) \sin^{n-2}\theta d\theta.$$

*Si $f$ est zonale, i.e. si $f(x) = F(x_n)$, avec $F$ définie et continue sur $[-1, 1]$, on a :*

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^1 F(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt$$

*par un changement de variable.*

*Démonstration.* On considère le difféomorphisme $\phi$ :

$$\phi\ : ]0, \pi[ \times \mathbb{S}_{n-2} \to \mathbb{S}_{n-1} - \{\pm e_n\}, (\theta, u) \mapsto \sin\theta u + \cos\theta e_n.$$

Comme $\frac{\overline{\omega}_{n-1}}{\overline{\omega}_n} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$, il s'agit de montrer que $\phi^*\omega = \pm \sin^{n-2}\theta d\theta \wedge \omega_{n-2}$.
Soient $X \in \mathbb{R}$ et $Y$ un vecteur tangent à $\mathbb{S}_{n-2}$ en $u$. On a :

$$(T\phi)_{(\theta,u)}(X, Y) = (\cos\theta u - \sin\theta e_n)X + \sin\theta Y.$$

Si $Y_1, ..., Y_{n-2}$ sont $n-2$ vecteurs tangents en u, on a, avec les mêmes abus d'écriture que précédemment :

$$\begin{aligned}
(\phi^*\omega)_{(\theta,u)}(X, Y_1, ..., Y_{n-2}) &= \omega_{\phi(\theta,u)}((T\phi)_{(\theta,u)}X, (T\phi)_{(\theta,u)}Y_1, ..., (T\phi)_{(\theta,u)}Y_{n-2}) \\
&= \det(\sin\theta u + \cos\theta e_n, (\cos\theta u - \sin\theta e_n)X, \sin\theta Y_1, ..., \sin\theta Y_{n-2}) \\
&= \det(\sin\theta u, -\sin\theta e_n X, \sin\theta Y_1, ..., \sin\theta Y_{n-2}) \\
&+ \det(\cos\theta e_n, \cos\theta u X, \sin\theta Y_1, ..., \sin\theta Y_{n-2}) \\
&= -X\sin^{n-2}\theta \det(u, e_n, Y_1, ..., Y_{n-2}) \\
&= -(-1)^{n-2} X \sin^{n-2}\theta \det(u, Y_1, ..., Y_{n-2}, e_n) \\
&= (-1)^{n-1} X \sin^{n-2}\theta (\omega_0)_u(Y_1, ..., Y_{n-2}).
\end{aligned}$$

D'où $\phi^*\omega = (-1)^{n-1}\sin^{n-2}\theta d\theta \wedge \omega_{n-2}$. □

## 2.2 L'opérateur laplacien

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés du laplacien qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 2.3.** (laplacien) Soit f une fonction complexe de classe $C^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Le *laplacien* de f est l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

**Proposition 2.4.** *Le laplacien est invariant par $O(n)$ :*

$$\forall g \in O(n), \ \ \Delta(f \circ g) = (\Delta f) \circ g.$$

*Démonstration.* Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $g$ dans la base canonique. On a successivement

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g(x)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ g(x) \ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f \circ g(x)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \circ g(x)) \ .$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\Delta(f \circ g(x)) &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \circ g(x) (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} a_{ki}) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \circ g(x) \delta_{j,k} \\
&= (\Delta f) \circ g(x),
\end{aligned}$$

la deuxième égalité résultant de l'orthonormalité des lignes de A. □

**Lemme 2.5.** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $X$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \ \exp tX\ a \in \Omega \ \textit{ et } f(\exp tX\ a) = f(a).$$

*Alors*

$$(df)_a(Xa) = 0\ ,$$
$$(d^2f)_a(Xa, Xa) + (df)_a(X^2a) = 0\ .$$

*Démonstration.* On pose $g : t \mapsto f(\exp tXa)$. L'application $g$ est constante ; calculons ses dérivées première et seconde :

$$g'(t) = df_{\exp tXa}(X \exp tXa),$$

$$g''(t) = d^2f_{\exp tXa}(X \exp tXa, X \exp tXa) + df_{\exp tXa}(X^2 \exp tXa).$$

Le résultat annoncé s'en déduit en prenant t = 0. □

**Proposition 2.6.** (Laplacien d'une fonction radiale) *Soit $f(x) = F(||x||)$ une fonction radiale et de classe $\mathcal{C}^2$, sauf peut-être en 0, avec $F$ définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. On a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ \Delta f(x) = (LF)(||x||)$$

*avec*

$$LF = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dF}{dr}.$$

*Démonstration.* Comme f est radiale et par invariance du laplacien par $O(n)$, il suffit de montrer la formule au point $a = re_1, r > 0$. Soit $X$ la matrice antisymétrique $E_{i1} - E_{1i}$ où $i \in \{2, ..., n\}$. Comme $X$ est antisymétrique, $\exp tX$ est orthogonale pour tout t, donc on est dans les conditions d'application du lemme précédent. On a $Xa = re_i$ et $X^2a = -re_1$. Ainsi pour $i \in \{2, ..., n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ \ r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) - r\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = F'(r)$. On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}(r)$, on a la formule annoncée en sommant les $n$ dérivées secondes. □

Nous rappelons enfin le principe du maximum, très utile en analyse harmonique. On dit qu'une fonction $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}$ est *harmonique* si son laplacien est nul.

**Proposition 2.7.** (Principe du maximum) *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique sur $\Omega$. Alors*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} f(x) = \max_{x \in \partial\Omega} f(x).$$

*Démonstration.* On pose $f_p(x) = f(x) + \frac{||x||^2}{p}$ pour $p$ entier supérieur à 1. L'application $f_p$ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$ et de laplacien $\frac{2n}{p} > 0$ sur $\Omega$. Supposons par l'absurde que $f_p$ atteigne son maximum en un point $x_0$ de $\Omega$. Alors, pour $h$ dans un voisinage de 0 :

$$f_p(x_0 + h) - f_p(x_0) = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} h_i + {}^t hHh + o(||h||^2)$$

où $H$ désigne la matrice hessienne de $f_p$. La somme est nulle car $x_0$ est un extremum de $f_p$. Comme $x_0$ est un maximum de $f_p$, le membre de gauche est négatif ou nul pour $h$ suffisamment petit ; ceci implique que $H$ est une matrice symétrique négative et, en particulier, que le laplacien de $f_p$, i.e. la trace de $H$, est négatif ou nul. Ceci est absurde.

