Introduction au domaine de recherche
Probabilités et intégration non commutatives, espaces d'opérateurs

Mikael de la Salle
Directeur de thèse: Gilles Pisier

Octobre 2006

Table des matières

Introduction

Mon domaine de recherche s'inscrit dans une démarche générale des mathématiques récentes qui trouve ses origines dans la physique quantique, et qui consiste à tenter de développer des analogues non commutatifs de théories commutatives. L'idée générale est de remplacer les fonctions par des opérateurs (qui ne commutent pas nécessairement) sur un espace de Hilbert. Très vaguement, cette approche est en quelque sorte légitimée par le fait qu'à un espace on peut associer l'algèbre (commutative) des fonctions sur cet espace, et que beaucoup de propriétés de cette algèbre de fonctions peuvent être traduites en propriétés de l'espace. Si l'on s'intéresse à ces mêmes propriétés pour des algèbres non commutatives, on pourra les interpréter comme des propriétés d'espaces non commutatifs.

Ainsi ont été développées des théories de la topologie non commutative, de la géométrie différentielle non commutative, etc ([3]). Dans cette introduction, mon but est de présenter brièvement quelques aspects des théories des probabilités et de l'intégration non commutatives, ainsi que des espaces d'opérateurs, qui peuvent être, d'une certaine façon, considérés comme des espaces de Banach non commutatifs.

Cette démarche a un intérêt en soi puisqu'elle permet de définir de nouveaux objets dont l'étude peut s'avérer passionnante, mais aussi on peut espérer qu'en s'inspirant de ce qui a été fait dans le domaine commutatif, on puisse faire avancer la connaissance des C^*-algèbres ou des algèbres de von Neumann, sur lesquels sont construits les objets non commutatifs. Par exemple, il paraît qu'une des motivations dans le développement des probabilités libres par Voiculescu (voir [9] pour une introduction) était l'étude des facteurs (=les algèbres de von Neumann) des groupes libres et plus précisément la question (toujours ouverte) de savoir si ces facteurs sont isomorphes. Le lecteur intéressé est également invité à jeter un coup d'oeil à mon mémoire de M2 ou bien à l'article original [4] où l'on peut voir comment un théorème de C^*-algèbre ($Ext\,(C^*_{red}(\mathbb{F}_r))$ n'est pas un groupe si $r \geq 2$) peut être prouvé à l'aide de résultats sur des espaces d'opérateurs et des probabilités non commutatives.

Avant de commencer, voici quelques rappels de définitions sur les algèbres d'opérateurs :

Définition 1 (C^*-algèbre). Une algèbre de Banach A est une algèbre complexe normée complète telle que pour tous $a, b \in A$, $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

Une $*$-algèbre est une algèbre munie d'une involution notée $*$ telle que :
- pour tout $a \in A$ $(a^*)^* = a$
- pour tous $a, b \in A$ $(a+b)^* = a^* + b^*$
- pour tous $a, b \in A$ $(ab)^* = b^*a^*$
- pour tous $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

Une C^*-algèbre est une $*$-algèbre munie d'une norme qui en fait une algèbre de Banach et telle que pour tout $a \in A$, $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Dans la suite, toutes les C^*-algèbres seront supposées unitales.

Une C^*-algèbre est munie d'une relation d'ordre partiel, si l'on définit les éléments positifs comme ceux de la forme x^*x.

Un exemple fondamental de C^*-algèbre est donné par l'ensemble $B\,(H)$ des opérateurs bornés (=applications linéaires continues) sur un espace de Hilbert. La norme d'une application est sa norme d'opérateur, et l'involution $*$ est l'application qui à un opérateur associe son adjoint. Les C^*-algèbres $B\,(H)$ sont fondamentales dans le sens où toute C^*-algèbre se plonge (par un morphisme de C^*-algèbres isométrique) dans un $B\,(H)$.

