

INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

Lionel Darondeau

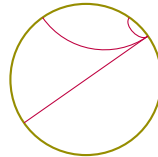
sur un sujet de thèse proposé par Joël Merker :

DÉGÉNÉRESCENCE ALGÈBRIQUE DES COURBES HOLOMORPHES ENTIÈRES À VALEURS DANS DES HYPERSURFACES PROJECTIVES.

1. INTRODUCTION À L'HYPERBOLICITÉ

1.1. **Hyperbolicité.** On note \mathbb{D} le disque unité du plan complexe, qui est muni de la distance de Poincaré :

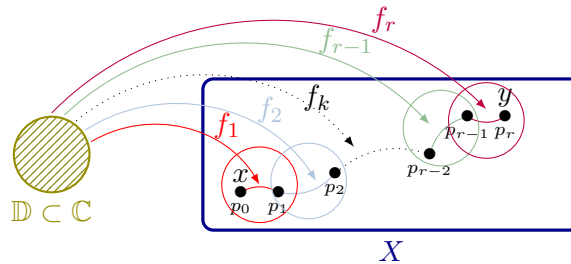
$$ds^2(z) := \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}.$$



$\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$

Soit X une variété analytique complexe connexe. On appelle *disque holomorphe* une application holomorphe $f: \mathbb{D} \rightarrow X$. Soient x et y deux points d'une variété analytique complexe X . On appelle *chaîne de Kobayashi* [Kob70] entre x et y une suite de segments de courbes holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} à valeurs dans X dont la concaténation est un chemin de x à y .

Définition (Chaîne de Kobayashi). Une chaîne de Kobayashi est une suite finie de disques holomorphes $f_1(\mathbb{D}), \dots, f_r(\mathbb{D})$, et de points $p_k \in f_k(\mathbb{D}) \cap f_{k+1}(\mathbb{D})$ pris dans l'intersection de deux disques successifs.

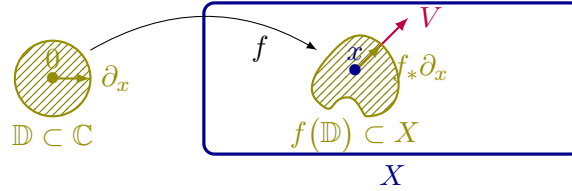


On introduit la *pseudo-distance de Kobayashi* comme étant la longueur minimale des chaînes de Kobayashi dans les paramétrisations par \mathbb{D} , muni de la distance de Poincaré.

La *pseudo-métrique de Kobayashi-Royden* est une version infinitésimale de la pseudo-distance de Kobayashi : Soit X une variété analytique complexe et $x \in X$ un de ses points. On appelle *disque holomorphe centré* une application $f: \mathbb{D} \rightarrow X$, $f(0) = x$. Pour tout vecteur $V \in T_x X$, on définit la pseudo-norme de Kobayashi-Royden $\|V\|_x$ de V en x comme l'inverse de la vitesse maximale d'une courbe holomorphe locale sur X en x :

Définition (Pseudo-norme de Kobayashi-Royden). Pour tout vecteur $V \in T_{X,x}$, on définit :

$$\|V\|_x := \inf \left\{ \alpha : \exists f: \mathbb{D} \rightarrow X, f(0) = x, f_*(\partial_x) = \frac{V}{\alpha} \right\}.$$



Exemple. Soit $f: \mathbb{D} \rightarrow X$ un disque holomorphe centré en x , tel que :

$$\begin{cases} f(0) &= x \in X. \\ f_*(\partial_x) &= V \in T_{X,x}. \end{cases}$$

Si f est la restriction à \mathbb{D} d'une application holomorphe $\mathbb{D}(R) \rightarrow X$ du disque complexe de rayon R à valeurs dans X , alors :

$$\|V\|_x \leq \frac{1}{R}.$$

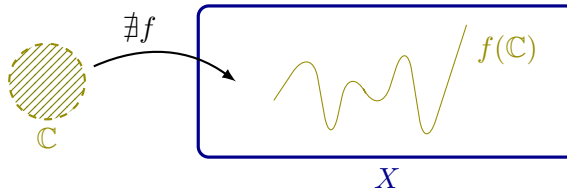
On peut donc interpréter $\|V\|_x$ comme l'inverse de la taille maximal des disques holomorphes centrés en x tangents à V . En particulier, si f est la restriction à \mathbb{D} d'une application entière, $\|f_* \partial_x\| = 0$.

D'après un théorème de Royden, cette métrique infinitésimale induit par intégration la pseudo-distance de Kobayashi.

On dispose de deux définitions de l'hyperbolicité :

Définition. On dit d'une variété analytique complexe qu'elle est *hyperbolique au sens de Kobayashi*, si la pseudo-distance de Kobayashi est une vraie distance.

Définition. On dit d'une variété analytique complexe X qu'elle est *hyperbolique au sens de Brody* s'il n'existe pas d'application $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ holomorphe entière non-constante à valeurs dans X .



En utilisant la pseudo-norme de Kobayashi-Royden et notre exemple on montre aisément :

Proposition 1. *Une variété hyperbolique au sens de Kobayashi est hyperbolique au sens de Brody.*

La réciproque est vraie dans le cas compact, c'est le critère de Brody :

Théorème 1. [Bro78] *Toute variété compacte hyperbolique au sens de Brody est hyperbolique au sens de Kobayashi.*

La démonstration utilise essentiellement le lemme suivant :

Proposition 2 (Lemme de reparamétrisation de Brody). *Soit X une variété complexe lisse, munie d'une métrique hermitienne h et $f: \mathbb{D} \rightarrow X$ un disque holomorphe. Pour tout $r \in [0, 1)$ il existe $R \geq r \|f'(0)\|_h$ et un biholomorphisme $\psi: \mathbb{D}(R) \rightarrow \mathbb{D}(r)$ tels que :*

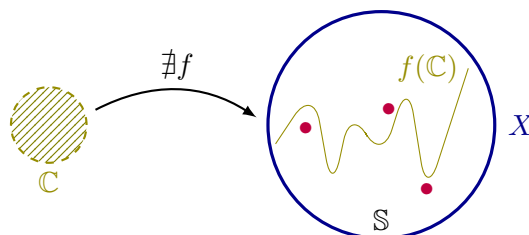
$$\begin{cases} \|(f \circ \psi)'(0)\|_h &= 1. \\ \|(f \circ \psi)'(t)\|_h &\leq \frac{1}{1 - |\frac{t}{R}|^2}. \end{cases}$$

L'idée de ce lemme est la suivante : on regarde le point où la dérivée est la plus grande et on le ramène en zéro. Quitte à dilater le disque unité, on ramène la dérivée en zéro à 1. Si X n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi, par le théorème de Royden il existe des applications $\mathbb{D} \rightarrow X$ de dérivée arbitrairement grande. Par le lemme de reparamétrisation de Brody, on se ramène à des applications holomorphes de dérivée maximale en zéro valant 1, définies sur des disques arbitrairement grands. Étant donnée une suite de telles fonctions définies sur des disques de rayon croissant vers l'infini, on peut extraire par compacité une sous-suite convergente. On montre ensuite qu'elle converge vers une fonction non-constante définie sur le plan complexe tout entier. La variété X n'est donc pas hyperbolique au sens de Brody.