Donc $f_p$ atteint nécessairement son maximum en $x_p \in \partial\Omega$. Quitte à extraire une sous-suite, $x_p$ converge dans le compact $\partial\Omega$. Comme $\Omega$ est borné, les $f_p$ convergent uniformément vers $f$ ; on en déduit immédiatement qu'en la limite des $x_p$, $f$ atteint son maximum. □

# 3 Diagonalisation du laplacien sphérique

Cette partie est consacrée à l'étude du laplacien sphérique. Il s'agit d'un opérateur défini sur les fonctions à valeurs complexes et de classe $\mathcal{C}^2$ sur la sphère. Si f est une telle fonction, on pose $\widetilde{f}(x) = f(\frac{x}{||x||})$, définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Le laplacien sphérique est alors défini comme

$$\Delta_S f = (\Delta \widetilde{f})|_S \ .$$

Nous donnons sans démonstration (cf. [Fa], page 198) la formule du laplacien sphérique d'une fonction zonale $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{S}_{n-1}$ : si $f(x) = F(\theta)$ avec $x = \sin\theta\, u + \cos\theta\, e_n$ et $F$ définie et $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi]$, alors $\Delta_S f = LF$, où

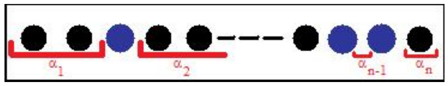
$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + (n-2)\cot\theta \frac{d}{d\theta}. \tag{1}$$

## 3.1 Sous-espaces propres

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'opérateur laplacien sphérique est diagonalisable et nous explicitons ses sous-espaces propres.

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel complexe des polynômes complexes à $n$ variables et $\mathcal{P}_m$ le sous-espace vectoriel constitué des polynômes homogènes de degré $m$. Sa dimension $\delta_m$ est égale au cardinal de l'ensemble des $n$-uplets $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ où les $\alpha_i \in \mathbb{N}$ vérifient $\alpha_1 + ... + \alpha_n = m$ car les $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times ... \times x_n^{\alpha_n}$ en constituent une base. Un argument combinatoire permet d'obtenir sa dimension. On aligne $n + m - 1$ points et on dispose de $n - 1$ jetons que l'on dispose sur les points, un au maximum sur chaque point. Ces jetons peuvent être vus comme des barrières entre les $m$ points restants ; ils déterminent ainsi une décomposition de $m$ comme somme de $n$ entiers naturels. Réciproquement, une telle décomposition correspond à une unique façon de disposer les jetons. Il vient donc

$$\delta_m = \begin{pmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$




**Définition 3.1.** Soit $p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha x^\alpha$ un polynôme à $n$ variables. On définit un *opérateur différentiel* noté $p(\frac{\partial}{\partial x})$ par :

$$p(\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

où, si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.
On pose de plus, pour un tel $n$-uplet $\alpha$, $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$.

On peut alors définir une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{P}$ par

$$\langle\langle p, q \rangle\rangle = p(\frac{\partial}{\partial x})\ \overline{q}\ (0).$$

**Lemme 3.2.** *La forme $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{P}$ pour lequel la base canonique de $\mathcal{P}$ est orthogonale.*

*Démonstration.* Si $p = a_\alpha x^\alpha$ et $q = b_\beta x^\beta$, avec $\alpha, \beta$ des $n$-uplets, on a $(p, q) = 0$ dès que $\alpha \neq \beta$. En effet, soit il existe $i$ tel que $\alpha_i < \beta_i$. Dans ce cas, l'exposant de $x_i$ dans $p(\frac{\partial}{\partial x})\overline{q}$ est non nul et donc l'évaluation en 0 donne 0. Soit il existe $i$ tel que $\alpha_i > \beta_i$. Alors en changeant l'ordre des dérivées, on a immédiatement $p(\frac{\partial}{\partial x})\overline{q} = 0$.
Si $\alpha = \beta$, on trouve $\langle\langle p, q \rangle\rangle = \alpha! a_\alpha \overline{b}_\alpha$. Donc pour $p$ et $q$ quelconques, si $a_\alpha, b_\alpha$ sont les coefficients de $p$ et $q$ du monôme $x_\alpha$, on a

$$\langle\langle p, q \rangle\rangle = \sum_\alpha \alpha! a_\alpha \overline{b_\alpha}\ . \qquad \square$$

On pose Q le polynôme $x_1^2 + ... + x_n^2$. On utilisera souvent les formules de composition et d'adjonction : pour tous $P, R \in \mathcal{P}$, nous avons

$$(PR)(\frac{\partial}{\partial x}) = P(\frac{\partial}{\partial x}) \circ R(\frac{\partial}{\partial x}),$$

$$\langle\langle RQ, P \rangle\rangle = \langle\langle R, \Delta P \rangle\rangle.$$

Par la suite, on note $\mathcal{H}_m$ l'espace des polynômes homogènes harmoniques complexes de degré $m$.

**Proposition 3.3.** (Décomposition en puissances de Q) *Un polynôme homogène $p$ de degré $m$ se décompose en*

$$p = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} Q^k h_m,$$

*où $h_m \in \mathcal{H}_{m-2k}$.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que les sous-espaces vectoriels $Q\mathcal{P}_{m-2}$ et $\mathcal{H}_m$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$. Par la formule d'adjonction, on a pour $p \in \mathcal{P}_{m-2}$, $\langle\langle Qp, Qp \rangle\rangle = \langle\langle p, \Delta(Qp) \rangle\rangle$ donc l'intersection est réduite à $\{0\}$. Il suffit alors de montrer que la dimension de $\mathcal{H}_m$ est $\delta_m - \delta_{m-2}$.