Dans le cas où $H = \ell_2^n$ (l'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel), $B\,(\ell_2^n)$ s'identifie ensemblistement avec l'espace $M_n = M_n\,(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n. Dans toute la suite, M_n sera muni de cette structure de C^*-algèbre.

Définition 2 (Algèbre de von Neumann). Une algèbre de von Neumann est une sous $*$-algèbre de $B\,(H)$ qui est égale à son bicommutant, ce qui est équivalent à dire qu'elle est fermée pour la topologie faible-$*$ ($B\,(H)$ étant vu comme le dual de l'espace des opérateurs à traces, c'est-à-dire les opérateurs $x \in B\,(H)$ tels que $tr(|x|) < \infty$), ou pour la topologie faible/forte d'opérateurs. Une algèbre de von Neumann est donc en particulier une C^*-algèbre.

1 Intégration non commutative

1.1 Probabilités non commutatives

Espace de probabilité non commutatif Un C^*-espace de probabilité non commutatif est un couple (A, τ) où A est une C^*-algèbre unitaire et τ est un *état*, c'est-à-dire :

- τ est une forme linéaire positive ($\tau(a^*a) \geq 0$ pour tout $a \in A$) sur A,
- $\tau(1_A) = 1$.

Si de plus $\tau(a^*a) = 0$ si et seulement si $a = 0$, alors on dit que τ est fidèle. Une hypothèse parfois requise est que τ soit une trace, c'est-à-dire $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour $a, b \in A$.

Si τ n'est pas fidèle, on peut se ramener à un C^*-espace de probabilité non commutatif muni d'une trace fidèle en prenant le quotient de A par l'idéal bilatère fermé constitué des $a \in A$ tels que $\tau(a^*a) = 0$.

Remarque 1. Le choix du vocabulaire n'est peut-être pas très judicieux, puisqu'un espace de probabilité non commutatif peut très bien être commutatif :

Dans le cas où la C^*-algèbre A est commutative, on retrouve la notion classique de probabilité. En effet, une C^*-algèbre commutative est de la forme $C(K)$ pour K compact. Une forme linéaire positive de norme 1 est donc une mesure de probabilité sur K, d'après le théorème de représentation de Riesz.

Une autre façon de voir que les probabilités classiques rentrent dans ce cadre est de remarquer que si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité classique, alors $L_\infty(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité «non commutatif» au sens ci-dessus. C'est même une algèbre de von Neumann, et tout C^*-espace de probabilité (A, τ) dans lequel A est une algèbre de von Neumann commutative est isomorphe à avec $L_\infty(\Omega, \mathbb{P})$ pour un certain $(\Omega, \mathbb{P})$; et dans ce cas τ correspond à une mesure équivalente à $\mathbb{P}$.

Variable aléatoire non commutative Si (A, τ) est un C^*-espace de probabilité, un élément de A est appelé une *variable aléatoire non commutative*. La distribution de $a \in A$ est la suite de ses moments $\tau(a^n), n \geq 0$. La distribution d'une famille $a_i, i \in I$ de variables aléatoires non commutatives est la donnée des moments généralisés $\tau(P(a_i))$ pour des polynômes (non commutatifs) en les a_i.

Il y a une légère différence ici avec le vocabulaire des probabilités commutatives : dans le cas où $a \in A$ est auto-adjoint (ce qui correspond à une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$), la notion de distribution définie ci-dessus correspond bien avec la notion classique. Dans le cas général, pour arriver à la même notion que dans le cas classique, il faudrait prendre en compte les moments généralisés $\tau(P(a, a^*))$ pour des polynômes en 2 variables non commutatives (si $K \subset \mathbb{C}$ est compact, l'ensemble des polynômes en z n'est pas dense dans $C(K)$, mais l'ensemble des polynômes en z et $\overline{z}$ l'est).

On peut aussi quand même remarquer que cette définition apporte une restriction importante par rapport aux espaces de probabilités classiques : les variables aléatoires non commutatives sont *obligatoirement bornées*. Cela peut être corrigé en autorisant des opérateurs non bornés (voir [1]).

