

Introduction au domaine de recherche
La conjecture des sous-groupes de surfaces

Ruben Dashyan
dirigé par
Elisha Falbel et Gilles Courtois

12 octobre 2012

Mon stage de Master 2, sous la direction d'Elisha Falbel et Gilles Courtois, au second semestre de l'année universitaire 2011–2012, fut consacré à la *conjecture des sous-groupes de surfaces* :

le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension 3, compacte et connexe, contient un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre supérieur à 2.

Elle fait partie d'une série de questions, dépendantes les unes des autres, posées par William Thurston [Thu82], dans le cadre de l'étude des variétés de dimension 3.

La conjecture fut démontrée, très récemment, par Jeremy Kahn et Vladimir Markovic [KM12], et transcrite en français par Nicolas Bergeron [Ber12]. Par ailleurs, d'autres mathématiciens se sont appuyés sur leurs travaux pour apporter une réponse positive à une partie de ces questions, qui forment une « chaîne d'implications » dont la conjecture ci-dessus est la première.

Cependant, la littérature dans ce domaine spécialisé, et peut-être la littérature mathématique en général, que j'imaginai auparavant comme un grand édifice inébranlable, m'a plutôt semblé comme un échafaudage qu'il faut raccommoder dès qu'une de ses parties s'affaiblit. Ainsi, la voie toute tracée qui consistait à comprendre et s'approprier la démonstration de la conjecture n'était qu'un leurre et le stage s'est progressivement transformé en une réécriture détaillée de certaines étapes, seulement esquissée par les premiers auteurs.

La *paramétrisation des hexagones hyperboliques* [Kou94] illustre ce propos : la facilité avec laquelle des textes faisaient référence aux résultats de Kourounotis m'avait vite habitué à commettre les mêmes approximations. Mais mes encadrants ont également vite fait de me corriger.

Je remercie vivement les directeurs, ainsi que Maxime Wolff qui a pris une part aussi importante dans l'encadrement, pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail et pour y avoir consacré une grande partie de leur temps.

La démonstration de la conjecture s’articule en trois grandes étapes.

1. Trouver, dans un groupe G , un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(S)$ d’une surface S de genre supérieur à 2 revient à trouver une représentation fidèle de $\pi_1(S)$ dans G , en d’autres termes, un morphisme $\rho : \pi_1(S) \rightarrow G$ injectif. À partir d’objets appelés *étiquetages légaux* (cf. définition 2.12), il est possible de construire des représentations de $\pi_1(S)$. La recette repose sur la notion de *graphe de groupes* et une version généralisée du *théorème de van Kampen*, pour le calcul de groupes fondamentaux.

Néanmoins, il n’est pas dit que ces représentations soient injectives, ni même qu’il existe des étiquetages légaux pour un groupe G quelconque.

2. En second lieu, si G est le groupe des isométries directes de l’espace hyperbolique \mathbb{H}^n , pour n valant 2 ou 3, la paramétrisation des hexagones hyperboliques et la première étape confèrent des coordonnées à l’ensemble $\text{Hom}_{\text{fd}}(\pi_1(S), G)/G$ des classes de conjugaisons de représentations fidèles et à images discrètes de $\pi_1(S)$ dans G : les fameuses coordonnées de Fenchel-Nielsen réelles ($n = 2$ et $G \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$) ou complexes ($n = 3$ et $G \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$).

Le cas réel correspond aux structures hyperboliques réelles sur S , à savoir l’ensemble des métriques riemanniennes hyperboliques (de courbure sectionnelle -1). Dès lors, le cas complexe apparaît comme une « déformation » ou généralisation du cas réel. Et une représentation complexe est injective si elle est suffisamment proche d’une représentation réelle fidèle et à image discrète. Le tout est d’estimer la distance pour laquelle le caractère injectif est préservé, grâce à une formule dite de Wolpert-Kerckhoff-Series [Ser01].

De plus, des ingrédients de géométrie asymptotique à la Gromov et d’analyse sont nécessaires.

3. Enfin, il ne reste plus qu’à prouver l’existence d’étiquetages légaux pour le groupe fondamental $\pi_1(M)$ d’une variété hyperbolique M de dimension 3, compacte et connexe, grâce au caractère mélangeant du flot des repères de M .