Le laplacien $\Delta$ restreint à $\mathcal{P}_m$ est à valeurs dans $\mathcal{P}_{m-2}$. Un élément $r \in \mathcal{P}_{m-2}$ orthogonal à son image vérifie

$$\forall p \in \mathcal{P}_m, \langle\langle r, \Delta p\rangle\rangle = 0.$$

En particulier, avec $p = rQ, \langle\langle rQ, rQ\rangle\rangle = 0$, ce qui prouve que $r = 0$. Donc l'image est $\mathcal{P}_{m-2}$ et par le théorème du rang, dim $\mathcal{H}_m = \delta_m - \delta_{m-2}$.
Un polynôme homogène de degré 0 ou 1 est harmonique. D'après ce qui précède, si $p$ est homogène de degré $m \geqslant 2$, il s'écrit $Qp_1 + h$ avec $h \in \mathcal{H}_{m-2}$ et $p_1 \in \mathcal{P}_{m-2}$. Alors une récurrence permet de conclure. □

On note $\mathcal{Y}_m$ l'ensemble des restrictions à $\mathbb{S}_{n-1}$ des éléments de $\mathcal{H}_m$. L'application de restriction de $\mathcal{H}_m$ dans $\mathcal{Y}_m$ est un isomorphisme car un polynôme homogène nul sur la sphère est nul partout. On a donc $d_m :=$ dim $\mathcal{Y}_m =$ dim $\mathcal{H}_m = (2m+n-2)\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!m!}$.
On munit $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$ de son produit scalaire hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(y)\overline{g(y)}\sigma(dy).$$

**Théorème 3.4.** (base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$) *Les sous-espaces $\mathcal{Y}_m$ pour $m \in \mathbb{N}$ constituent une décomposition en somme directe hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$.*

*Démonstration.* Par la formule de Green, si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur la boule unité $B_n$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\overline{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu})d\sigma = \int_{B_n} (u\Delta v - v\Delta u)d\lambda.$$

Par la formule d'Euler, pour un polynôme homogène de degré $l$, $\frac{\partial p}{\partial \nu} = (\nabla p|(x_1, ..., x_n)) = lp$, où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire naturel sur $\mathbb{R}^n$. Donc si $p$ et $q$ sont harmoniques homogènes de degrés respectifs $l$ et $m$, on a :

$$0 = \int_{B_n} (p\Delta\overline{q} - \overline{q}\Delta p)d\lambda = \overline{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_{n-1}} (p\frac{\partial \overline{q}}{\partial \nu} - \overline{q}\frac{\partial p}{\partial \nu})d\sigma = (m-l)\int_{\mathbb{S}_{n-1}} p\overline{q}d\sigma,$$

ce qui prouve l'orthogonalité de $\mathcal{Y}_m$ et $\mathcal{Y}_l$.

Comme sur la sphère $Q$ vaut 1, la proposition précédente affirme que la somme des $\mathcal{Y}_m$ est égale à l'espace des restriction à $\mathbb{S}_{n-1}$ des polynômes. L'espace $\mathbb{S}_{n-1}$ étant compact, le théorème de Stone-Weierstrass permet d'affirmer que cet espace (contenant les constantes, séparant les points et stable par conjugaison) est dense dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{S}_{n-1}$ pour la topologie de la convergence uniforme (donc aussi pour celle induite par la norme de $L^2$). Ce dernier espace étant dense dans $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$ pour la norme de $L^2$, on a

$$L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma) = \overline{\bigoplus_{m\geqslant 0}} \mathcal{Y}_m.$$ □

On en arrive au point central de ce paragraphe. Si le théorème précédent montre que les espaces $\mathcal{Y}_m$ forment une décomposition en somme directe hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$, il est remarquable qu'ils soient des sous-espaces propres du laplacien sphérique $\Delta_S$. Plus exactement

**Théorème 3.5.** (diagonalisation du laplacien sphérique) *Si $f \in \mathcal{Y}_m$, alors*

$$\Delta_S f = -m(m+n-2)f.$$

*Démonstration.* Soit $f \in \mathcal{Y}_m$ restriction de $p \in \mathcal{H}_m$ ; avec la notation introduite au début de la partie 3, on a :

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{||x||^m} p(x) \ .$$

On a de plus la formule de Leibniz, pour $u$ et $v$ de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + 2(\nabla u|\nabla v) + u\Delta v \ .$$

Donc

$$\Delta \widetilde{f} = \Delta(\frac{1}{||x||^m})p + 2(\nabla \frac{1}{||x||^m}|\nabla p) + \frac{1}{||x||^m}\Delta p.$$

Le premier terme se calcule en utilisant la formule du laplacien pour une fonction radiale ; le deuxième par la formule $\nabla \frac{1}{||x||^m} = -m\frac{x}{||x||^{m+2}}$ et la formule d'Euler $(x|\nabla p) = mp$ ; le dernier est nul par harmonicité de $p$. On trouve ainsi

$$\Delta \widetilde{f} = m(m-n+2)\frac{1}{||x||^{m+2}}p - 2m^2\frac{1}{||x||^{m+2}}p.$$

Et donc, comme sur la sphère $||x|| = 1$, $\Delta_S f = -m(m+n-2)f$. □

On aimerait maintenant pouvoir décrire les éléments de $\mathcal{Y}_m$. Cela se fait en deux étapes : d'abord on exhibe un élément particulier dont les propriétés seront étudiées en détail dans le paragraphe suivant, puis on montre comment obtenir les autres à partir de celui-ci.

On note $\mathcal{Y}_m^K, \mathcal{H}_m^K$ les éléments de $\mathcal{Y}_m, \mathcal{H}_m$ stables par $K$, groupe d'isotropie du vecteur $e_n = (0, ..., 1)$ pour l'action du groupe $SO(n)$ sur la sphère. On rappelle qu'une fonction définie sur $\mathbb{S}_{n-1}$ est *zonale* si elle ne dépend que de la dernière coordonnée.