Un autre exemple simple d'espace de probabilité non commutatif est donné par l'espace (M_n, tr) des matrices de taille n muni de la trace normalisée :

$$\mathrm{tr}(x) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,i}.$$

Convergence en distribution La notion de convergence en distribution correspond à la convergence étroite (ou en loi).

Si (A_n, τ_n) est une suite d'espaces de probabilité non commutatifs, et si $a_n \in A_n, n \geq 1$, est une suite de variables aléatoires non commutatives dans A_n, on dit que a_n converge vers $a \in (A, \tau)$ en distribution si pour tout $k \geq 0$, $\tau_n(a_n^k) \to \tau(a^k)$.

De même, une suite de r-uplet $(a_{1,n}, \dots a_{r,n}) \in A_n^r$ converge en distribution vers $(a_1, \dots a_r)$ si pour tout polynôme en r variables non commutatives $\tau(P(a_{1,n}, \dots a_{r,n})) \to \tau(P(a_1, \dots a_r))$.

Spectre et distribution Si $x \in A$ est normal, le calcul fonctionnel continu permet de définir une forme linéaire $f \to \tau(f(x))$ sur l'ensemble $C(\sigma(x))$ des fonctions continues sur le spectre de x. Comme τ est continue (de norme 1) car positive, le théorème de Riesz assure l'existence d'une mesure de probabilité μ_x à support contenu dans $\sigma(x)$ telle que $\tau(f(x)) = \int f d\mu_x$. Si τ est fidèle, le support de μ_x est exactement égal à $\sigma(x)$. En particulier la norme de x, qui est égale à son rayon spectral, est égale à $\sup|\lambda|$, le suprémum étant pris sur le support de μ_x. On a donc le lemme suivant, immédiat, mais qui est important puisqu'il fait le lien entre la structure «probabiliste» et la structure «algèbre d'opérateurs» de A.

Lemme 1. *Soient (A, τ) et $(B, \widetilde{\tau})$ deux C^*-espaces de probabilité munis de traces fidèles, et soient $(a_i)_{i\in I} \in A$, $(b_i)_{i\in I} \in B$ des variables aléatoires (non commutatives). Si les familles (a_i, a_i^*) et (b_i, b_i^*) ont même distribution, alors les C^*-algèbres engendrées respectivement par les a_i et les b_i sont isomorphes (donc isométriques).*

Liberté La liberté est une notion qui peut jouer un rôle analogue à l'indépendance dans les probabilités non commutatives. Pour plus de précisions, voir [9]. Soit $(A_i)_{i\in I}$ des sous C^*-algèbres (unitaires) d'un C^* espace de probabilité (A, τ). On dit que les A_i sont *libres* si pour tout $x_1, \dots, x_n$ avec $x_k \in A_{i_k}$, la condition suivante est satisfaite :

$$\text{si } \tau(x_k) = 0 \text{ et } i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_{n-1} \neq i_n, \text{ alors } \tau(x_1 \dots x_n) = 0. \tag{1}$$

En général, des parties $X_i, i \in I$, de A sont dites libres si les C^*-algèbres (unitales) A_i engendrées par X_i sont libres.

La notion de liberté a été introduite à l'origine par Voiculescu dans le but d'étudier les facteurs des groupes libres

1.2 Espaces L_p non commutatifs

Pour obtenir un analogue non commutatif satisfaisant des espaces L_p, on doit ajouter des hypothèses sur l'état : il faut que ce soit une trace et que celle-ci soit normale.

Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann. Une *trace finie* est une application linéaire positive telle que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour $a, b \in \mathcal{M}$, et qui est normale, c'est-à-dire continue pour la topologie faible d'opérateur. Quitte à normaliser τ, on supposera toujours que $\tau(1) = 1$.