Le travail de réécriture couvre pour le moment l’étape 1 et partiellement l’étape 2, qui sont les moins développées dans les textes étudiés, contrairement à la dernière. Cette introduction au domaine de recherche donne un aperçu d’une partie des résultats.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Quelques rappels de géométrie hyperbolique | 3 |
| 2 | Représentations de groupes de surfaces | 4 |
| 2.1 | Des graphes aux surfaces | 4 |
| 2.2 | Graphes de groupes et théorème de van Kampen | 6 |
| 2.3 | Des étiquetages aux représentations | 8 |
| 3 | Paramétrisation des hexagones | 9 |
| 4 | Fin de la démonstration | 11 |

Les surfaces sont des objets mathématiques très bien connus et la démonstration de la conjecture est un grand pas en avant dans l'étude des variétés de dimension 3. Une surface S de genre $g \geq 2$ est un « tore à g trous » et son groupe fondamental $\pi_1(S)$ admet pour présentation

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

Un morphisme $\phi : \pi_1(S) \rightarrow G$ correspond exactement à la donnée de ses images $A_i = \phi(a_i)$ et $B_i = \phi(b_i)$. Ces dernières vérifient la même relation

$$\prod_{i=1}^n [A_i, B_i] = 1.$$

Néanmoins, cette correspondance algébrique n'est pas adaptée à la démonstration de la conjecture, plutôt géométrique.

1 Quelques rappels de géométrie hyperbolique

L'espace hyperbolique réel

L'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n de dimension n peut être défini de multiples façons, toutes équivalentes (isométriques). On adopte le modèle du demi-espace supérieur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$, dont les coordonnées sont notées (z, t) et qui est muni de la métrique riemannienne

$$\frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$$

où $|dz|^2 = dz_1^2 + \dots + dz_{n-1}^2$ si $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ est le compactifié $\widehat{\mathbb{R}^{n-1}} = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$, de sorte que $\mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$ est un espace compact.

Géodésiques et isométries

Les géodésiques de \mathbb{H}^n sont soit des demi-droites verticales, soit des demi-cercles tels que les vecteurs tangents en leurs extrémités soient verticaux. Elles sont donc uniquement déterminées par leurs extrémités dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Par ailleurs, le groupe des isométries directes de \mathbb{H}^n est engendré par les symétries axiales, c'est-à-dire les rotations d'angle π autour d'une géodésique. En dimension 2 ou 3, toute isométrie directe est le produit de deux symétries axiales. Une isométrie directe de \mathbb{H}^n pour $n = 2$ ou 3, qui n'est pas l'identité, est dite

- *elliptique* si elle préserve un point dans \mathbb{H}^n ,
- *parabolique* si elle préserve un unique point du bord $\partial_\infty \mathbb{H}^n$,
- *loxodromique* si elle préserve deux points distincts du bord.

En dimension 2, le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit par homographies sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}}$. Et par l'extension dite de Poincaré, il agit par isométries directes sur \mathbb{H}^2 . En outre, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe des isométries directes de \mathbb{H}^2 . De la même manière, en dimension 3, le groupe des isométries directes de \mathbb{H}^3 est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agissant sur $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$ par homographies.

Variétés hyperboliques

Une variété riemannienne est dite *hyperbolique* lorsque sa courbure sectionnelle est constante et égale à -1 . Par exemple, \mathbb{H}^n est la variété hyperbolique de dimension n par excellence, la seule — à isométrie près — qui soit connexe, simplement connexe et complète. En général, une variété hyperbolique M de dimension n , complète, connexe et orientable est isométrique à $\pi_1(M)\backslash\mathbb{H}^n$ où $\pi_1(M)$ agit librement et proprement discontinuement sur \mathbb{H}^n , par isométries directes.

Dans ce mémoire, M désigne une variété hyperbolique pointée de dimension 3, compacte, connexe et orientable, donc isométrique à $\pi_1(M)\backslash\mathbb{H}^3$. Vu comme sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, $\pi_1(M)$ est un groupe dit *kleinien*. Tous les éléments de $\pi_1(M)$ sont loxodromiques : ils ne sont pas elliptiques car le groupe agit librement sur \mathbb{H}^3 , ni paraboliques. En effet, pour tout γ dans $\pi_1(M)$ et x dans \mathbb{H}^3 , la distance entre x et γx est minorée par une constante strictement positive (le rayon d'injectivité de M). Or si γ était parabolique, l'infimum de la distance de x à γx , lorsque x parcourt \mathbb{H}^3 , serait nul.

2 Représentations de groupes de surfaces

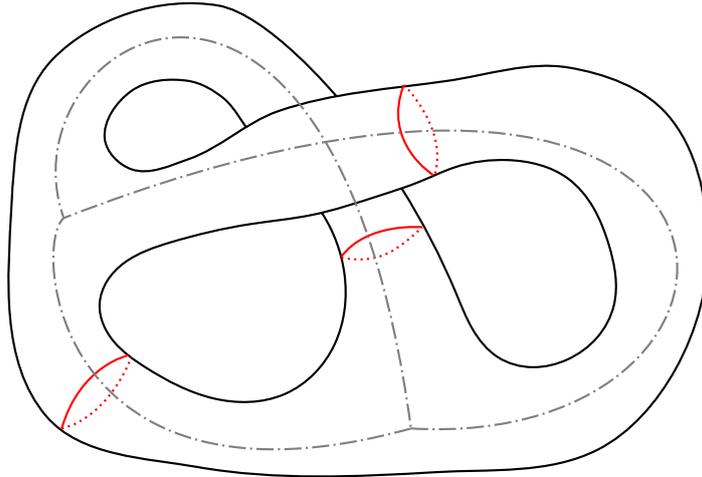


FIGURE 1 – Une décomposition en pantalons d’une surface de genre 2.