**Lemme 3.6.** *Soit $P$ un polynôme à $n$ variables. On suppose que $P$ ne dépend que de la norme euclidienne de la variable. Alors $P$ est de la forme*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(x_1^2 + ... + x_n^2)^i,$$

*où $a_i \in \mathbb{C}$.*

*Démonstration.* La preuve se trouve en exercice, page 323, dans [Mn]. Soit $u$ un vecteur unitaire. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = P(tu)$. L'application $f$ est un polynôme en t car composée d'une application linéaire et d'une application polynomiale. De plus, d'après l'hypothèse faite sur $P$, $f$ ne dépend pas de $u$ et en particulier $f$ est paire. On a donc pour tout $u$

$$P(tu) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^{2i}.$$

En appliquant cette égalité à $u = \frac{x}{||x||}$ et $t = ||x||$, il vient le résultat annoncé. □

**Théorème 3.7.** (existence de polynômes harmoniques zonaux) *La dimension de $\mathcal{Y}_m^K$ est 1.*

*Démonstration.* On orthogonalise la suite de fonctions $f_m(x) = x_n^m$ pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt montre que l'on obtient des fonctions $\phi_m(x) = r_m(x_n)$ où $r_m$ est un polynôme de degré $m$. Soit $f \in \mathcal{H}_m^K$. On écrit $f$ suivant les puissances de $x_n$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} x_n^k a_k(x_1, ..., x_{n-1}),$$

où $a_k$ est un polynôme de $n-1$ variables homogène de degré $m-k$. Les $a_k$ ne dépendent que de la norme de la variable. En effet, soient $(x_1, ..., x_{n-1}), (y_1, ..., y_{n-1})$ tels que $x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 = y_1^2 + ... + y_{n-1}^2$. Alors, par hypothèse sur $f$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(x_1, ..., x_{n-1}, t) = f(y_1, ..., y_{n-1}, t)$. Le polynôme $g : t \mapsto \sum_{k=0}^m t^k (a_k(x_1, ..., x_{n-1}) - a_k(y_1, ..., y_{n-1}))$ est donc identiquement nul ce qui entraîne que tous ses coefficients le sont, i.e. que $a_k(x_1, ..., x_{n-1}) = a_k(y_1, ..., y_{n-1})$. Par le lemme précédent, on a donc

$$a_{m-2j}(x) = c_j(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2)^j,$$

$$a_{m-2j+1}(x) = 0.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{S}_{n-1},\ f(x) = \sum_{k+2j=m} c_j x_n^k (1 - x_n^2)^j \ .$$

Donc la restriction $\widetilde{f}$ de $f$ à $\mathbb{S}_{n-1}$ est combinaison linéaire des $f_k$ pour $k \leqslant m$. Comme $f$ est harmonique et homogène de degré $m$, l'application $\widetilde{f}$ est orthogonale à

$$\mathcal{Y}_0 \oplus ... \oplus \mathcal{Y}_{m-1}$$

par le théorème 3.4 donc $\widetilde{f}$ est proportionnelle à $\phi_m$ par caractérisation de l'orthonormalisé de Gram-Schmidt.

Ainsi, $\mathcal{Y}_m^K$ est de dimension 0 ou 1. Le polynôme

$$q_m(x) = (x_n + ix_1)^m$$

est homogène de degré $m$. Il est harmonique et $q_m(e_n) = 1$. On pose

$$p_m(x) = \int_K q_m(kx)\mu_0(dk)$$

où $\mu_0$ est la mesure de Haar de masse 1 sur K. L'application $r_m$ appartient à $\mathcal{H}_m$. En effet, pour tout $k \in K$, les composantes de $kx$ sont des combinaisons linéaires des composantes de $x$, c'est-à-dire des polynômes homogènes de degré 1. Tous les $q_m(kx)$ sont donc des polynômes homogènes de degré $m$ ; on peut alors intégrer sur $K$ indépendamment le coefficient de chaque monôme de degré $m$. Ceci prouve que $p_m$ est un polynôme homogène de degré $m$ ; il est harmonique par le théorème de dérivation sous le signe intégral (tous les $q_m(kx)$ sont harmoniques par invariance du laplacien par les rotations). Comme par construction, $p_m$ est zonal, on a $p_m \in \mathcal{H}_m^K$. Enfin $p_m$ n'est pas nul : $p_m(e_n) = 1$. □

**Définition 3.8.** (polynômes sphériques) On définit le *polynôme sphérique* $p_m$ comme l'unique élément de $\mathcal{Y}_m^K$ vérifiant $p_m(1) = 1$.

Par les arguments de la fin de la preuve précédente, si $f \in \mathcal{H}_m$ et si $g \in SO(n)$, l'application $x \mapsto f(g^{-1}x)$ est aussi dans $\mathcal{H}_m$. On a ainsi une représentation de $SO(n)$ sur $\mathcal{H}_m$ notée $T$ ou $T_m : T(g) \cdot f : x \mapsto f(g^{-1}x)$. Le dernier théorème de ce paragraphe montre que cette représentation est irréductible.

**Théorème 3.9.** (irréductibilité des représentations) *La représentation $(T_m, \mathcal{H}_m)$ est irréductible.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{Y}$ un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{Y}_m$ invariant par $SO(n)$, et $f_1$ un élément non nul de $\mathcal{Y}$. Soit $x_0 \in \mathbb{S}_{n-1}$ tel que $f_1(x_0) \neq 0$. Soit $\gamma \in SO(n)$ tel que $x_0 = \gamma e_n$. L'application $f_2(x) = f_1(\gamma x)$ appartient à $\mathcal{Y}$ et $f_2(e_n) \neq 0$. Posons

$$f_0(x) = \int_K f_2(kx) d\mu(k)$$

qui vérifie $f_0 \in \mathcal{Y}$. En effet, comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $f_0$ est orthogonale aux éléments de l'orthogonal de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}_m$. Soit donc $g \in \mathcal{Y}^\perp$, nous avons $\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f_0(x)\bar{g}(x)d\sigma(x) = \int_K (\int_{\mathbb{S}_{n-1}} f_2(kx)\bar{g}(x)d\sigma(x))d\mu(k)$ par le théorème de Fubini. Chacune des intégrales sur $\mathbb{S}_{n-1}$ est nulle car $\mathcal{Y}$ est invariant par $SO(n)$, donc $f_0$ est orthogonale à $g$ et $f_0 \in \mathcal{Y}$.
Ainsi $f_0 \in \mathcal{Y}_m^K$. De plus $f_0(e_n) = f_2(e_n)$ est non nul. Comme $\mathcal{Y}_m^K$ est de dimension 1, $\mathcal{Y}_m^K$ est inclus dans $\mathcal{Y}$. Si maintenant l'orthogonal de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}_m$ n'était pas réduit à 0, le même raisonnement montrerait que $\mathcal{Y}_m^K \subset \mathcal{Y}^\perp$ car l'orthogonal pour le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{S}, \sigma)$ est encore invariant par les rotations. C'est absurde et l'on a donc l'irréductibilité de la représentation. $\square$

Ainsi, on peut faire agir $SO(n)$ sur le polynôme zonal $p_m$ défini après le théorème 3.7. L'espace vectoriel engendré par l'orbite de ce polynôme est une sous-représentation non-triviale de $(T_m, \mathcal{H}_m)$ donc est égal à $\mathcal{Y}_m$ tout entier.

## 3.2 Étude des polynômes sphériques

Le théorème 3.7 du paragraphe précédent montre l'intérêt des polynômes harmoniques zonaux, vecteurs propres du laplacien sphérique. Ce paragraphe consiste en une étude approfondie de ces polynômes sphériques.

On considère le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$ : pour tous $p, q \in \mathbb{C}[X]$,

$$\langle p \mid q \rangle = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt$$

Par la formule de la proposition 2.2 :

$$
\begin{aligned}
\langle p \mid q\rangle &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{0}^{\pi} p(\cos\theta)\overline{q(\cos\theta)}\sin^{n-2}\theta\, d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{0}^{\pi} (\int_{\mathbb{S}_{n-2}} p(\cos\theta)\overline{q(\cos\theta)}\, d\sigma_{n-2}(x))\sin^{n-2}\theta\, d\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}_{n-1}} p(x_n)\overline{q(x_n)}\, d\sigma_{n-1}(x)\,.
\end{aligned}
$$

La preuve d'unicité dans le théorème 3.7 prouve que le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour la famille $(1, ..., t^m, ...)$ et pour ce produit scalaire permet de retrouver les $p_m$, à des constantes de normalisation près. On en déduit la formule qui suit.

**Proposition 3.10.** (Formule de Rodrigues) *On a :*

$$
(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}p_m(t) = (-1)^m 2^{-m}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+m)}(\frac{d}{dt})^m(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m}.
$$

*Démonstration.* Soit

$$
q_m(t) = (1-t^2)^{-\frac{n-3}{2}}(\frac{d}{dt})^m(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m}
$$

. On remarque que $q_m$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m$. En effet, on a par récurrence sur $r$ que $(\frac{d}{dt})^r(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m}$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $t^k(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m-l}$ avec $2l-k=r$, avec $k,l\in\mathbb{N}$ et $l\leqslant m$.

Nous allons montrer que $q_m$ est orthogonal à $f_l$ pour $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ où $f_l(t)=t^l$ pour $0\leqslant l<m$ , ce qui assurera que $q_m$ est proportionnel a $p_m$.

Par intégration par parties, en notant $C$ une constante sans importance, nous avons après simplification des termes $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$ :

$$
\begin{aligned}
\langle q_m \mid f_l\rangle &= C\int_{-1}^{1}(\frac{d}{dt})^m(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m}t^l dt \\
&= C(-1)^l l!\int_{-1}^{1}(\frac{d}{dt})^{m-l}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m}dt \\
&= 0 \text{ car } l<m\,.
\end{aligned}
$$

Calculons enfin $q_m(1)$ : comme on l'a vu dans la preuve du théorème 3.7, $q_m$ se met sous la forme

$$
q_m(t) = \sum_{2l-k=m}\alpha_k t^k(1-t^2)^{m-l}
$$

et donc $q_m(1)=\alpha_m$. Ainsi, pour calculer $q_m(1)$, il suffit de calculer le coefficient devant $t^m$, i.e. celui obtenu en dérivant systématiquement le terme $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+m-l}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} q_m(1) &= (-1)^m 2^m (\frac{n-3}{2}+m)(\frac{n-3}{2}+m-1)\cdots(\frac{n-3}{2}+1) \\ &= (-1)^m 2^m \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+m)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve compte tenu du fait que $p_m(1) = 1$. □

**Définition 3.11.** Soit $(\psi_j)_{1\leqslant j\leqslant d_m}$ une base orthonormée de $\mathcal{Y}_m$, on pose

$$\forall x, y \in \mathbb{S}_{n-1},\ \mathcal{K}_m(x,y) = \sum_{j=1}^{d_m} \psi_j(x)\overline{\psi_j(y)}.$$

**Proposition 3.12.** (Propriétés de $K_m$) *On a, en notant $G$ le groupe $SO(n)$ :*

1. *$\mathcal{K}_m$ est indépendant de la base orthonormée choisie ;*
2. *$\mathcal{K}_m$ est $G$-invariant au sens où $\forall x, y \in \mathbb{S}_{n-1}, \forall g \in G, \mathcal{K}_m(g.x, g.y) = \mathcal{K}_m(x,y)$ ;*
3. *$\mathcal{K}_m$ est le noyau de la projection orthogonale $\pi_m : L^2(\mathbb{S}_{n-1},\sigma) \to \mathcal{Y}_m$ au sens où, si $f \in L^2(\mathbb{S}_{n-1},\sigma)$, $\pi_m f(x) = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} f(y)\mathcal{K}_m(x,y)\, d\sigma(y)$.*

*Démonstration.*

1. Si $(\psi'_1, \ldots, \psi'_{d_m})$ est une autre base orthonormée, il existe $U \in \mathcal{U}(d_m)$ telle que

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{d_m} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \vdots \\ \psi'_{d_m} \end{pmatrix}$$

   et donc pour $x, y \in \mathbb{S}_{n-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(x,y) &= (\psi_1(x), \ldots, \psi_{d_m}(x)) \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(y)} \\ \vdots \\ \overline{\psi_{d_m}(y)} \end{pmatrix} \\ &= \left(\psi'_1(x), \ldots, \psi'_{d_m}(x)\right)^t U\overline{U} \begin{pmatrix} \overline{\psi'_1(y)} \\ \vdots \\ \overline{\psi'_{d_m}(y)} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{d_m} \psi'_j(x)\psi'_j(y)\,. \end{aligned}$$

2. L'action de $G$ sur $\mathcal{Y}_m$ transforme une base orthonormée en une base orthonormée et $\mathcal{K}_m$ est indépendant de la base orthonormée choisie d'après le point précédent.

3. Cela se vérifie aisément si $f \in \mathcal{Y}_m$ (en décomposant sur la base $(\psi_1, \ldots, \psi_{d_m})$ ou si $f \in \mathcal{Y}_{m'}$ avec $m' \neq m$ (par orthogonalité). On peut ensuite conclure par le fait que, d'après le théorème 3.4, $L^2(\sigma) = \overline{\oplus}_{m \geqslant 0} \mathcal{Y}_m$. En effet, il suffit alors de remarquer que les deux termes de l'égalité sont continus par rapport à $f$ pour la norme de $L^2(\mathbb{S}_{n-1}, \sigma)$ : $\pi_m$ est une projection sur un espace de dimension finie et la norme de l'opérateur de droite se majore par la norme infinie de $\mathcal{K}_m$. □

**Proposition 3.13.** *On a* $\mathcal{K}_m(x, y) = d_m p_m((x \mid y))$.

*Démonstration.* Le noyau $\mathcal{K}_m$ est $G$-invariant par la première propriété de la proposition précédente et $G$ agit transitivement sur $\mathbb{S}_{n-1}$ donc $\mathcal{K}_m(x, x)$ est une constante que l'on note $C_m$. Comme $\mathcal{K}_m(x, x) = \sum_{j=1}^{d_m} |\psi_j(x)|^2$, on a en intégrant

$$C_m = \sum_{j=1}^{d_m} \int_{\mathbb{S}} |\psi_j(x)|^2 d\sigma(x) = d_m \, .$$

L'application $x \mapsto \mathcal{K}_m(x, e_n)$ appartient à $\mathcal{Y}_m$ et est $K$-invariante, donc elle est proportionnelle à $x \mapsto p_m(x_n)$ par le théorème 3.7. De plus on a $p_m(1) = 1$, donc $\mathcal{K}_m(x, e_n) = d_m p_m(x_n)$.
On conclut en utilisant le fait que $\mathcal{K}_m$ est $G$-invariant et que $G$ agit transitivement sur $\mathbb{S}_{n-1}$, car $x_n = (x|e_n)$ . □

**Corollaire 3.14.** *On a :*

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^{1} p_m(t)^2 (1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = \frac{1}{d_m},$$

*ce qui revient à dire que* $||p_m|| = \frac{1}{\sqrt{d_m}}$ *où la norme désigne soit celle correspondant au produit scalaire sur* $\mathbb{C}[X]$*, soit celle sur* $L^2(\sigma)$ *en identifiant* $p \in \mathbb{C}[X]$ *avec* $x \in \mathbb{S} \mapsto p(x_n)$.

*Démonstration.* Comme $\pi_m$ est une projection, on a $\pi_m^2 = \pi_m$, ce qui se traduit par

$$\forall x, y \in \mathbb{S}, \quad \int_{\mathbb{S}} \mathcal{K}_m(x, z) \mathcal{K}_m(z, y) d\sigma(z) = \mathcal{K}_m(x, y).$$

En prenant $x = y = e_n$ on obtient $d_m^2 \int_{\mathbb{S}} p_m(z_n)^2 d\sigma(z) = d_m$ et donc $\|p_m\|^2 = \int_{\mathbb{S}} p_m(z_n)^2 d\sigma(z) = \frac{1}{d_m}$. □

Comme on l'a vu au théorème 3.7, si $q(x) = (x_n + ix_1)^m$, on a $q \in \mathcal{H}_m$ et

$$\int_K q(kx) d\mu_0(k) = p_m(x_n) \; ;$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\forall x_n \in [-1, 1], \quad \int_{S_o} (x_n + i\sqrt{1 - x_n^2} u_1)^m d\sigma_0(u_1) = p_m(x_n) \, . \tag{2}$$

**Proposition 3.15.** *On a :*

$$(i) \quad p_m(\cos(\theta)) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^m \sin^{n-3}\varphi \, d\varphi.$$

$$(ii) \quad \forall t \in [-1;1]\,,\ |p_m(t)| \leqslant 1.$$

*Démonstration.* $(i)$ On utilise les formules d'intégration (Proposition 2.2) et la formule (2) :

$$\begin{aligned}
p_m(\cos\theta) &= \int_{\mathbb{S}_{n-2}} (\cos\theta + i\sin\theta\, u_1)^m d\sigma_0(u_1) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi \int_{\mathbb{S}_{n-3}} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^m \sigma_{n-3}(du) \sin^{n-3}\varphi d\varphi \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^m \sin^{n-3}\varphi \, d\varphi.
\end{aligned}$$

L'assertion $(ii)$ se vérifie grâce à la formule (2). □

Si l'on pose comme précédemment $\phi_m(x) = p_m(x_n)$, on a $\phi_m \in \mathcal{Y}_m$ et donc $\Delta_S \phi_m = -m(m+n-2)\phi_m$, c'est-à-dire par la formule (1) :

$$(\frac{d^2}{d\theta^2} + (n-2)\cot\theta \frac{d}{d\theta})p_m(\cos\theta) = -m(m+n-2)p_m(\cos\theta).$$

En posant $t = \cos\theta$ on obtient la propriété suivante :

**Proposition 3.16.** *Sur* $[-1,1]$,

$$\Big((1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - (n-1)t\frac{d}{dt}\Big)p_m = -m(m+n-2)p_m. \quad \square$$

### 3.3 Le théorème de Funk-Hecke

On s'intéresse à présent à une classe d'opérateurs définis sur l'ensemble des fonctions continues sur la sphère. On pourra les relier aux polynômes sphériques de façon à en déduire certains résultats.

**Définition 3.17.** On définit $\mathcal{A}$ l'ensemble des opérateurs $A$ de $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{S}_{n-1}))$ tels qu'il existe $a$ dans $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$ tel que pour toute fonction $f$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_{n-1})$ :

$$Af : x \mapsto \int_{\mathbb{S}_{n-1}} a((x|y))f(y)d\sigma(y).$$

On pourra noter que la transformée de Fourier - restreinte aux fonctions à support dans $\mathbb{S}_{n-1}$ et qui y sont continues - et la projection orthogonale $\pi_m : L^2(\mathbb{S}_{n-1},\sigma) \to \mathcal{Y}_m$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, avec respectivement $a : x \mapsto e^{ix}$ et $a = \mathcal{K}_m$. De plus, si $A \in \mathcal{A}$

alors $AT(g) = T(g)A$ : en effet,

$$\begin{aligned}(AT(g))f\,(x) &= \int_{\mathbb{S}} a((x \mid y))f(g^{-1}y)d\sigma(y)\\ &= \int_{\mathbb{S}} a((x \mid gy'))f(y')d\sigma(y')\\ &= \int_{\mathbb{S}} a((g^{-1}x \mid y)f(y)d\sigma(y)\\ &= T(g)(Af)(x).\end{aligned}$$

**Lemme 3.18.** *Soit $H$ une fonction continue sur $\mathbb{S}_{n-1} \times \mathbb{S}_{n-1}$ $SO(n)$-invariante, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall g \in SO(n),\ H(xg, yg) = H(x, y)$$

*Alors il existe une fonction $h$ continue sur $[-1, 1]$ telle que $H(x, y) = h((x \mid y))$.*

*Démonstration.* Sous ces hypothèses, $x \mapsto H(x, e_n)$ est zonale. Soit $h$ telle que $H(x, e_n) = h(x_n)$. On a alors par $SO(n)$-invariance de $H$ et de $H_1 : (x, y) \mapsto h((x \mid y))$, $H = H_1$. □

**Théorème 3.19.** *L'ensemble $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{S}_{n-1}))$.*

*Démonstration.* L'ensemble $\mathcal{A}$ est clairement un espace vectoriel.
Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On a :

$$\begin{aligned}ABf\,(x) &= \int_{\mathbb{S}} a((x \mid z)) \int_{\mathbb{S}} b((z \mid y))f(y)d\sigma(y)\, d\sigma(z)\\ &= \int_{\mathbb{S}} H(x, y)f(y)d\sigma(y)\end{aligned}$$

avec $H(x, y) = \int_{\mathbb{S}} a((x \mid z))b((z \mid y))d\sigma(z)$. L'application $H$ vérifie les hypothèses du lemme, donc il existe $h \in C([-1; 1], \mathbb{C})$ telle que $H(x, y) = h((x \mid y))$, d'où $AB \in \mathcal{A}$.
De plus, on a montré par la même occasion que $\mathcal{A}$ était commutative puisque $\forall x, y \in \mathbb{S}_{n-1},\ H(x, y) = H(y, x)$. □

**Théorème 3.20.** *Soit $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{Y}_m$ est un espace propre de $A$ pour la valeur propre*

$$\hat{a}(m) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{(n-1)}{2})} \int_{-1}^{1} a(t)p_m(t)(1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

*Démonstration.* On a vu que $\pi_m \in \mathcal{A}$ , donc $A\pi_m = \pi_m A$, ce qui entraîne que $A(\mathcal{Y}_m) \subset \mathcal{Y}_m$ et comme $A$ est $G$-invariant, pour tout $g \in G$, nous avons $A_{|\mathcal{Y}_m} T_m(g) = T_m(g)A_{|\mathcal{Y}_m}$. Cependant, $T_m$ est irréductible, donc par le lemme de Schur, il existe $\lambda_m \in \mathbb{C}$ tel que $A_{|\mathcal{Y}_m} = \lambda_m \operatorname{Id}_{\mathcal{Y}_m}$.
Pour trouver $\lambda_m$ on prend $f(x) = p_m(x_n)$ et on utilise la proposition 2.1 :

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= Af(e_n)\\
&= \int_{\mathbb{S}} a(y_n)p_m(y_n)d\sigma(y)\\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{-1}^{1} a(t)p_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\\
&= \hat{a}(m).
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.21.** *Soit* $a \in C([-1,1],\mathbb{C})$.

1. *La formule de Plancherel s'écrit*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} d_m|\hat{a}(m)|^2 = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{-1}^{1}|a(t)|^2(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt.$$

2. *Si* $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m|\hat{a}(m)| < +\infty$, *alors*

$$a(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m\,\hat{a}(m)\,p_m(t),$$

   *avec convergence uniforme sur* $[-1,1]$.

3. *Si* $a$ *est de classe* $C^{2k}$ *avec* $2k > \frac{n-1}{2}$ *alors* $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m|\hat{a}(m)| < +\infty$.

*Démonstration.*

1. Comme $(1,\ldots,t^m,\ldots)$ est une base de $\mathbb{C}[X]$, par le corollaire 3.11 $(\sqrt{d_m}p_m)_{m\geqslant 0}$ en est une base orthonormée pour $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$, produit scalaire sur $\mathbb{C}[X]$. De plus, par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([-1,1])$, lui-même dense dans $L^2([-1,1],\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt)$. Ainsi $(\sqrt{d_m}p_m)_{m\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$, et la formule annoncée vient de la formule de Plancherel appliquée à cette base.
2. Posons $a_0(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m\,\hat{a}(m)\,p_m(t)$. Comme $|p_m(t)| \leqslant 1$ sur $[-1,1]$ et puisque $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m|\hat{a}(m)| < +\infty$, on a convergence uniforme de cette série sur $[-1,1]$ et donc

en particulier $a_0$ est continue. Nous avons pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(a(t)-a_0(t))p_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \\
&\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\hat{a}(m) - \int_{-1}^{1}(\sum_{k=0}^{+\infty} d_k\hat{a}(k)p_k(t))p_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \\
&\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\hat{a}(m) - \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-1}^{1} d_k\hat{a}(k)p_k(t)p_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \\
&\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}(\hat{a}(m) - \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{k,m}\hat{a}(k)) \\
&\qquad = 0 \text{ par orthogonalité des } (p_k)_{k\geqslant 0} \text{ et par le corollaire 3.11}
\end{aligned}$$

Donc par le théorème de Weierstrass (car $\deg(p_m) = m$),

$$\forall f \in C([-1,1]),\ \int_{-1}^{1}(a(t)-a_0(t))f(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt = 0.$$

En appliquant ceci à $f = \overline{a - a_0}$ on trouve bien $a = a_0$.

3. Soit $L = (1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - (n-1)t\frac{d}{dt}$ . On a $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} L = \frac{d}{dt}((1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\frac{d}{dt})$ donc si $u, v \in C^2([-1;1])$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} Lu(t)v(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt &= \int_{-1}^{1} u'(t)v'(t)(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \int_{-1}^{1} Lv(t)u(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \quad \text{de même}
\end{aligned}$$

Comme de plus $Lp_m = -m(m+n-2)p_m$ , si $a$ est $\mathcal{C}^2$ alors

$$\widehat{La}(m) = -m(m+n-2)\hat{a}(m).$$

Si maintenant $a$ est $C^{2k}$ alors la formule de Plancherel donne

$$\sum_{m=0}^{+\infty} d_m(m(m+n-2))^{2k}|\hat{a}(m)|^2 = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{(n-1)}{2})}\int_{-1}^{1}|L^k a(t)|^2(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} d_m|\hat{a}(m)|^2 \leqslant (\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{d_m}{(m(m+n-2))^{2k}})(\sum_{m=1}^{+\infty} d_m(m(m+n-2))^{2k}|\hat{a}(m)|^2).$$

De plus $d_m = (2m+n-2)\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!}$ donc $d_m$ est polynomiale de degré $n-2$ en $m$ ce qui implique qu'il existe $C > 0$ tel que $d_m \leqslant C(m+1)^{n-2}$ .
Par conséquent, la série $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{d_m}{(m(m+n-2))^{2k}}$ converge si $2k > \frac{n-1}{2}$ et on a alors $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m|\hat{a}(m)| < +\infty$. □

Pour plus d'informations sur ces sujets, on se reportera à [Fa] dont le chapitre IX a constitué la principale source de la troisième partie de notre exposé.

## Pour aller plus loin

Nous donnons maintenant des exemples de thèmes qui peuvent poursuivre cet exposé. Sur les mesures de Haar, le cas localement compact mérite d'être approfondi. Une mesure de Haar à gauche n'est plus nécessairement une mesure de Haar à droite et la notion de module permet d'étendre certains théorèmes, voir par exemple [Na].
Sur le théorème de Banach-Tarski, on peut s'intéresser à la nécessité de l'axiome du choix dans la preuve. On peut aussi se demander s'il existe des mesures universelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ (additives et non finiment additives). Enfin un théorème prouvé en 1992 par Dougherty et Foreman [DF] montre qu'il n'est pas nécessaire de recourir à l'axiome du choix pour choquer l'intuition : si $A$ et $B$ sont deux ouverts bornés non vides de $\mathbb{R}^n$, il existe des ouverts $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$ tels que $A_i$ et $B_i$ se déduisent l'un de l'autre par isométrie et tels que $A$ (resp. $B$) soit contenu dans l'adhérence de l'union des $A_i$ (resp. des $B_i$).
Concernant les polynômes sphériques, on peut utiliser le théorème de Funk-Hecke avec l'opérateur transformée de Fourier pour obtenir certaines relations utiles. Les harmoniques sphériques en dimension 3, appelées *polynômes de Legendre*, occupent aussi un rôle important en physique quantique où ils sont vus comme fonctions propres du moment angulaire, voir par exemple [LeB].

## Références


[Co] D.L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.

[De] M. Deconinck, *Théorème de Banach-Tarski*, http ://www.dirk-k-lange.de/documents/BanachTarski.pdf, 2006.

[DF] R. Dougherty et M. Foreman, *Banach-Tarski Decompositions Using Sets with the Property of Baire*, http ://www.jstor.org/stable/2152721 ?seq, 1994.

[Fa] J. Faraut, *Analyse sur les groupes de Lie*, Calvage & Mounet, 2006.

[FH] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory. A first course*, Springer-Verlag, 1991.

[Gu] M. Guinot, *Le paradoxe de Banach-Tarski*, Aléas, 2002.

[LeB] M. Le Bellac, *Physique quantique*, Edp Sciences, 2003.

[LeG] J.-F. Le Gall, *Intégration, probabilités et processus aléatoires*, cours ENS, 2006.

[Mn] R. Mneimné et F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Eyrolles, 1986.

[Na] L. Nachbin, *The Haar Integral*, D. Van Nostrand Company, 1965.

[Pe] D. Perrin, *Aire et volume : Découpage et recollements*, http ://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf, 2006