On supposera également toujours que τ est fidèle ($\tau(x^*x) = 0$ si et seulement si $x = 0$).

Dans ce cas général, si $1 \leq p < \infty$, on peut définir la *norme p* comme la quantité $\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p}$. L'espace obtenu en complétant par rapport à cette norme est appelé espace L_p non commutatif et est noté $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ ou bien simplement $L_p(\tau)$. Par analogie avec le cas commutatif, on note $L_\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ muni de sa norme d'opérateur.

Bien sûr, quand $\mathcal{M}$ est commutative, $\mathcal{M}$ est de la forme $L_\infty(\Omega, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{P} = \tau$, et les espaces $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ sont les espaces $L_p(\Omega, \mathbb{P})$ classiques.

Les espaces L_p non commutatifs partagent de nombreuses propriétés avec les espaces L_p commutatifs. Citons en quelques-unes :

Théorème 2 (Propriétés des espaces L_p non commutatifs). *De même que dans la cas commutatifs, on a*

- *Si $p = 2$, la norme $\|\cdot\|_2$ provient du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \tau(y^*x)$, ce qui fait de $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ un espace de Hilbert.*
- *Si $1 < p \leq \infty$ et si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, le dual (topologique) de $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ est égal à $L_{p'}(\mathcal{M}, \tau)$.*
- *$L_p(\mathcal{M}, \tau)$ est égal à l'interpolé complexe (voir [2]) entre $L_\infty(\mathcal{M}, \tau)$ et $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Si $\theta = 1/p$, alors*
$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = (L_\infty(\mathcal{M}, \tau), L_1(\mathcal{M}, \tau))_\theta .$$

Ci-dessus, les espaces L_p non commutatifs avaient forcément une trace finie, mais on peut aussi donner un sens au cas de masse totale infinie : pour cela, la trace τ est simplement une application définie sur les éléments positifs de $\mathcal{M}$ à valeurs dans $[0, \infty]$ et qui satisfait quelques propriétés supplémentaires. Pour plus de détails, voir [7].

On peut également définir (de manière abstraite) des espaces L_p non commutatifs à valeurs vectorielles ([5]).

1.3 Martingales non commutatives

Espérance conditionnelle Dans le cas commutatif, si $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités, et si $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}$, l'espérance conditionnelle par rapport à $\widetilde{\mathcal{B}}$ peut être vue (et définie) comme la projection orthogonale $L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \to L_2(\Omega, \widetilde{\mathcal{B}}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire elle se définit uniquement à partir des espaces de fonctions sur $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega, \widetilde{\mathcal{B}})$. Cela permet d'effectuer la même construction dans le cas non commutatif.

Soit $\mathcal{M}$ et τ comme ci-dessus, c'est-à-dire $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann et $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ est une trace de masse totale 1 ($\tau(1) = 1$). On suppose que $\mathcal{N}$ est une sous algèbre de von Neumann de $\mathcal{M}$. Alors naturellement pour tout p, $L_p(\mathcal{N}, \tau|_\mathcal{N})$ s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Comme on l'a déjà remarqué, lorsque $p = 2$, cet espace est un espace de Hilbert. L'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{N}$ est notée $\mathbb{E}^\mathcal{N}$ et est définie comme la projection orthogonale sur $L_2(\mathcal{N}, \tau|_\mathcal{N})$. $\mathbb{E}^\mathcal{N}$ a alors les même propriétés qu'une espérance conditionnelle classique :

- $\tau \circ \mathbb{E}^\mathcal{N} = \tau$.
- $\mathbb{E}^\mathcal{N}(\mathcal{M}_+) \subset \mathcal{N}_+$.
- Si $a, b \in \mathcal{N}$ et $x \in \mathcal{M}$, alors $\mathbb{E}^\mathcal{N}(axb) = a\mathbb{E}^\mathcal{N}(x)b$.

– Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{E}^{\mathcal{N}}$ s'étend en une constraction : $\mathbb{E}^{\mathcal{N}} : L_p(\mathcal{M}, \tau) \to L_2(\mathcal{N}, \tau|_{\mathcal{N}})$

Martingales non commutatives Soit $(\mathcal{M}, \tau)$ comme ci-dessus. Une filtration $(\mathcal{M}_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de sous algèbres de von Neumann de $\mathcal{M}$. Quitte à remplacer $\mathcal{M}$ par l'algèbre de von Neumann engendrée par les $\mathcal{M}_n$, on peut supposer que les $\mathcal{M}_n$ engendrent $\mathcal{M}$. Une martingale est une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans $L_p(M, (\tau))$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{M}_n} x_{n+1} = x_n.$$

La théorie des martingales non commutatives est similaire à celle des martingales commutatives. Par exemple, on a les mêmes théorèmes de convergence :

Théorème 3. *Soit $1 \leq p < \infty$ et $x \in L_p(\tau)$. La suite $x_n = \mathbb{E}^{\mathcal{M}_n} x$ est une martingale, et elle converge dans $L_p(\tau)$ vers x.*

Théorème 4. *Soit $1 < p < \infty$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ une martingale bornée dans $L_p(\tau)$, c'est-à-dire*

$$\sup_n \|x_n\|_p < \infty.$$

Alors la martingale converge dans $L_p(\tau)$.

2 Espaces d'opérateurs

La théorie des espaces d'opérateurs est, comme son nom l'indique, la théorie des espaces vectoriels constitués d'opérateurs sur un espace de Hilbert. Elle s'insère dans la démarche présentée en introduction de ce texte dans laquelle les fonctions ou les scalaires sont remplacés par des opérateurs. De ce point de vue, les espaces d'opérateurs sont parfois considérés comme les analogues non commutatifs des espaces de Banach, puisqu'ils consistent en des espaces vectoriels normés dans lesquels on autorise des combinaisons linéaires à valeurs vectorielles. Pour une introduction détaillée, le lecteur est invité à lire [6].

2.1 Matrices à coefficients opérateurs

L'algèbre $M_n(B(H))$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $B(H)$ s'identifie avec le produit tensoriel $M_n \otimes B(H)$. Si l'on note $E_{i,j} \in M_n$ la matrice de coefficients égaux à 1 en (i, j) et 0 ailleurs, alors une matrice $(a_{i,j})_{i,j\leq n} \in M_n(B(H))$ s'identifie à $\sum_{i,j\leq n} e_{i,j} \otimes a_{i,j}$. La multiplication matricielle correspond à la multiplication terme-à-terme : $\big(M \otimes a\big) \cdot \big(N \otimes b\big) = MN \otimes ab$, de même pour l'involution * : $\big(M \otimes a\big)^* = M^* \otimes a^*$.

Si H est un espace de Hilbert, l'algèbre $M_n(B(H))$ s'identifie également naturellement avec l'ensemble des opérateurs sur $H^{\oplus n} = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$ la somme Hilbertienne de n copies de H. En particulier, cela muni $M_n(B(H))$ d'une norme. Cette norme est d'ailleurs caractérisée par le fait que c'est l'unique norme qui fasse de l'algèbre involutive $M_n(B(H))$ une C^*-algèbre.

2.2 Applications complètement bornées

Définition 3 (Espace d'opérateurs). Un espace d'opérateurs est la donnée d'un sous-espace vectoriel fermé (complexe) $E \subset B(H)$ de l'espace des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H.

La donnée de l'inclusion $E \subset B(H)$ permet de définir une suite de normes $\| \cdot \|_n$ sur $M_n(E)$, $\| \cdot \|_n$ étant la restriction de la norme définie ci-dessus sur $M_n \otimes B(H)$.

Les applications entre espaces d'opérateurs intéressantes à étudier sont les applications *complètement bornées*.