2.1 Des graphes aux surfaces

Cette partie, de même que la définition 2.12, s’inspire des articles [KM12] et [Ber12], avec toutefois des modifications indispensables. Les objets présentés s’avèrent très commodes pour construire des surfaces topologiques et des représentations de leurs groupes fondamentaux.

Un *graphe* \mathcal{G} se compose d’un ensemble $\mathrm{som}(\mathcal{G})$ de *sommets*, d’un ensemble $\mathrm{ar}(\mathcal{G})$ d’*arêtes orientées*, et de deux applications

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ar} \mathcal{G} & \longrightarrow & (\mathrm{som} \mathcal{G})^2 \\ y & \longmapsto & (y_-, y_+) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{ar} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{ar} \mathcal{G} \\ y & \longmapsto & \bar{y} \end{array}$$

dont la seconde est une involution sans point fixe, qui vérifient $y_- = \bar{y}_+$ (donc $y_+ = \bar{y}_-$) pour toute arête y . On dit qu'une arête y joint son sommet d'*origine* y_- à son sommet d'*arrivée* y_+ , et ces deux sommets sont appelés ses *extrémités*. Le groupe engendré par l'involution $y \mapsto \bar{y}$ agit librement sur $\text{ar}(\mathcal{G})$ et le quotient s'interprète comme l'ensemble des arêtes *non orientées* de \mathcal{G} .

La *réalisation topologique* d'un graphe, unique à homéomorphisme près, est le graphe topologique, autrement dit, le CW-complexe de dimension 1 dont le 0-squelette est l'ensemble $\text{som}(\mathcal{G})$ et dont le 1-squelette est obtenu en recollant une copie du segment $[0, 1]$ entre les extrémités de chaque arête non orientée.

Si c est un chemin dans \mathcal{G} , c_+ désigne son sommet d'arrivée. Si $c_+ = y_-$, cy désigne le chemin c suivi de l'arête y . \bar{c} est le chemin c parcouru en sens inverse. Si, de plus, c est un lacet, $[c]$ est sa classe dans $\pi_1(\mathcal{G})$.

Définition 2.1. Un graphe est dit *trivalent* si en tout sommet aboutissent exactement trois arêtes orientées.

Étant donné un graphe trivalent \mathcal{G} , l'application $y \rightarrow y_+$ est une fibration de fibre type \mathbb{Z}_3 . Elle admet des trivialisations globales $\text{ar } \mathcal{G} \simeq \text{som}(\mathcal{G}) \times \mathbb{Z}_3$ dont chacune est uniquement déterminée par une application $\text{ar } \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}_3$, bijective en restriction aux fibres.

Définition 2.2. Un graphe trivalent \mathcal{G} est dit *marqué* lorsqu'il est muni d'une trivialisations particulière. Dans ce cas, les ensembles $\text{ar}(\mathcal{G})$ et $\text{som}(\mathcal{G}) \times \mathbb{Z}_3$ seront toujours identifiés au moyen de cette trivialisations.

Ces définitions anodines sont motivées par le fait que toute surface de genre supérieur à 2 admet une décomposition en « pantalons » : il existe une famille de lacets découpant la surface en pantalons. Les sommets du graphe \mathcal{G} symbolisent les pantalons dont deux se recollent le long d'un de leurs bords circulaires, si une arête du graphe les joint.

Inversement, à un graphe trivalent marqué \mathcal{G} , on associe une surface topologique $S_{\mathcal{G}}$ orientable et sans bord qui est en outre

- compacte si le graphe est fini,
- connexe si le graphe l'est aussi.

En effet, soit Π^0 un *pantalon topologique à bord*, orienté et pointé, c'est-à-dire, une surface orientée, pointée, homéomorphe à une sphère de dimension 2 privée de trois disques ouverts et d'adhérences disjointes.

Son bord se compose de trois cercles disjoints C_1, C_2, C_3 dont chacun hérite d'une orientation naturelle. À permutation cyclique près, il existe deux numérotations des composantes de bord : on choisit celle telle que le groupe fondamental $\pi_1(\Pi^0)$ admette pour présentation $\langle c_1, c_2, c_3 \mid c_3 c_2 c_1 = 1 \rangle$ où chaque générateur c_ω correspond à la classe d'homotopie (relative à la base) de lacets librement homotopes à un homéomorphisme $\mathbb{S}^1 \rightarrow C_\omega$ préservant l'orientation. Ce groupe est isomorphe au groupe libre à deux générateurs. Toutefois, il vaut mieux adopter la présentation à trois générateurs c_1, c_2, c_3 afin de ne pas rompre la symétrie. Le groupe $\pi_1(\Pi^0)$ est dit *marqué* dans la mesure où il est pourvu d'un système de générateurs.

On considère le produit $\Pi^0 \times \text{som}(\mathcal{G})$ qui est la somme disjointe d'autant de pantalons topologiques $\Pi^0 \times \{x\}$, notés Π^x , que de sommets x dans le graphe \mathcal{G} . La composante de bord $C_\omega \times \{x\}$ de Π^x est notée C^y où y est l'arête correspondant au couple (x, ω) . Puis on choisit, pour chaque arête y , un homéomorphisme

de recollement $\theta^y : C^{\bar{y}} \rightarrow C^y$ renversant l'orientation tel que $\theta^{\bar{y}} = (\theta^y)^{-1}$. Enfin, la surface $S_{\mathcal{G}}$ s'obtient comme quotient de $\Pi^0 \times \text{som}(\mathcal{G})$ par la relation d'équivalence \sim engendrée par $p \sim \theta^y(q)$, pour tous y dans $\text{ar}(\mathcal{G})$, p dans C^y et q dans $C^{\bar{y}}$.

La surface $S_{\mathcal{G}}$ est sans bord car toute composante C^y est identifiée à une composante $C^{\bar{y}}$ différente. Elle est compacte si et seulement si les pantalons sont en nombre fini. Enfin, par construction, les composantes connexes de $S_{\mathcal{G}}$ correspondent exactement aux composantes connexes du graphe \mathcal{G} .

Remarque 2.3. En réalité, il y a deux façons de recoller C^y et $C^{\bar{y}}$. Certes, on aurait pu exiger que les homéomorphismes θ^y préservent l'orientation, au lieu de la renverser, et cela aurait simplement produit une autre surface. Mais contrairement à cette alternative, le choix de renverser l'orientation force la surface $S_{\mathcal{G}}$ à être orientable. En effet, le recollement de deux surfaces topologiques orientées — le long de bords circulaires héritant de leur orientation induite — via un homéomorphisme de recollement renversant l'orientation, donne naissance à une surface orientée de manière cohérente avec les orientations d'origine : autrement dit, il existe une orientation de la surface qui induit les orientations d'origine sur chaque pièce de l'assemblage.

En fin de compte, un graphe trivalent \mathcal{G} marqué, fini et connexe, permet de construire une surface topologique $S_{\mathcal{G}}$ sans bord, compacte, connexe et orientable.

2.2 Graphes de groupes et théorème de van Kampen

La notion de graphe de groupes a été introduite par Hyman Bass [Bas76], également décrite par Jean-Pierre Serre [Ser77]. D'une part, elle entre naturellement en jeu dans le calcul de groupes fondamentaux. D'autre part, elle englobe les groupes obtenus par somme amalgamée ou par extension de type HNN. L'exemple suivant sert de guide pour comprendre les définitions à première vue techniques.

Terminologie 2.4. Si A est une partie d'un espace topologique X , tous deux connexes par arcs, et si α_0 est un chemin d'un point x de X à un point a de A , le morphisme $\pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, x)$ *canoniquement associé au chemin α* est celui défini par

$$[\alpha] \mapsto [\alpha_0 \alpha \bar{\alpha}_0].$$

Exemple 2.5. Soient X un espace topologique connexe par arcs, et \mathcal{U} un recouvrement de X par des ouverts connexes par arcs tels que l'intersection de deux d'entre eux soit toujours connexe par arcs.

Soit \mathcal{G} le graphe d'ensemble de sommets \mathcal{U} , tel que deux sommets u et v sont joints par une arête non orientée si les ouverts U et V correspondants se rencontrent. Il existe une application continue g de la réalisation topologique de \mathcal{G} dans X tel que l'image d'un sommet u soit un point de l'ouvert U , et que l'image d'une arête non orientée entre deux sommets u et v soit le concaténé d'un chemin dans U et d'un chemin dans V dont le point d'adjacence x_{uv} est dans $U \cap V$.

Cela produit, après avoir choisi un sommet base u_0 , les morphismes
 $- g_* : \pi_1(\mathcal{G}, u_0) \rightarrow \pi_1(X, g(u_0))$ induit par g ,

- $i_y : \pi_1(U \cap V, x_{uv}) \longrightarrow \pi_1(V, g(v))$ canoniquement associé au chemin dans V de $g(v)$ à x_{uv} , pour toute arête orientée y dans \mathcal{G} d'un sommet u à un sommet v ,
- $\psi_c : \pi_1(U, g(u)) \longrightarrow \pi_1(X, g(u_0))$ canoniquement associé au chemin $g(c)$, pour tout chemin c dans \mathcal{G} de u_0 à u ,

qui satisfont aux relations

$$\psi_{c'} = g_*[c'\bar{c}] \psi_c g_*[c'\bar{c}]^{-1} \quad \text{et} \quad \psi_{cy} \circ i_y = \psi_c \circ i_{\bar{y}}$$

pour tous chemins c et c' de u_0 à un même sommet d'arrivée, et toute arête y telle que $y_- = c_+$.

Définition 2.6. Un *graphe de groupes* est la donnée d'un graphe connexe \mathcal{G} , d'un groupe G_x pour chaque sommet x et, pour chaque arête y , d'un groupe G_y muni d'un morphisme $i_y : G_y \rightarrow G_{y_+}$. On exige en outre que $G_y = G_{\bar{y}}$.

Exemple 2.7. Le graphe \mathcal{G} de l'exemple précédent devient un graphe de groupes lorsque chaque sommet u est muni du groupe $\pi_1(U, g(u))$, et que chaque arête y joignant un sommet u à un sommet v est muni du groupe $\pi_1(U \cap V, x_{uv})$ ainsi que du morphisme $i_y : \pi_1(U \cap V, x_{uv}) \rightarrow \pi_1(V, g(v))$.

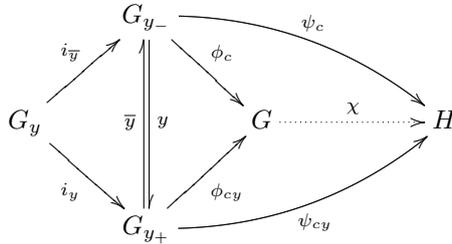
Définition 2.8. Avec les notations de la définition précédente, soit x_0 un sommet de \mathcal{G} . Le *groupe fondamental* du graphe de groupes en x_0 est un groupe G muni d'un morphisme $\zeta : \pi_1(\mathcal{G}, x_0) \rightarrow G$, et pour tout chemin c issu de x_0 , d'un morphisme $\phi_c : G_{c_+} \rightarrow G$, qui vérifient

1. $\phi_{c'} = \zeta[c'\bar{c}] \phi_c \zeta[c'\bar{c}]^{-1}$, pour tout chemin c' de x_0 à $c'_+ = c_+$,
2. $\phi_{cy} \circ i_y = \phi_c \circ i_{\bar{y}}$, pour toute arête y issue de c_+ ,

et qui satisfait à la *propriété universelle* suivante :

si un groupe H est muni d'un morphisme $\xi : \pi_1(\mathcal{G}, x_0) \rightarrow H$, et pour tout chemin c issu de x_0 , d'un morphisme $\psi_c : G_{c_+} \rightarrow H$, qui vérifient les mêmes propriétés que ζ et ϕ_c , alors il existe un unique morphisme $\chi : G \rightarrow H$, dit *canonique* pour la propriété universelle, tel que $\xi = \chi \circ \zeta$ et $\psi_c = \chi \circ \phi_c$ pour tout chemin c d'origine x_0 .

La propriété universelle signifie que le groupe fondamental d'un graphe de groupes est le groupe, par excellence, qui vérifie les propriétés 1 et 2. En particulier, elle implique que le groupe fondamental d'un graphe de groupes est bien unique, à unique isomorphisme près. Le diagramme commutatif suivant illustre quelques unes des propriétés de composition.



Proposition 2.9. Le groupe G — muni des morphismes ζ et ϕ_c — existe et est unique, à un unique isomorphisme près. De plus, ζ admet un inverse à gauche.

Théorème 2.10 (Théorème de van Kampen). *Avec les notations de l'exemple 2.5, si le morphisme g_* est injectif, alors le groupe fondamental $\pi_1(X, g(u_0))$ d'un espace topologique X connexe par arcs, muni des morphismes g_* , i_y , ψ_c , est le groupe fondamental en u_0 du graphe de groupes de l'exemple 2.7.*

L'hypothèse, que g_* soit injectif, est indispensable puisque $\zeta : \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow G$ admet un inverse à gauche. Elle traduit le fait que le recouvrement de \mathcal{U} de X ne doit pas contenir trop d'ouverts. Par exemple, elle est satisfaite lorsque g est une rétraction.

Toute cette discussion fournit les puissants outils pour étudier le problème initial : on considère d'une part un graphe trivalent \mathcal{G} marqué, fini et connexe, et d'autre part la surface topologique $S_{\mathcal{G}}$ sans bord, compacte, connexe et orientable. On munit \mathcal{G} d'un sommet base, et on assigne comme point base à $S_{\mathcal{G}}$ le point base du pantalon symbolisé par le sommet base de \mathcal{G} .

Proposition 2.11. *Soit le graphe de groupes constitué du graphe \mathcal{G} où*

1. *chaque sommet x est muni du groupe $\pi_1(\Pi^x)$,*
2. *chaque arête orientée y est munie du groupe $\pi_1(C^y)$ et d'un morphisme $i^y : \pi_1(C^y) \rightarrow \pi_1(\Pi^{y+})$ induit par l'inclusion (toute composante C^y est munie d'un point base arbitraire que les homéomorphismes θ^y préservent.)*

Il existe une application continue $g : \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{G}}$, préservant le point base et induisant un morphisme $g_ : \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(S_{\mathcal{G}})$ injectif, telle que le groupe $\pi_1(S_{\mathcal{G}})$ — muni de g_* et, pour tout chemin c dans \mathcal{G} issu de sa base, du morphisme $\phi_c : \pi_1(\Pi^{c+}) \rightarrow \pi_1(S_{\mathcal{G}})$ canoniquement associé au chemin $g(c)$ — soit le groupe fondamental de ce graphe de groupes.*

En conclusion, $\pi_1(S_{\mathcal{G}})$ est le groupe fondamental du graphe de groupes ci-dessus. En particulier, il satisfait à la propriété universelle : à la donnée d'un morphisme $\xi : \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow H$ et, pour tout chemin c dans \mathcal{G} issu de sa base, d'un morphisme $\psi_c : \pi_1(\Pi^{c+}) \rightarrow H$, satisfaisant aux propriétés 1 et 2 (cf. définition 2.8) correspond un unique morphisme $\chi : \pi_1(S_{\mathcal{G}}) \rightarrow H$. Réciproquement, pour tout $\chi : \pi_1(S_{\mathcal{G}}) \rightarrow H$, les morphismes définis par $\xi = \chi \circ g_*$ et $\psi_c = \chi \circ \phi_c$ satisfaisant 1 et 2.

2.3 Des étiquetages aux représentations

La propriété universelle des graphes de groupes implique en apparence un nombre potentiellement infini de morphismes. Pourtant, dans le cas de la surface $S_{\mathcal{G}}$ construite à partir d'un graphe trivalent \mathcal{G} marqué, fini et connexe, la donnée d'un nombre fini de morphismes et d'éléments du groupe d'arrivée H suffisent.

Comme l'objectif est de construire un morphisme de $\pi_1(S_{\mathcal{G}})$ dans $\pi_1(M)$, ce dernier est choisi comme groupe d'arrivée.

Définition 2.12. Un *étiquetage légal* sur \mathcal{G} est formé d'une famille $(\rho^x)_{x \in \text{som } \mathcal{G}}$ de morphismes $\pi_1(\Pi^0) \rightarrow \pi_1(M)$ et d'une famille $(\gamma^y)_{y \in \text{ar } \mathcal{G}}$ d'éléments de $\pi_1(M)$ telles que, pour tout y dans $\text{ar } \mathcal{G}$,

$$\gamma^{\bar{y}} = (\gamma^y)^{-1} \quad \text{et} \quad \rho^{y-}(c_{\omega_-}) = \gamma^y \rho^{y+}(c_{\omega_+})^{-1} \gamma^{\bar{y}}$$

où (y_+, ω_+) et (y_-, ω_-) sont les éléments de $\text{som}(\mathcal{G}) \times \mathbb{Z}_3$ identifiés respectivement à y et \bar{y} .

La condition « $\rho^{y-}(c_{\omega_-}) = \gamma^y \rho^{y+}(c_{\omega_+})^{-1} \gamma^{\bar{y}}$ » permet le recollement des morphismes entre eux.

Proposition 2.13. *Un étiquetage légal sur \mathcal{G} détermine de manière unique un morphisme $\xi : \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(M)$ et, pour tout chemin c dans \mathcal{G} issu de la base, un morphisme $\rho_c : \pi_1(\Pi^{c+}) \rightarrow \pi_1(M)$ tels que*

1. $\rho_c \circ i^{\bar{y}} = \rho_{c\bar{y}} \circ i^y$ pour toute arête y issue de x ,
2. $\rho_{c'} = \xi[c'\bar{c}] \rho_c \xi[c'\bar{c}]^{-1}$ pour deux chemins c et c' de la base à un même sommet d'arrivée.

En résumé, le groupe $\pi_1(M)$ et les morphismes ξ et ρ_c satisfont aux hypothèses de la propriété universelle du graphe de groupes de la proposition 2.11, dont $\pi_1(S_{\mathcal{G}})$, muni des morphismes g_* et ϕ_c , est le groupe fondamental. L'énoncé suivant en est une conséquence immédiate.

Corollaire 2.14. *Avec les notations des propositions 2.11 et 2.13, un étiquetage légal sur \mathcal{G} détermine un unique morphisme $\rho : \pi_1(S_{\mathcal{G}}) \rightarrow \pi_1(M)$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\mathcal{G}) & \\
 g_* \swarrow & & \searrow \xi \\
 \pi_1(S_{\mathcal{G}}) & \xrightarrow{\rho} & \pi_1(M) \\
 \phi_c \swarrow & & \searrow \rho_c \\
 & \pi_1(\Pi^{c+}) &
 \end{array}$$

soit commutatif, pour tout chemin c dans \mathcal{G} issu de la base.

Finalement, la recette décrite dans cette partie permet de produire une représentation d'un groupe de surfaces à partir d'un étiquetage légal, c'est-à-dire, de la donnée d'une représentation du groupe fondamental de chaque pantalon composant la surface, vérifiant la condition de recollement. Cependant, rien ne garantit qu'il existe d'autre étiquetage légal que celui produisant le morphisme trivial, et même s'il en existe, que la représentation produite soit injective.

3 Paramétrisation des hexagones

Maintenant que l'on sait assembler les représentations de pantalons en une représentation du groupe de la surface, il reste à étudier les premières.

Proposition 3.1. *Soit $\rho : \pi_1(\Pi^0) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ une représentation, entièrement déterminée par ses images $A_{\omega} = \rho(c_{\omega})$ qui vérifient $A_3 A_2 A_1 = 1$. Lorsque les trois A_{ω} sont des isométries loxodromiques dont les axes sont deux à deux disjoints y compris à l'infini, il existe un unique triplet (S_1, S_2, S_3) de symétries axiales telles que*

$$A_{\omega} = S_{\omega+2} S_{\omega+1}.$$

En d'autres termes, toute représentation $\rho : \pi_1(\Pi^0) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de ce type détermine un hexagone à angles droits au sens suivant.

Définition 3.2. Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , un *hexagone à angles droits* est un triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de géodésiques non orientées de \mathbb{H}^3 , deux à deux disjointes, y compris à l'infini. Il existe alors, pour tout ω , une unique géodésique non orientée β_ω orthogonale à $\alpha_{\omega+1}$ et $\alpha_{\omega+2}$.

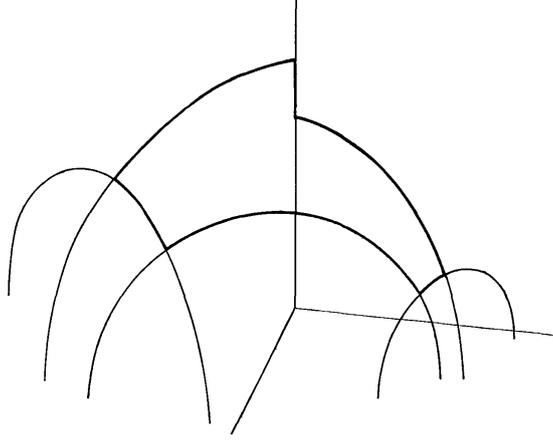


FIGURE 2 – Un hexagone à angles droits dans \mathbb{H}^3 [Kou94].

On dispose de six géodésiques non orientées $\alpha_1, \beta_3, \alpha_2, \beta_1, \alpha_3, \beta_2$ dont deux consécutives se croisent orthogonalement, ainsi que la première et la dernière.

Comme réciproque à la proposition précédente, un hexagone à angles droits $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ définit un morphisme $\rho : \pi_1(\Pi^0) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ par $\rho(c_\omega) = S_{\omega+2}S_{\omega+1}$ où S_ω est la symétrie axiale d'axe α_ω .

Le reste de cette partie s'appuie essentiellement sur des travaux de Christos Kourouniotis [Kou94].

Si u et v sont deux points distincts de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, alors (u, v) désigne l'unique géodésique orientée allant de u à v . Et si γ est une géodésique orientée (u, v) , alors $-\gamma$ désigne (v, u) .

Soient α et β deux géodésiques orientées de \mathbb{H}^3 sans extrémité commune. Il existe alors une unique géodésique non orientée, orthogonale aux deux. On appelle γ cette géodésique munie d'une des deux orientations possibles et on choisit une isométrie directe f telle que $f(\gamma) = (0, \infty)$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(\alpha) = (-u, u)$ et $f(\beta) = (-v, v)$ où u et v sont dans \mathbb{C} .

Définition 3.3. La *distance complexe signée* $d_\gamma(\alpha, \beta)$ de α à β , mesurée le long de γ , est l'élément de $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ défini par

$$e^{d_\gamma(\alpha, \beta)} u = v.$$

Elle ne dépend pas du choix de l'isométrie directe f .

Trois longueurs complexes étant données, on construit un hexagone à angles droits $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dans \mathbb{H}^3 , ainsi que les orthogonales communes $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, dont les longueurs de trois côtés alternés sont les bonnes au sens de la proposition suivante. Cependant, même si les géodésiques formant un hexagone à angles droits ne sont pas orientées, le recours aux longueurs complexes nécessite qu'elles le soient.

Proposition 3.4. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un triplet d'éléments de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ distincts de 0 et de $i\pi$. Il existe un triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de géodésiques orientées qui satisfont aux contraintes*

$$\lambda_\omega = d_{\beta_\omega}(\alpha_{\omega+1}, \alpha_{\omega+2})$$

où β_ω est l'orthogonale commune à $\alpha_{\omega+1}$ et $\alpha_{\omega+2}$, orientée convenablement (une seule des deux orientations permet de satisfaire la contrainte.) Ce triplet est unique à isométrie directe et à renversement simultané des orientations près.

Notation 3.5. $\mathbb{C}_{>0}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive, et T le groupe de translations de $(\mathbb{C}_{>0}/2i\pi\mathbb{Z})^3$ à quatre éléments id, t_1, t_2, t_3 définies par

$$t_\omega : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_1 + i\pi(1 - \delta_{\omega 1}), \lambda_2 + i\pi(1 - \delta_{\omega 2}), \lambda_3 + i\pi(1 - \delta_{\omega 3}))$$

où $\delta_{\omega\omega'}$ est le symbole de Kronecker. Le groupe T est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^2$ où \mathbb{Z}_2 est le groupe d'ordre 2.

Théorème 3.6. *L'ensemble $(\mathbb{C}_{>0}/2i\pi\mathbb{Z})^3/T$ est un espace de paramètres pour les hexagones à angles droits. Autrement dit, tout hexagone à angles droits correspond bijectivement à un élément de cet ensemble.*

4 Fin de la démonstration

La paramétrisation des hexagones à angles droits et les étiquetages légaux permettent de donner des coordonnées à l'espace

$$\text{Hom}_{\text{fd}}(\pi_1(S), \text{PSL}_2(\mathbb{R}))/\text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

appelées les coordonnées réelles de Fenchel-Nielsen, au nombre de $6g - 6$ où g est le genre de la surface.

De plus, on considère l'espace $\mathcal{QF}(S)$ des classes de conjugaison des représentations $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ telles qu'il existe un homéomorphisme quasi-conforme $\varphi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tel que $\varphi \rho \varphi^{-1}$ soit une représentation fuchsienne (fidèle et à image discrète dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$). L'espace $\mathcal{QF}(S)$ est un espace de déformation de $\text{Hom}_{\text{fd}}(\pi_1(S), \text{PSL}_2(\mathbb{R}))/\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, et l'on dispose encore de $6g - 6$ coordonnées qui sont cette fois-ci complexes. Toutefois, il n'est pas difficile de savoir quelles valeurs les coordonnées peuvent prendre.

Pour ce faire, on dispose de la formule de Wolpert-Kerckhoff-Series qui permet de calculer la dérivée de $|\text{tr}(\rho(\gamma))|$ par rapport aux coordonnées de ρ dans $\mathcal{QF}(S)$, pour tout γ dans $\pi_1(S)$. Or, $|\text{tr}(\rho(\gamma))|$ n'est pas nul pour tous γ et ρ . Cela donne donc une indication sur les valeurs que peuvent prendre les coordonnées de Fenchel-Nielsen complexes.

Dès lors, il ne reste plus qu'à montrer l'existence d'étiquetages légaux dont les représentations correspondantes $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ aient des coordonnées proches des coordonnées d'une représentation fuchsienne. Cela provient alors du caractère mélangeant du flot géodésique sur le fibré des repères orthonormés de M .

Références

- [Bas76] H. Bass, *Some remarks on group actions on trees*, Commun. Algebra **4** (1976), 1091–1126.
- [Ber12] N. Bergeron, *La conjecture des sous-groupes de surfaces*, Séminaire Bourbaki, no. 1055, juin 2012, pp. 1–28.
- [KM12] J. Kahn and V. Markovic, *Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold*, Ann. Math. (2) **175** (2012), no. 3, 1127–1190.
- [Kou94] C. Kourouniotis, *Complex length coordinates for quasi-Fuchsian groups*, Mathematika **41** (1994), 173–188.
- [Ser77] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , vol. 46, Astérisque, 1977.
- [Ser01] C. Series, *An extension of Wolpert’s derivative formula*, Pacific J. Math. **197** (2001), no. 1, 223–239.
- [Thu82] W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 3, 357–381.