Winkelmann [Win07] montre un joli exemple de variété où courbes de Brody et courbes entières ont un comportement très différent.

1.2. Exemples historiques. On présente ici un résultat d'hyperbolicité bien connu : le petit théorème de Picard, et le théorème de Green qui en est une généralisation.

Théorème 2 (Picard). *Il n'existe pas d'application $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ holomorphe entière non-constante à valeurs dans le complémentaire X de trois points dans la sphère de Riemann $\mathbb{S} = \hat{\mathbb{C}}$.*



Démonstration. Le revêtement universel du complémentaire X de trois points dans la sphère de Riemann est le disque unité $\mathbb{C} \supset \mathbb{D} \xrightarrow{\pi} X$. Par la propriété de relèvement du revêtement universel, toute application holomorphe $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ se relève donc en une application holomorphe $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ telle que :

$$\pi \circ \tilde{f} = f.$$

Par le lemme de Liouville, toute application holomorphe entière $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ est constante. En composant par la projection π , on obtient le résultat. \square

Par définition, l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ est l'espace des droites de \mathbb{C}^{n+1} . Il peut aussi être vu comme le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation être proportionnels. Par exemple, l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ s'identifie à la sphère de Riemann \mathbb{S} .

Définition (Hyperplans en position générale). Dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$, les $(m+1)$ hyperplans $H_0 = \ker l_0, \dots, H_m = \ker l_m$ sont dits en position générale lorsque $(n+1)$ quelconques des formes linéaires l_i sont toujours linéairement indépendantes

On admet la généralisation suivante du petit théorème de Picard :

Théorème 3 (Green). *Il n'existe pas d'application $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ holomorphe entière non-constante à valeurs dans le complémentaire X de $2n+1$ hyperplans en position générale dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.*

1.3. **Conjectures.** Deux conjectures célèbres animent depuis plusieurs décennies le domaine de l'hyperbolicité. Nous les formulons dans ce mémoire dans le cadre des hypersurfaces projectives. On appelle *coordonnées homogènes*

$$[Z_0 : Z_1 : \dots : Z_{n+1}]$$

de la droite vectorielle $\Delta \subset \mathbb{C}^{n+2}$ les coordonnées (à dilatation complexe près) d'un vecteur directeur $(Z_0, Z_1, \dots, Z_{n+1})$ de Δ . Une hypersurface algébrique projective est définie par une seule équation polynomiale en coordonnées homogènes :

$$R = \sum_{|\alpha|=d} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} Z_0^{\alpha_1} \dots Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

Deux polynômes proportionnels définissent la même hypersurface, on peut donc projeter l'espace (des coefficients) des équations définissantes. Le *degré* de l'hypersurface X est par définition le degré du polynôme R qui la définit.

Définition. Un *ouvert de Zariski* est le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique.

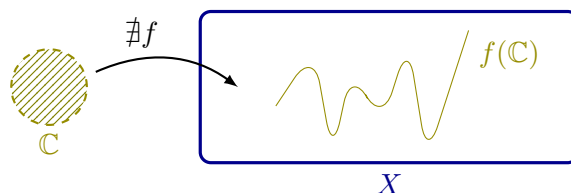
Définition (Hypersurface générique). Un ensemble *générique* d'hypersurfaces algébriques projectives est un ouvert de Zariski dans l'espace projectivisé des coefficients des équations définissantes.

Conjecture de Kobayashi. En tenant compte du critère de Brody et de la minoration du degré optimal prouvée par Zaïdenberg [Zai87], on peut reformuler une conjecture émise par Kobayashi en 1970 [Kob70] :

Conjecture 1. Soit $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ une hypersurface algébrique complexe projective lisse générique vérifiant :

$$\deg X \geq 2 \dim X + 1,$$

alors toute courbe holomorphe entière sur X est constante.



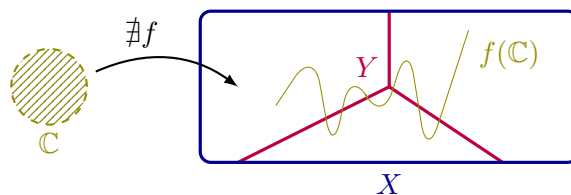
Conjecture de Green-Griffiths. Plus généralement, on parle de *dégénérescence algébrique* des courbes holomorphes entières à valeurs dans X si les fonctions holomorphes entières (non-constantes) ont leurs valeurs confinées dans une sous-variété algébrique propre qui ne dépend pas de la fonction.

En 1979, Green et Griffiths [GG80] ont conjecturé la dégénérescence de toute hypersurface algébrique projective X de type général (i.e. vérifiant $\deg X \geq \dim X + 3$) :

Conjecture 2. Soit $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ une hypersurface algébrique complexe projective lisse générique vérifiant la condition :

$$\deg X \geq \dim X + 3,$$

alors il existe une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ contenant toutes les courbes holomorphes entières non constantes sur X .



La condition est plus faible que la condition de la conjecture de Kobayashi, c'est pourquoi la classe d'applications qui peuvent apparaître est plus grande : plus le degré est grand, moins il y a d'applications entières.

2. INTRODUCTION AUX DIFFÉRENTIELLES DE JETS

2.1. Approche extrinsèque/intrinsèque. Dans un système de coordonnées homogènes $[Z_0, Z_1, \dots, Z_n]$, une hypersurface algébrique projective de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ de degré d est le lieu d'annulation d'une équation polynomiale de degré $|\alpha| = d$:

$$P = \sum A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} Z_0^{\alpha_1} \dots Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}},$$

où il y a $N = \binom{n+1}{d}$ paramètre $A_{*, \dots, *}$.

Définition. L'hypersurface universelle de degré d de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ est le lieu d'annulation $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ du polynôme général de degré d :

$$P_d(A_{*, \dots, *}; Z_0, Z_1, \dots, Z_{n+1}) := \sum_{|\alpha|=d} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} Z_0^{\alpha_1} \dots Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

L'intersection de l'hypersurface universelle avec $\{A_{*, \dots, *}\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ est l'hypersurface $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ de degré d définie par l'équation à coefficients fixés :

$$\sum A_{*, \dots, *} Z_0^{\alpha_1} \dots Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = 0.$$

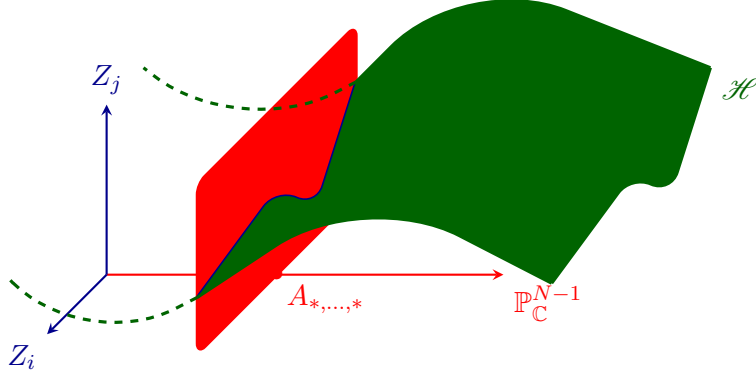


FIGURE 1. *

FIGURE : L'hypersurface universelle.

On peut donc voir les hypersurfaces projectives dans \mathcal{H} (approche extrinsèque), ou en coordonnées locales (approche intrinsèque).

Soit X une hypersurface projective définie par le polynôme R et soit $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ une application holomorphe entière à valeur dans X . La dégénérescence algébrique de f correspond à la donnée de l'équation algébrique supplémentaire d'une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ satisfaite par tout point $f(\xi): \xi \in \mathbb{C}$ de l'image de f . La contrainte $f(\mathbb{C}) \subset X$ donne une équation algébrique qui doit être satisfaite par f :

$$R \circ f \equiv \mathbf{0}.$$

Cette équation contient implicitement des équations différentielles algébriques supplémentaires qui doivent être satisfaites par f et ses dérivées en tout point de l'image de f et obtenues par dérivations successives. On aimerait connaître assez d'équations différentielles algébriques pour pouvoir effectuer une élimination algébrique des dérivées de f , et ainsi obtenir une équation différentielle algébrique d'ordre zéro *i.e.* la dégénérescence algébrique. Ce problème a été résolu par Siu [SY96] dans le cas $n = 2$ mais on ne sait pas le faire pour $n > 2$. On utilise donc en remplacement une approche intrinsèque — en coordonnées locales — pour trouver des équations supplémentaires.

Soit X^n une variété complexe de dimension $n \geq 2$. Soient (x^1, \dots, x^n) des coordonnées locales holomorphes centrées en un point x_0 de X . On considère une application holomorphe locale $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ définie dans ces coordonnées par $\xi \mapsto (f^1(\xi), \dots, f^n(\xi))$. Pour tout entier λ on introduit la *variable indépendante* x_λ^i associée à la dérivation

$$x_\lambda^i \leftrightarrow \frac{\partial^\lambda f^i}{\partial \xi^\lambda}.$$

On considère la *dilatation* de rapport complexe c définie sur l'espace-source \mathbb{C} qui induit une action sur les fonctions par composition à droite. Dans les coordonnées-source dilatées $c \cdot \xi$, la dérivée d'ordre $\lambda \in \mathbb{N}^p$ de la i -ème composante f^i de l'application holomorphe locale $f: \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^n$ vaut de façon évidente :

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial \xi^\lambda} (f^i \circ c) = c^\lambda \frac{\partial^\lambda}{\partial \xi^\lambda} (f^i) \circ c.$$

En accord avec cette formule de dérivation, il est naturel de poser pour chaque variable de jet x_λ^i associée, pour tout $c \in \mathbb{C}$:

$$(*) \quad c \cdot x_\lambda^i := c^\lambda x_\lambda^i.$$

Soit $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$ un *germe de courbe holomorphe* à valeurs dans l'hypersurface X . On note $J^\kappa f$ le κ -jet de l'application f :

$$J^\kappa f := (x_1, x_2, \dots, x_\kappa).$$

2.1.1. Différentielles de jets de Green-Griffiths.

Définition (κ -jets). Le fibré des κ -jets de courbes holomorphes $J_\kappa \xrightarrow{\pi} X$ est l'ensemble des classes d'équivalences des applications holomorphes $\mathbb{C} \rightarrow X$ pour la relation d'équivalence : $f \sim g$ si les dérivées coïncident à l'ordre κ au point x .

C'est un fibré holomorphe. La projection π est l'évaluation à l'origine. L'exemple des polynômes montre que tout κ -jet peut être représenté par une fonction holomorphe locale. La fibre de J_κ s'identifie donc par la formule de Taylor à l'espace vectoriel engendré par les variables indépendantes x_λ^i avec $\lambda \leq \kappa$: $J_{\kappa, x} \simeq (\mathbb{C}^n)^\kappa$.

Proposition 3 (Faà di Bruno). Soient $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ une application de classe C^κ et $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un changement de variable de classe C^κ , alors :

$$(f \circ \psi)^{(\kappa)} = \sum_{k=1}^{\kappa} f^{(k)} \circ \psi \cdot \sum_{p(\kappa, k)} \frac{\kappa!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_\kappa!} \prod_{i=1}^{\kappa} \left(\frac{\psi^{(i)}}{i!} \right)^{\lambda_i},$$

où $p(\kappa, k)$ est l'ensemble des partitions $\lambda_1, \dots, \lambda_\kappa$ de k vérifiant : $\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i = k, \sum_{i=1}^{\kappa} i \lambda_i = \kappa$.

Corollaire 1. *pour $\kappa = 1$ $J_1 = T_X$ est un fibré vectoriel mais J_κ n'est pas un fibré vectoriel pour $\kappa > 1$.*

On considère les opérateurs différentiels algébriques d'ordre κ . Dans le repère local (x^1, \dots, x^n) , ils sont de la forme générale :

$$P(J^\kappa f) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa) \in (\mathbb{N}^n)^\kappa} a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa}(f) \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_\kappa^{\alpha_\kappa},$$

où les fonctions $a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes.

Définition (degré). On gradue l'algèbre de ces opérateurs par le degré (ou poids) correspondant au nombre de "primes" :

$$\deg(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_\kappa^{\alpha_\kappa}) := |\alpha_1| + 2|\alpha_2| + \cdots + \kappa|\alpha_\kappa|.$$

L'action de \mathbb{C} sur les monômes découlant naturellement de (*) est :

$$c \cdot (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_\kappa^{\alpha_\kappa}) = c^{\deg}(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_\kappa^{\alpha_\kappa}).$$

Si on désire généraliser cette action aux combinaisons linéaires quelconques de monômes, on se heurte à un problème d'homogénéité. On préfère donc désormais employer des polynômes P homogènes de poids (quelconque) $m \in \mathbb{N}$. C'est à dire les polynômes vérifiant pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$:

$$z \cdot P = z^m P.$$

Ils sont linéairement engendrés par les monômes de poids m . Pour tout entier m , on appelle *fibré de Green-Griffiths des différentielles de jets* d'ordre κ et de poids m et on note :

$$\mathcal{E}_{n, \kappa, m}^{GG} T_X^* \subset \mathbb{C}[J_{n, \kappa} X]$$

le sous-espace homogène de degré m des opérateurs différentiels algébriques d'ordre κ (i.e. l'ensemble des polynômes en les variables de κ -jets d'applications holomorphes $\mathbb{C} \rightarrow X^n$ homogènes de poids m). Cette appellation est cohérente puisque :

Proposition 4. *Pour tout entiers n, κ, m , le fibré des différentielles de jets de Green-Griffiths $\mathcal{E}_{n, \kappa, m}^{GG} T_X^*$ est un fibré vectoriel au-dessus de sa base X .*

Démonstration. Soit $\psi: x \mapsto y$ un changement de carte sur X , on note $P \mapsto P^\psi$ la transformation des polynômes homogènes sous l'effet de ce changement de carte. On note $x_\lambda^i \mapsto (x_\lambda^i)^\psi$ la donnée sur la base $\{x_\lambda^i\}$ de la fonction de transition associée à ψ du fibré J_κ . La formule de Faà di Bruno (Prop. 3) décrit précisément la transformation des variables de jets. On obtient un polynôme homogène avec le même multipoids, et dont les coefficients dépendent linéairement du κ -jet $J^\kappa \psi$ du changement de carte. On peut ensuite conclure pour tous les polynômes, puisque $P \mapsto P^\psi$ est un morphisme d'algèbres sur $\mathbb{C}[J_\kappa]$. \square

2.1.2. *Filtration sur l'espace des jets.* Intuitivement, un polynôme de poids m ressemble à une combinaison linéaire de produits (tensoriels) de monômes élémentaires (individuellement symétriques par le lemme de Schwartz) $x_k^{I_k}$. En notant $\ell_k = |I_k|$, il est tentant d'écrire une décomposition *locale* sous la forme (volontairement imprécise) :

$$\mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} = \sum \mathcal{S}^{\ell_1}(T_X^*) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}^{\ell_a}(T_X^*).$$

Cependant l'égalité *sur les fibrés* n'est pas satisfaite. Considérons les changements de trivialisations associés à un changement de carte ψ sur la base X , donnés par leur expression sur les monômes élémentaires :

Lemme 1 (Changement de trivivisation sur l'algèbre symétrique du fibré cotangent). *Pour tout changement de carte ψ sur la base X et pour tout entier ℓ , on note $\text{Cov}_{\psi,\ell}$ le changement de trivivisation sur le fibré $\mathcal{S}^\ell T_X^*$. On se donne un système de coordonnées e_1, \dots, e_n sur T_X^* . Pour $\ell = 1$, en notant $y = \psi(x)$ on a :*

$$\begin{aligned} ((\psi_*\omega)_y)^i &= (d\psi_x \cdot \omega_x)^i \\ &= \sum (\partial_j \psi^i(x) dx^j) \cdot \omega_x \\ &= \sum \partial_j \psi^i d\omega^j \end{aligned}$$

Soit

$$\text{Cov}_{\psi,1}(\omega^i) := \sum \partial_j \psi^i d\omega^j$$

Corollaire 2 (de la formule de Faà di Bruno). *Soit $\lambda \in \mathbb{N}^p$ un multientier de longueur ℓ . Par un changement de coordonnées à l'arrivée $x \mapsto \psi(x)$, le monôme x_λ^i est transformé en $(x_\lambda^i)^\psi$ et le terme de plus grand poids de x_λ^i*

$$\text{Dom}(x_\lambda^i)^\psi = \text{Cov}_\psi(x_\lambda^i)$$

se comporte comme la dérivée covariante sur $\mathcal{S}^\ell T_X^$. De plus,*

$$\text{Dom}((x_\lambda^i x_\lambda^j)^\psi) = \text{Cov}_\psi(x_\lambda^i x_\lambda^j).$$

Démonstration. C'est immédiat en ne gardant que les termes dominants dans la formule de Faà di Bruno. Seul le terme pour $l = 1$ permet d'obtenir des monômes élémentaires d'indice λ donc le terme dominant et le terme $l = 1$ et alors un calcul simple montre qu'on a coeff termes identiques. On obtient donc

$$\text{Dom}(X_\lambda^i)^\psi = \sum_{i \in [1,n]} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} X_\lambda^i.$$

La deuxième partie se démontre aussi facilement en constatant que :

- i) Un seul indice intervient dans le terme dominant d'un polynôme homogène.
- ii) Si les termes dominant de deux monômes font intervenir le même multi-indice, le terme dominant de leur produit est le produit de leurs termes dominants.

□

La formule de Faà di Bruno montre que l'application de transition fait apparaître des termes d'ordres inférieurs. Notre première intuition n'est donc pas tout à fait rigoureuse. Mais quitte à négliger ces termes, les indéterminées se comportent de la façon attendue. Cette approximation revient à passer à un espace gradué sur $\mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG}$. On obtient le résultat :

Proposition 5. *L'espace gradué du fibré des différentielles de jets de Green-Griffiths se décompose en somme de produits tensoriels d'algèbres symétriques du fibré cotangent. Plus précisément :*

$$(1) \quad \text{Gr } \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} = \sum_{\ell_1 \cdot 1 + \dots + \ell_\kappa \cdot \kappa = m} \mathcal{S}^{\ell_1}(T_X^*) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}^{\ell_\kappa}(T_X^*).$$

Démonstration. En s'inspirant des démarches de Green-Griffiths et de Joël Merker [Mer10], on introduit pour tout rang $1 \leq k \leq \kappa$ et tout poids m le sous-fibré du fibré de jets de Green-Griffith $G_{k,m} \subset \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG}$ constitué des polynômes ne faisant intervenir que des indéterminées $\{X_\lambda^i : \lambda \leq U_k\}$ de poids inférieur ou égal à k :

$$G_{k,m} := E_{n,\kappa,m}^{GG} \cap \langle X_\lambda^i : 1 \leq \lambda \leq k \rangle_{\text{alg}}.$$

On vérifie aisément à l'aide la formule de Faà di Bruno qu'il s'agit d'un sous-fibré. On une filtration naturelle sur $G_{k,m}$ associée au rôle particulier de x_k . On note \mathcal{F}_k^ℓ le sous-fibré de $G_{k,m}$ constitués de polynômes où x_k apparaît avec une puissance de longueur au plus ℓ . On a la filtration croissante :

$$(2) \quad \{0\} \subset \mathcal{F}_k^0 \subset \mathcal{F}_k^1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_k^{\ell_k} = G_{k,m}$$

où on peut expliciter la puissance maximale ℓ_k comme le plus grand entier ℓ tel que :

$$m - \ell k \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire :

$$\ell_k := \lfloor \frac{m}{k} \rfloor.$$

On note $\mathcal{G}_k^\ell := \mathcal{F}_k^\ell / \mathcal{F}_k^{\ell-1}$ les coefficients de l'espace gradué.

Lemme 2. *Le fibré \mathcal{G}_k^ℓ s'identifie à $G_{k-1,m-\ell k} \otimes \mathcal{S}^\ell(T_X^*)$.*

Démonstration. Ce sont deux fibrés sur la même base. Il suffit de montrer qu'ils sont définis par les mêmes fonctions de transition. Toute classe de \mathcal{G}_k^ℓ est représentée par un polynôme $P x_k^\ell$ où $P \in G_{k-1,m-\ell k}$. Sous l'effet d'un changement de trivialisations ψ par le corollaire 2 :

$$\begin{aligned} (P x_k^\ell)^\psi &= P^\psi (x_k^\psi)^\ell \\ &= P^\psi \left(\text{Cov}_\psi(x_k^\ell) + \left((x_k^\psi)^\ell - \text{Dom}((x_k^\psi)^\ell) \right) \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$(P x_k^\ell)^\psi - P^\psi \text{Cov}_\psi(x_k^\ell) \in \mathcal{F}_k^{\ell-1}$$

□

En appliquant le lemme à chaque terme de la décomposition de $G_{k,M}$ on obtient :

$$G_{k,M} = \sum_{\ell=0}^{\ell_k} G_{k-1,m-\ell k} \otimes \mathcal{S}^\ell(T_X^*).$$

En observant que $\mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} = G_{\kappa,m}$, on en déduit l'équation (1) par itération. □

2.2. Décomposition en fibrés de Schur. On veut continuer la décomposition de $\text{Gr } \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG}$ pour éliminer les produits tensoriels, peu manipulables dans les opérations menées ultérieurement. On utilise un objet combinatoire qui identifie les représentations irréductibles de $\text{Gl}_p(\mathbb{C})$, et une classe mieux étudiée de fibrés généralisant (en les "interpolant") les puissances symétriques et extérieures : les fibrés de Schur. On s'inscrit dans la question très présente en calcul de la forme finale d'un objet mathématique : l'équation (1) joue *a posteriori* le rôle d'une décomposition intermédiaire, mettant en jeu des objets encore trop compliqués (des produits tensoriels).

Un *diagramme de Young* est un ensemble de cases justifiées à gauche et en haut. En comptant le nombre de cases dans chaque ligne, on peut l'interpréter comme la représentation graphique d'une partition d'un entier. On utilisera les lettres grec-

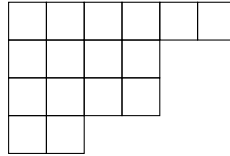


FIGURE 2. Le diagramme de Young associé à la partition $16 = 6 + 4 + 4 + 2$.

ques $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pour noter les partitions entières, identifiées avec les diagrammes de Young. On note $|\alpha|$ l'entier partitionné par α . Une partition $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est dite *ordonnée* si : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. À chaque diagramme de Young correspond une unique partition ordonnée. Un *tableau (semi-standard) de Young* est un diagramme de Young dont les cases sont remplies par des entiers :

- strictement croissants selon les colonnes.
- croissants selon les lignes.

1	2	2	3	3	5
2	3	5	5		
4	4	6	6		
5	6				

FIGURE 3. Un tableau de Young associé à la partition $16 = 6 + 4 + 4 + 2$.

Le tableau T canoniquement associé à un diagramme α à d cases est le tableau obtenu en numérotant ses cases de 1 à d de droite à gauche et de haut en bas.

On peut alors immédiatement définir une action de \mathfrak{S}_d sur les tableaux de forme α [FH91, §4]. On définit alors deux sous-groupes de \mathfrak{S}_d :

P_α : comme le sous-groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, d\}$ qui préservent chaque ligne de T .

Q_α : comme le sous-groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, d\}$ qui préservent chaque colonne de T .

Définition (symétriseur de Young). Pour chaque diagramme de Young α , on définit un élément de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ de la façon suivante :

$$c_\alpha := \sum_{\sigma \in P_\alpha} e_\sigma \cdot \sum_{\sigma' \in Q_\alpha} \text{sgn}(\sigma') e_{\sigma'}$$

Soit $V \simeq \mathbb{C}^n$ un espace vectoriel complexe de dimension n . Soit α une partition de l'entier d . On note $V^{\otimes \alpha}$ une version de $V^{\otimes d}$ où les versions de V sont indexées par les cases du diagramme α . On a alors une action naturelle du symétriseur de Young c_α sur $V^{\otimes \alpha}$.

Proposition 6 (Module de Schur). [FH91, §6] *Les représentations irréductibles de $\text{Gl}(V)$ sont les espaces vectoriels :*

$$\mathcal{S}^\alpha(V) := c_\alpha(V^{\otimes \alpha}).$$

Exemples :

- $\mathcal{S}^{(n,0,\dots,0)}(V) = \mathcal{S}^n(V) = V \odot \dots \odot V$.
- $\mathcal{S}^{(1,1,\dots,1,0,\dots,0)}(V) = \bigwedge^n(V) = V \wedge \dots \wedge V$.
- un autre cas *simple* :

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_T(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3) &= \frac{1}{3}(id - (13)) \circ (id + (12))(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3) \\ &= (e_1 \odot e_2) \wedge e_3 \end{aligned}$$

(symétrie par rapport aux lignes, antisymétrie par rapport aux colonnes.)

$$\mathcal{S}^{(2,1,0)}(V) = (V \odot V) \wedge V.$$

Proposition 7 (Fibré de Schur). *Les fibres $\mathcal{S}^\alpha(T_{X,x}^*)$ se recollent en un fibré vectoriel au-dessus de X .*

Les algèbres symétrique sont donc des fibrés de Schur très simples. On peut décrire précisément la décomposition en fibrés de Schur du produit d'un fibré de Schur par une algèbre symétrique :

Proposition 8 (Formule de Pieri). [Ful97] *Pour tout diagramme de Young α , on a :*

$$\mathcal{S}^\alpha \otimes \mathcal{S}^n = \sum_{\beta} \mathcal{S}^\beta,$$

où on obtient les diagrammes β à partir de α en ajoutant n cases sans en placer deux dans la même colonne.

Exemple :

$$\mathcal{S}^{(2,1,0)} \otimes \mathcal{S}^{(2,0,0)} = \mathcal{S}^{(2,2,1)} + \mathcal{S}^{(3,1,1)} + \mathcal{S}^{(3,2,0)} + \mathcal{S}^{(4,1,0)}.$$

Les deux conséquences suivantes se déduisent immédiatement de cette règle de Pieri :

Corollaire 3. (i) Si α est une partition de l'entier n telle que $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$, alors :

$$\mathcal{S}^\alpha(T_X^*) \otimes \mathcal{S}^q(T_X^*) = \sum \nu_\lambda \cdot \mathcal{S}^\lambda(T_X^*),$$

où les termes $\mathcal{S}^\lambda(T_X^*)$ qui apparaissent avec une multiplicité $\nu_\lambda \in \mathbb{N}$ non nulle vérifient :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0.$$

(ii) Soit $k < n$ et soient (q_1, \dots, q_k) des entiers. Le produit tensoriel d'algèbres symétriques :

$$\mathcal{S}^{q_1}(T_X^*) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}^{q_k}(T_X^*) = \sum \nu_\lambda \cdot \mathcal{S}^\lambda(T_X^*)$$

se décompose en somme de représentations irréductibles, où les termes $\mathcal{S}^\lambda(T_X^*)$ qui apparaissent avec une multiplicité $\nu_\lambda \in \mathbb{N}$ non nulle vérifient :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Démonstration. La taille de la première colonne peut augmenter d'au plus une case à chaque fois qu'on multiplie par une algèbre symétrique. \square

Cette formule de Pieri est l'opération élémentaire qui permet en l'itérant de calculer explicitement le produit d'un nombre quelconque de polynômes complètement symétriques. Soit T un tableau, on appelle *contenu* de T le multientier μ comptant le nombre d'occurrences des entiers dans le remplissage de T , l'entier k apparaît donc μ_k fois dans les cases de T . On appelle *nombre de Kostka* l'entier $K_\alpha(\mu)$ comptant le nombre de tableaux (semi-standards) de forme α et de contenu μ . On a alors le résultat suivant :

Proposition 9. [Ful97] Pour toute partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j)$ on a la décomposition :

$$\mathcal{S}^{(\mu_1)} \otimes \mathcal{S}^{(\mu_2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}^{(\mu_j)} = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(\mu) \cdot \mathcal{S}^{\alpha},$$

où α désigne une partition quelconque.