Tout d'abord, si $\varphi : E \subset B(H_1) \to F \subset B(H_2)$ est une application linéaire entre deux espaces d'opérateurs, on définit la suite d'applications $\varphi_n = I_n \otimes \varphi : M_n \otimes E \to M_n \otimes F$ par :

$$\varphi_n\Big((a_{i,j})_{i,j\leq n}\Big) = \Big(\varphi(a_{i,j})\Big)_{i,j\leq n}.$$

Définition 4 (Application complètement bornée). Une application linéaire entre espaces d'opérateurs $\varphi : E \subset B(H_1) \to F \subset B(H_2)$ est dite *complètement bornée* si, pour tout n, $\varphi_n : M_n \otimes E \to M_n \otimes F$ est continue et si $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$.

La norme d'une application complètement bornée est notée $\|\varphi\|_{cb}$ et est définie par $\|\varphi\|_{cb} = \sup_n \|\varphi_n\|$.

Enfin, φ est dite complètement contractante si $\|\varphi\|_{cb} \leq 1$.

Par exemple, un $*$-homomorphisme entre C^*-algèbres est complètement borné (et même complètement contractant). Un autre exemple d'application complètement bornée $\varphi : B(H) \to B(K)$ est donné par $a \mapsto \varphi(a) = V^*aW$ si $V, W \in B(K; H)$. Alors $\|\varphi\|_{cb} \leq \|V\|\|W\|$.

Dans la catégorie des espaces d'opérateurs, les objets sont les espaces d'opérateurs et les morphismes sont les applications complètement bornées. On y identifie deux espaces d'opérateurs s'ils sont complètement isométriques. La donnée d'un espace d'opérateurs abstrait est donc simplement la donnée d'un espace vectoriel E et d'une suite de normes $\| \cdot \|_m$ sur $M_m \otimes E$.

Remarque 2. Les espaces d'opérateurs sont une structure intermédiaire entre les espaces de Banach et les C^*-algèbres. Par cela, on entend que tout espace d'opérateurs est un espace de Banach (si on ne se souvient que de la norme sur E), et que réciproquement tout espace de Banach peut être muni de plusieurs (une infinité) structures d'espaces d'opérateurs. De même, (par définition !), toute partie d'une C^*-algèbre est un espace d'opérateurs si on ne se souvient que de la suite des normes $\| \cdot \|_n$. Il est peut-être moins immédiat de se rendre compte que pour espace d'opérateurs abstrait donné, il peut exister plusieurs réalisations de cet espace comme une partie d'un $B(H)$ telles que les C^*-algèbres engendrées sont distinctes (ne sont pas isomorphes). Un exemple frappant est donné par les espaces d'opérateurs engendrés par les générateurs (resp. les générateurs et leurs inverses) dans la C^*-algèbre réduite du groupe libre à r générateurs. Voir plus loin le lemme 5.

Remarque 3. On peut noter que d'après le quatrième texte du mémoire de magistère dont fait partie cette introduction, la situation est plus simple si on remplace les parties de $B(H)$ par des parties des espaces L_p non commutatifs (avec $p \notin 2\mathbb{N}$) : si (A, τ) et (B, τ') sont des C^*-espaces de probabilités non commutatifs munis de traces fidèles et s'il existe une bijection $u : E \subset A \to F \subset B$ qui préserve les normes p entre les espaces de matrices $M_n \otimes E$ et $M_n \otimes F$, alors les C^*-algèbres engendrées par E et F sont isomorphes (*i.e.* isométriques).

2.3 Exemples

La théorie des espaces d'opérateurs a bien sûr un intérêt propre comme on va l'expliquer ci-dessous. Cependant, l'étude des espaces d'opérateurs engendrés par des générateurs remarquables de C^*-algèbres particulières permet d'obtenir des résultats intéressants pour l'étude des ces C^*-algèbres. Voici quelques exemples, tirés de mon mémoire de M2.

Soit G un groupe (discret). On note $\ell^2(G)$ l'espace de Hilbert des suites indexées par G de carré sommable : $f : G \to \mathbb{C}$ tel que $\sum |f(g)|^2 < \infty$. Si $g \in G$, on note $\delta_g \in \ell^2(G)$ l'élément tel que $\delta_g(h) = 1$ si $g = h$ et 0 sinon. La famille $(\delta_g)_{g \in G}$ forme une base hilbertienne de $\ell^2(G)$. La *représentation régulière à gauche* de G sur $\ell^2(G)$ est le morphisme de groupe $\lambda : G \to \mathcal{U}\left(\ell^2(G)\right)$ défini par : si $f \in \ell^2(G)$, $\lambda(g)f(h) = f(g^{-1}h)$. $\lambda(h)$ agit sur la base $(\delta_g)_{g \in G}$ par $\lambda(h)\delta_g = \delta_{hg}$

Définition 5 (C^*-algèbre réduite de G). La C^*-algèbre réduite de G est l'adhérence dans $B(\ell_2(G))$ de l'espace vectoriel engendré par l'image de G par sa représentation régulière à gauche, et elle est notée $C^*_{red}(G)$.

Dans le cas où $G = \mathbb{F}_r$ est le groupe libre à r générateurs $g_1 \dots g_r$, on a deux espaces d'opérateurs remarquables :

$$\begin{aligned} E_r &= \left[\lambda(g_1), \lambda(g_1^{-1}), \lambda(g_2), \lambda(g_2^{-1}), \dots, \lambda(g_r), \lambda(g_r^{-1})\right] \\ \widetilde{E}_r &= \left[\lambda(g_1), \lambda(g_2), \dots, \lambda(g_r)\right]. \end{aligned}$$

Le fait assez étonnant, et qui illustre la remarque 2, est que E_r et $\widetilde{E}_{2r}$ sont égaux en tant qu'espaces d'opérateurs :

Lemme 5. *L'application $u : E_r \to \widetilde{E}_{2r}$ qui envoie $\lambda(g_i)$ sur $\lambda(g_i)$ et $\lambda(g_i^{-1})$ sur $\lambda(g_{i+r})$ pour tout $1 \leq i \leq r$ est complètement isométrique.*

À l'inverse, sous certaines hypothèses supplémentaire, la structure d'espace d'opérateurs détermine entièrement la C^*-algèbre qu'il engendre. Ce genre de résultat permet de transposer des problèmes de C^*-algèbre à des problèmes d'espaces d'opérateurs, ce qui peut être une bonne chose ([4]). C'est par exemple le cas lorsque l'espace d'opérateurs est engendré par 1 et des unitaires :

Lemme 6. *Soit A et B des C^*-algèbres unitales engendrées par des unitaires $u_1, \dots u_n$ (resp. $v_1 \dots v_n$). Soient E et F les espaces d'opérateurs*

$$\begin{aligned} E &= [1, u_1, \dots u_n] \\ F &= [1, v_1, \dots v_n]. \end{aligned}$$

Soit $\varphi : E \to F$ linéaire telle que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(u_k) = v_k$ pour tout $k = 1 \dots n$. Si φ est complètement isométrique, alors φ s'étend en un isomorphisme de C^*-algèbres entre A et B.

2.4 Construction d'espaces d'opérateurs

Pour construire un espace d'opérateurs, il existe une méthode plus agréable que d'exhiber un espace de Hilbert et de choisir un sous-espace fermé de $B(H)$. Cette méthode repose sur un théorème de Ruan ([8]), qui, étant donné un espace de Banach E, caractérise les suites de normes α_n sur $M_n(E)$ qui définissent une structure d'espace d'opérateurs sur E, c'est-à-dire qui proviennent d'un plongement concret de E dans un $B(H)$. Ce résultat est à l'origine du développement de la théorie des espaces d'opérateurs, puisqu'il permet de définir la notion de quotient, de dualité, d'interpolation, d'ultraproduits etc dans la catégorie des espaces d'opérateurs... C'est à la vue de ces constructions possibles que les espaces d'opérateurs sont parfois appelés des espaces de Banach non commutatifs.