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Gr } \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} &= \sum_{\mathcal{P}_M^\kappa} \mathcal{S}^{\ell_1}(T_X^*) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}^{\ell_\kappa}(T_X^*). \\ &= \sum_{\ell \in \mathcal{P}_M^\kappa} \sum_{\alpha \leq \ell} K_{\alpha}(\ell) \mathcal{S}^{\alpha}(T_X^*). \end{aligned}$$

Soit, si on note

$$M_\alpha^{\kappa, M} := \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{P}_M^\kappa \\ \ell \triangleright \alpha}} K_\alpha(\ell),$$

la multiplicité du terme \mathcal{S}_α :

$$\text{Gr } \mathcal{E}_{n, \kappa, m}^{GG} X = \bigoplus_{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0} \mathcal{S}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}(T_X^*)^{\oplus M_\alpha^{\kappa, M}}$$

où $M_\alpha^{\kappa, M}$ est le nombre de tableaux de forme α de contenu $\ell \in \mathcal{P}_M^\kappa$.

Il n'existe pas de formule satisfaisante pour les multiplicités $M_\alpha^{\kappa, M}$ et il est trivial qu'en regroupant les tableaux par forme et par contenu on obtient une partition disjointe de l'ensemble des tableaux de Young. On décide donc d'indexer les modules de Schur par les tableaux de Young, plutôt que par les partitions ordonnées. On note donc $\ell(YT) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ le contenu du tableau de Young YT et on note $(\alpha_1(YT), \alpha_2(YT), \dots, \alpha_r(YT))$ le diagramme de Young sous-jacent (YT sera souvent sous-entendu dans la suite). Il est élémentaire, par antisymétrie, qu'un diagramme de Young avec plus de $\dim(X) = n$ lignes donne un module de Schur nul sur T_X^* . Quitte à rajouter des lignes vides, on peut donc considérer uniquement les tableaux de forme $(\alpha_1(YT), \alpha_2(YT), \dots, \alpha_n(YT))$.

On a :

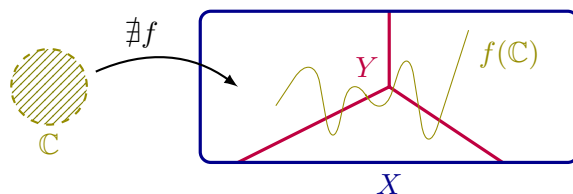
$$\boxed{\text{Gr } \mathcal{E}_{n, \kappa, m}^{GG} X = \bigoplus_{\ell(YT) \in \mathcal{P}_m^\kappa} \mathcal{S}^{(\alpha_1(YT), \alpha_2(YT), \dots, \alpha_n(YT))}(T_X^*)}.$$

En considérant les premiers exemples, on se convainc aisément du grand nombre de modules de Schur intervenant dans la décomposition.

3. VERS LA DÉGÉNÉRESCENCE ALGÈBRIQUE

3.1. **Dégénérescence algébrique effective.** *Effective Algebraic Degeneracy.* DIVERIO-MERKER-ROUSSEAU C'est le premier résultat effectif en dimension quelconque :

Théorème 4 (Diverio-Merker-Rousseau). *Pour toute hypersurface projective lisse générique $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ de degré $d \geq 2^{n^5} \gg n + 3$ il existe une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ contenant l'image de toute fonction holomorphe entière non constante $f: \mathbb{C} \rightarrow X$.*



On utilise le théorème fondamental suivant (dit *lemme d'Ahlfors-Schwarz*) :
Soit X une variété algébrique et \mathcal{L} un fibré en droite de base X .

- Définition** (Fibré ample). – Le fibré en droites \mathcal{L} est *très ample* s'il existe un plongement fermé $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ tel que \mathcal{L} s'identifie au fibré tautologique $\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N}(1)|_X$.
- Le fibré en droites \mathcal{L} est *ample* si une puissance tensorielle $\mathcal{L}^{\otimes m}$ de \mathcal{L} est très ample.

Théorème 5 (Bloch, Green-Griffiths, Demailly, Siu). *Soient X une variété (algébrique) projective complexe, \mathcal{A} un fibré en droites ample sur X et soit $P \in H^0(X, \mathcal{E}_{\kappa, m}^{GG} \otimes \mathcal{A}^{-1})$ une section globale non nulle du fibré de Green-Griffiths traduit par l'inverse de \mathcal{A} . Alors toute application holomorphe entière non-constante $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ vérifie l'équation différentielle algébrique :*

$$P(f', \dots, f^{(\kappa)}) \equiv 0.$$

Toute telle section globale produit une équation différentielle algébrique *qui ne dépend que de X* . Si on obtient assez d'équations indépendantes, on peut espérer obtenir la dégénérescence algébrique conjecturée par Green et Griffiths. En effet, en analogie avec le pivot de Gauss, si on a plus d'équations que d'inconnues, on peut effectuer des calculs d'élimination algébrique pour obtenir une équation différentielle *d'ordre zéro*, c'est-à-dire la dégénérescence algébrique. La conjecture de Kobayashi est plus difficile, car il faut maîtriser l'équation du lieu de dégénérescence pour itérer le schéma et espérer obtenir l'hyperbolicité.

Plan de preuve de Siu :

- Trouver une section. C'est à dire montrer que :

$$h^0\left(X, \mathcal{E}_{\kappa, m}^{GG}(T_X^*) \otimes \mathcal{A}^{-1}\right) > 0.$$

- Engendrer de nombreuses sections, en utilisant des champs de vecteurs avec des pôles contrôlés, dont la liste effective a été donnée par Merker [Mer09]. On utilise ici l'approche extrinsèque de Siu, en fait il suffit d'obtenir une équation par l'approche intrinsèque pour finir.
- Élimination algébrique pour obtenir une équation différentielle algébrique de degré zéro *i.e.* la dégénérescence algébrique.

3.2. Construire une différentielle de jets globale en degré optimal. C'est le premier résultat pour la première étape pour les hypersurfaces de type général *i.e.* en degré optimal pour la conjecture de Green-Griffiths $d \geq n + 3$. Pour montrer l'existence d'une section globale, il suffit de montrer que $h^0 := \dim H^0$ est non-nul. On a le résultat suivant :

Théorème 6. [Mer10] *Pour tout m , dès que $\deg(X) \geq n + 3$, on a l'inégalité :*

$$h^0\left(X, \mathcal{E}_{\kappa, m}^{GG}(T_X^*) \otimes \mathcal{A}^{-1}\right) > 0,$$

pour $\kappa \rightarrow \infty$ et $m \rightarrow \infty$ assez grands.

Par la suite on ne note plus la translation $\otimes \mathcal{A}^{-1}$, qui est sous-entendue. La méthode de démonstration est la suivante :

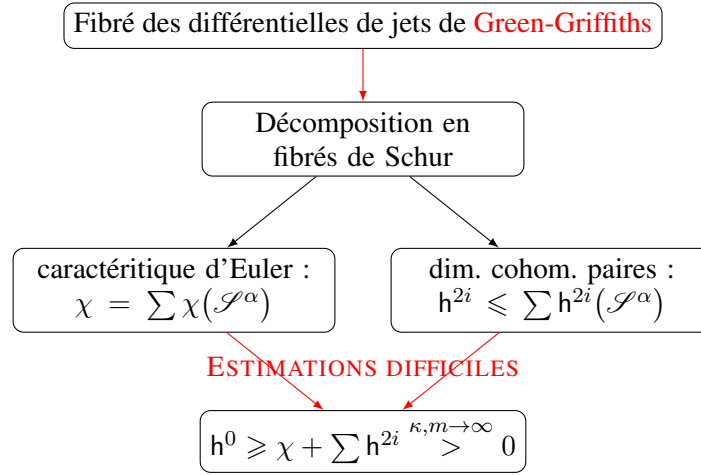
Démonstration. La caractéristique d'Euler d'un fibré en droites \mathcal{E} peut être obtenue comme la somme alternée de ses dimension cohomologiques :

$$\chi(X, \mathcal{E}) = h^0(X, \mathcal{E}) - h^1(X, \mathcal{E}) + h^2(X, \mathcal{E}) - \dots$$

Une façon de minorer $h^0(X, \mathcal{E})$ est donc de minorer les dimensions impaires (par zéro) et de majorer les dimension paires $h^{2i}(X, \mathcal{E}) : i > 0$:

$$h^0(X, \mathcal{E}) = \chi(X, \mathcal{E}) - \left(h^2(X, \mathcal{E}) + h^4(X, \mathcal{E}) + \dots\right) + \left(h^1(X, \mathcal{E}) + h^3(X, \mathcal{E}) + \dots\right)$$

La résolution du problème passe donc par un contrôle (difficile) des dimensions homologiques paires d'un fibré compliqué :



□

§ Dimensions cohomologiques paires :

Proposition 10. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel muni d'une filtration descendante :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supset \dots \supset \mathcal{E}_p \supset \mathcal{E}_{p+1} \supset \dots \supset \mathcal{E}_r = \{0\},$$

alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le q -ème espace de cohomologie $H^q(X, \mathcal{E})$ du fibré \mathcal{E} vérifie :

$$\dim H^q(X, \mathcal{E}) \leq \sum_{p=0}^{r-1} \dim H^q(X, \mathcal{E}_p / \mathcal{E}_{p+1}).$$

Démonstration. Il est bien connu que la suite exacte courte :

$$\{0\} \rightarrow \mathcal{E}_p / \mathcal{E}_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{E} / \mathcal{E}_{p+1} \rightarrow \mathcal{E} / \mathcal{E}_p \rightarrow \{0\}$$

donne une suite exacte longue d'espaces vectoriels :

$$\dots \rightarrow H^q(X, \mathcal{E}_p / \mathcal{E}_{p+1}) \xrightarrow{f_p} H^q(X, \mathcal{E} / \mathcal{E}_{p+1}) \xrightarrow{g_p} H^q(X, \mathcal{E} / \mathcal{E}_p) \rightarrow \dots$$

D'où les r inégalités :

$$\dim H^q(X, \mathcal{E} / \mathcal{E}_{p+1}) - \dim H^q(X, \mathcal{E} / \mathcal{E}_p) \leq \dim H^q(X, \mathcal{E}_p / \mathcal{E}_{p+1}).$$

On sommant ces inégalités, presque tous les termes de gauche se compensent par effet domino. En remarquant que $\mathcal{E} / \mathcal{E}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{E} / \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$, on obtient le résultat. □

Malheureusement, il est connu [Brückmann] qu'il n'existe pas de formule algébrique des dimensions cohomologiques des fibrés de Schur. Suivant une stratégie élaborée par Rousseau [Rou06, DMR10] pour les petites dimensions, qui se transpose en dimension quelconque, on peut cependant contourner le calcul cohomologique direct et obtenir des inégalités cohomologiques suffisantes. On obtient le résultat :

Théorème 7. Soit $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ une hypersurface lisse projective de type général (i.e. $\dim X \geq n + 3$). Alors pour tout entier $q = 1, 2, \dots, n$ la q -eme dimension cohomologique du fibré de Green-Griffiths $\mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG}(T_X^*)$ vérifie une majoration du type :

$$h^q\left(X, \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG}(T_X^*)\right) \leq \text{Constant}_{n,d} \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{((\kappa+1)n-1)! (\kappa!)^n} + \text{Constant}_{n,d,\kappa} \cdot m^{(\kappa+1)n-2}.$$

§ Une remarque de Diverio. Diverio [Div08] a remarqué qu'on ne peut pas engendrer de différentielle de jets globale d'ordre $\kappa < n$ inférieur à n . C'est un corollaire direct d'un théorème d'annulation de Brückmann.

Proposition 11. Pour tout m et pour $1 \leq \kappa < n$:

$$H^0\left(X, \mathcal{E}_{\kappa,m}^{GG} T_X^*\right) = 0.$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise le travail de décomposition du fibré de Green-griffiths et le résultat classique suivant :

Lemme 3. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel muni d'une filtration descendante :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supset \dots \supset \mathcal{E}_p \supset \mathcal{E}_{p+1} \supset \dots \supset \mathcal{E}_r = \{0\},$$

et soit $q \in \mathbb{N}$ un entier tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$H^q(X, \mathcal{E}_p / \mathcal{E}_{p+1}) = \{0\},$$

alors le q -eme espace de cohomologie $H^q(X, \mathcal{E}) = \{0\}$ du fibré \mathcal{E} est également trivial.

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de la proposition 10. \square

On rappelle qu'on a obtenu la filtration :

$$\text{Gr } \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} = \sum_{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0} M_{\alpha}^{\kappa,m} \cdot \mathcal{S}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}(T_X^*).$$

On sait par ailleurs (corollaire 3) que la première colonne des fibrés de Schur qui contribuent à la somme est de longueur inférieure à κ . Il reste pour conclure à énoncer le résultat dû à Brückmann [Brü71]. On sait déjà que pour un tableau de Young dont la première colonne a plus de $n = \dim(X)$ cases, par antisymétrie :

$$\mathcal{S}^T(T_X^*) = 0.$$

En fait pour espérer obtenir de sections globales du fibré de Schur $\mathcal{S}^T(T_X^*)$ associé au tableau de young T , le nombre de cases de la première colonne (i.e. le nombre de lignes non vides) de T doit valoir exactement n :

Théorème 8 (admis). [Brü71, BR90] Soit $X^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ une variété projective lisse de dimension n . Pour tout tableau de Young T ayant strictement moins de $n = \dim(X)$ lignes non vides, on a l'annulation :

$$H^0\left(X, \mathcal{S}^T(T_X^*)\right) = \{0\}.$$

§ *Caractéristique d'Euler asymptotique* : Pour calculer la caractéristique d'Euler $\chi(X, \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} T_X^*)$, on se ramène à l'espace gradué $\text{Gr}\mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} T_X^*$.

Proposition 12.

$$\chi(X, \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} T_X^*) = \chi(X, \text{Gr}\mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} T_X^*).$$

Démonstration. □

On utilise ensuite l'additivité de la caractéristique d'Euler et les calculs effectués par Brückmann. On obtient la formule :

$$\chi(X, \mathcal{E}_{n,\kappa,m}^{GG} T_X^*) = \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n ((\kappa+1)n-1)!} \cdot \left(c_1^{*n} \frac{(\log \kappa)^n}{n!} + \mathbf{O}_n((\log \kappa)^{n-1}) \right) + \mathbf{O}_{n,\kappa}(m^{(\kappa+1)n-2}).$$

L'idée mathématique à retenir : on a aucun espoir d'avoir une expression algébrique totale, donc on regarde les termes dominants, qui eux sont algébriques.

Proposition 13.

$$c_1^{*n} = d(d-n-2)^n$$

Démonstration. □

§ *Synthèse des résultats* : On obtient le résultat plus précis :

Théorème 9. [Mer10] *On a la minoration asymptotique :*

$$h^0(X, \mathcal{E}_{\kappa,m}^{GG}(T_X^*)) \geq \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n ((\kappa+1)n-1)!} \cdot \left(d(d-n-2)^n \frac{(\log \kappa)^n}{n!} + \mathbf{O}_{n,d}((\log \kappa)^{n-1}) \right) + \mathbf{O}_{n,d,\kappa}(m^{(\kappa+1)n-2}).$$

On a donc le théorème annoncé :

Théorème 10. *Soit $X^n \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ une hypersurface projective lisse de type général. Alors toute courbe holomorphe entière $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ satisfait une équation différentielle algébrique globale.*

3.3. Généralisation en plusieurs variables. On peut aussi énoncer des conjectures analogues sur la dégénérescence algébrique des applications holomorphes de rang générique maximal de \mathbb{C}^p à valeurs dans une hypersurface, voire une intersection complète, bien que le degré optimal ne soit pas connu.

Lors de mon stage de Master, l'objectif a été de généraliser des résultats de J. Merker au cas $f: \mathbb{C}^p \rightarrow X$ pour p quelconque. J'ai obtenu presque directement la décomposition de l'espace gradué en fibrés de Schur, mais des difficultés d'abord insoupçonnées sont apparues dans le calcul de la caractéristique d'Euler, faisant apparaître des formules semi-algébriques après l'intégration d'un polynôme sur un polytope dans un espace dont la dimension tend vers l'infini (seul des résultats pour l'ordre des jets tendant vers l'infini ont un intérêt dans la résolution du problème). Par la suite, dans le début de la thèse, un travail important sera de faire des estimées asymptotiques de ces quantités, afin d'obtenir une formulation algébrique du terme dominant, si cela est possible.

RÉFÉRENCES

- [Bro78] Robert Brody, *Compact manifolds in hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213–219. MR0470252 (57 #10010) ↑3
- [Brü71] Peter Brückmann, *Tensor differential forms on algebraic varieties*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 1008–1036 (Russian). MR0292844 (45 #1926) ↑18
- [BR90] P. Brückmann and H.-G. Rackwitz, *T-symmetrical tensor forms on complete intersections*, Math. Ann. **288** (1990), no. 4, 627–635, DOI 10.1007/BF01444555. MR1081268 (92a :14016) ↑18
- [Div08] Simone Diverio, *Differential equations on complex projective hypersurfaces of low dimension*, Compos. Math. **144** (2008), no. 4, 920–932, DOI 10.1112/S0010437X07003478. MR2441250 (2009f :14032) ↑18
- [DMR10] Simone Diverio, Joël Merker, and Erwan Rousseau, *Effective algebraic degeneracy*, Invent. Math. **180** (2010), no. 1, 161–223, DOI 10.1007/s00222-010-0232-4. MR2593279 ↑17
- [Ful97] William Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry. MR1464693 (99f :05119) ↑12, 13
- [FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991. A first course ; Readings in Mathematics. MR1153249 (93a :20069) ↑12
- [GG80] Mark Green and Phillip Griffiths, *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979), Springer, New York, 1980, pp. 41–74. MR609557 (82h :32026) ↑5
- [Kob70] Shoshichi Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Pure and Applied Mathematics, vol. 2, Marcel Dekker Inc., New York, 1970. MR0277770 (43 #3503) ↑1, 5
- [Mer10] Joël Merker, *Complex projective hypersurfaces of general type : toward a conjecture of Green and Griffiths* (2010), available at <http://arxiv.org/abs/1005.0405>. ↑10, 16, 19
- [Mer09] Joël Merker, *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 3, 1077–1104 (English, with English and French summaries). MR2543663 (2010f :32021) ↑16
- [Rou06] Erwan Rousseau, *Équations différentielles sur les hypersurfaces de \mathbb{P}^4* , J. Math. Pures Appl. (9) **86** (2006), no. 4, 322–341, DOI 10.1016/j.matpur.2006.06.004 (French, with English and French summaries). MR2257847 (2007h :14021) ↑17
- [SY96] Yum-Tong Siu and Sai-kee Yeung, *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 573–618, DOI 10.1007/s002220050064. MR1369429 (97e :32028) ↑7
- [Win07] Jörg Winkelmann, *On Brody and entire curves*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), no. 1, 25–46 (English, with English and French summaries). MR2430197 (2009i :32035) ↑3
- [Zai87] M. G. Zaïdenberg, *The complement to a general hypersurface of degree $2n$ in $\mathbb{C}P^n$ is not hyperbolic*, Sibirsk. Mat. Zh. **28** (1987), no. 3, 91–100, 222 (Russian). MR904640 (88k :32063) ↑5

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction à l'hyperbolicité	1
1.1. Hyperbolicité	1
1.2. Exemples historiques	3
1.3. Conjectures	4
2. Introduction aux différentielles de jets	6
2.1. Approche extrinsèque/intrinsèque	6
2.2. Décomposition en fibrés de Schur	11
3. Vers la dégénérescence algébrique	15
3.1. Dégénérescence algébrique effective	15
3.2. Construire une différentielle de jets globale en degré optimal	16
3.3. Généralisation en plusieurs variables	19
Références	20