Théorème 7 (Ruan). *Soit E un espace vectoriel complexe et α_n une suite de normes sur $M_n(E)$ tel que E muni de la norme α_1 soit un espace de Banach. Alors il existe une structure d'espace d'opérateurs sur E induisant les normes α_n sur $M_n(E)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *(Compatibilité avec la norme sur M_n) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in M_n$ et $x \in M_n(E)$,*
$$\alpha_n(a \cdot x \cdot b) \leq \|a\| \; \alpha_n(x) \; \|b\|.$$
- *(Compatibilité des normes α_n entre elles) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x \in M_m(E)$, $y \in M_n(E)$,*
$$\alpha_{n+m} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \max\big(\alpha_m(x), \alpha_n(y)\big).$$

Pour finir cette introduction, on présente quelques conséquences importantes de ce théorème (parmi de nombreuses autres, voir [6]).

Dual Soit E un espace d'opérateurs. En particulier, E est un espace de Banach. Notons E^* son dual. On peut munir E^* d'une structure d'espace d'opérateurs de la façon suivante. En tant qu'espace vectoriel, $M_n(E^*)$ s'identifie avec l'ensemble des applications linéaires continues de E dans M_n. Définissons la norme α_n sur d'un élément $u \in M_n(E^*)$ comme la norme complètement borné de l'application associée entre les espaces d'opérateurs E et M_n
$$\alpha_n(u) = \|u : E \to M_n\|_{cb}.$$

Pour voir que cela définit bien une structure d'espace d'opérateurs sur E^*, il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites (ce qui est immédiat). Il n'est pas non plus difficile de voir que la norme α_1 sur E^* correspond à la norme «classique» sur le dual de E (c'est un fait général que la norme d'une application à valeurs dans $\mathbb{C}$ est égale à sa norme complètement bornée).

Quotient Soient $E_2 \subset E_1 \subset B(H)$ deux espaces d'opérateurs. Pour définir une structure d'espace d'opérateurs sur l'espace de Banach quotient ${E_2}/{E_1}$, on remarque qu'ensemblistement, $M_n({E_2}/{E_1})$ s'identifie à ${M_n(E_2)}/{M_n(E_1)}$ qui est un espace de Banach. Si on note α_n la norme associée, il suffit de voir que la suite α_n vérifie les conditions du théorème de Ruan, ce qui n'est pas difficile.

Interpolation complexe Le théorème de Ruan permet également de définir la notion d'interpolation complexe entre deux espaces d'opérateurs compatibles. La construction est dans la même idée que pour les deux exemples précédents et ne pose pas de problèmes une fois que l'on connaît les foncteurs d'interpolation complexe pour les espaces de Banach (voir [2]), mais pour ne pas trop entrer dans les détails on restera là.

Références

[1] Hari Bercovici and Dan Voiculescu. Free convolution of measures with unbounded support. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3) :733–773, 1993.

[2] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.

[3] Alain Connes. *Géométrie non commutative.* InterEditions, Paris, 1990.

[4] Uffe Haagerup and Steen Thorbjørnsen. A new application of random matrices : $\mathrm{Ext}(C^*_{\mathrm{red}}(F_2))$ is not a group. *Ann. of Math. (2)*, 162(2) :711–775, 2005.

[5] Gilles Pisier. Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps. *Astérisque*, (247) :vi+131, 1998.

[6] Gilles Pisier. *Introduction to operator space theory*, volume 294 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[7] Gilles Pisier and Quanhua Xu. Non-commutative L^p-spaces. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*, pages 1459–1517. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[8] Zhong-Jin Ruan. Subspaces of C^*-algebras. *J. Funct. Anal.*, 76(1) :217–230, 1988.

[9] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. *Free random variables*, volume 1 of *CRM Monograph Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups.