

Dynamique Complexe

De Castro Yohann et Saleur Benoît
Sujet proposé par Frédéric Le Roux,
d'après *Dynamics in one complexe variable*, John Willard Milnor.

Juin 2005

Table des matières

1	Dynamique de Fatou et Julia	2
1.1	Ensemble de Julia et de Fatou	2
1.2	Cycles	3
1.3	Quelques propriétés de l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f	5
2	Dynamique locale	9
2.1	Points fixes attractifs et répulsifs	9
2.2	Points fixes super-attractifs	11
2.3	Points fixes paraboliques ou rationnellement neutres	11
2.3.1	Etude du cas où $\lambda = 1$	11
2.3.2	Etude du cas général	14
2.4	Points fixes irrationnellement neutres	15
A	Analyse complexe sur la sphère de Riemann	20
A.1	La sphère de Riemann	20
A.2	Familles normales, théorème de Montel	23
A.3	Théorème de Jensen, Théorème de F. et M. Riesz	26
B	Approximation des réels par des rationnels	28

Résumé

Ce mémoire de maîtrise se propose de donner les notions de bases du système dynamique défini par une fonction holomorphe, c'est-à-dire étudier le comportement des orbites obtenues après itération de cette fonction et décrire comment celles-ci sont réparties dans le plan. Ce programme a été inauguré en 1919 par G. JULIA et P. FATOU. Après une longue période de somnolence, il a retrouvé un renouveau d'activité avec les travaux de C. SIEGEL en 1942 et ces vingt dernières années avec notamment les travaux de J.C. Yoccoz.

La première partie introduit les objets fondamentaux de la dynamique holomorphe, notamment les ensembles de Julia et Fatou, dont on donnera quelques propriétés élémentaires. Il y sera également question du multiplicateur d'une fonction en un point périodique et du bassin d'attraction d'un point périodique attractif. La deuxième partie s'intéresse à l'étude de la dynamique d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point périodique, selon la valeur de son multiplicateur. En particulier, le théorème de la fleur et les différents théorèmes de linéarisation constituent de précieux outils pour une étude plus poussée de l'ensemble de Julia.

1 Dynamique de Fatou et Julia

Les ensembles de Fatou et Julia sont des objets d'étude privilégiés en dynamique holomorphe. On les définira des façon dynamique avant d'en donner une caractérisation plus topologique. On définira également les notions de cycle et de bassin d'attraction, qui sont à la base de la dynamique holomorphe.

On désigne par \mathbb{D} le disque unité ouvert de \mathbb{C} , et par $\hat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann. Les compléments d'analyse complexe, en particulier sur les familles normales à valeurs dans la sphère de Riemann et le théorème de Montel, sont en annexe.

1.1 Ensemble de Julia et de Fatou

La dynamique holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ a pour objet l'étude des différents types d'orbites

$$z_0 \xrightarrow{f} z_1 = f(z_0) \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} z_n = f^n(z_0) \xrightarrow{f} \dots$$

sous l'action du semi-groupe $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des itérées d'une application holomorphe.

Définition 1.1 (Ensemble de Fatou et de Julia). — Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ une application holomorphe.

L'ensemble de Fatou de f , noté \mathfrak{F}_f , est l'ensemble des points de $\hat{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels la famille des itérées $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de f est une famille¹ normale.

On appelle ensemble de Julia de f , noté \mathfrak{J}_f , le complémentaire de l'ensemble de Fatou.

$$\mathfrak{J}_f := \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{F}_f$$

Remarque. — L'ensemble de Fatou \mathfrak{F}_f est le sous-ensemble maximal de $\hat{\mathbb{C}}$ sur lequel $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est normale.

— L'ensemble de Fatou est constitué des points $z \in \hat{\mathbb{C}}$ dont l'orbite

$$O^+(z) := \{z_n = f^n(z); n \in \mathbb{N}^*\}$$

est stable par perturbation du point initial z , c'est-à-dire que le comportement de l'orbite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stable sur un voisinage de z .

— En revanche, le comportement de l'orbite d'un point de l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f sous l'influence d'une perturbation n'est pas prévisible.

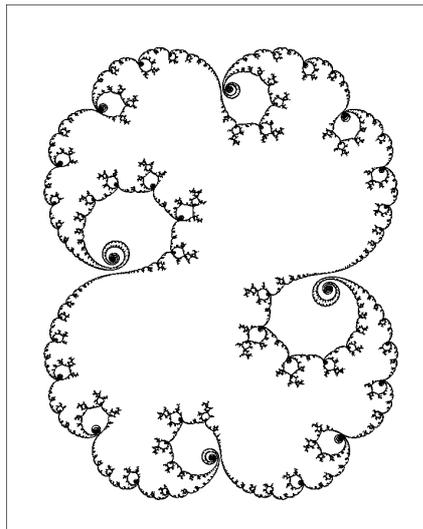


FIG. 1 – Une courbe fermée, l'ensemble de Julia de l'application $z \mapsto z^2 + (0.99 + 0.14i)z$.

¹la définition d'une famille normale à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$ est donnée en annexe, définition (A.3)

Définition 1.2. — Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ une application holomorphe, soit $a \in \hat{\mathbb{C}}$.
On définit le « passé » $O^-(a)$ de a par f

$$O^-(a) := \{z \in \hat{\mathbb{C}}; \exists k \in \mathbb{N}, f^k(z) = a\}$$

Le « futur » $O^+(a)$ de a par f est défini par

$$O^+(a) := \{f^k(a), k \in \mathbb{N}\}$$

On notera $O(a)$ la « grande orbite » de a , c'est-à-dire l'ensemble des points dont le futur finit par rencontrer le futur de a

$$O(a) := \{z \in \hat{\mathbb{C}}; \exists m, n \in \mathbb{N}, f^m(z) = f^n(a)\}$$

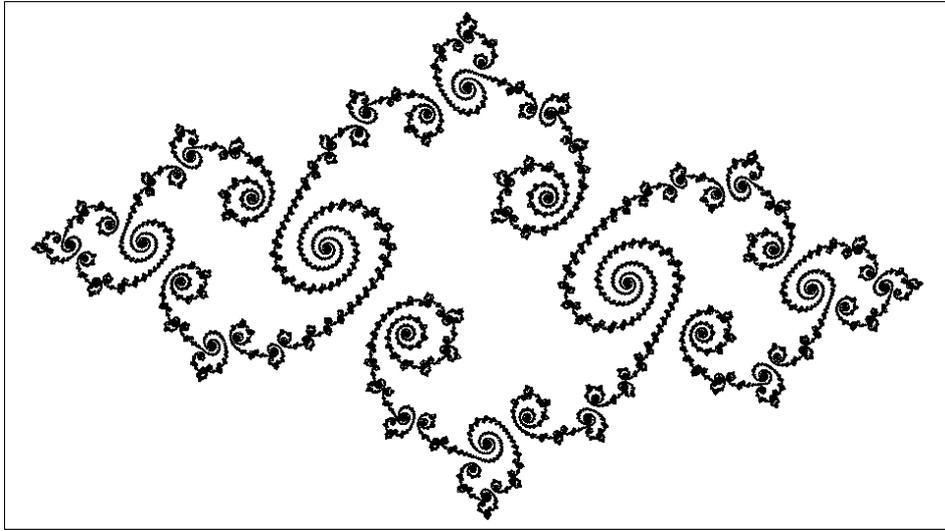


FIG. 2 – Un ensemble de Julia avec une infinité de composantes connexes (de type ensemble de Cantor), $z \mapsto z^2 + (-0.765 + 0.12i)z$.

Il découle de la définition des ensembles de Fatou et de Julia (Définition (1.1)) la proposition suivante :

Proposition 1.1. — L'ensemble de Fatou \mathfrak{F}_f est un ensemble *ouvert totalement invariant* :

$$f(\mathfrak{F}_f) = f^{-1}(\mathfrak{F}_f) = \mathfrak{F}_f$$

— L'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f est *fermé et totalement invariant*.

1.2 Cycles

On appelle *cycle* de f l'ensemble des points $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ tel que chaque point z_i est un point fixe de l'itérée f^p . On associe alors le *multiplicateur* λ de f^p

$$\lambda := (f^p)'(z_i) = f'(z_0)f'(z_1)\dots f'(z_{p-1})$$

qui est indépendant de l'entier $i \in \{0, \dots, p-1\}$.

Remarque. — $\lambda = 0$ si et seulement si un des z_i de l'orbite est un point critique (i.e. $f'(z_i) = 0$) de f .

— Dans le cas où le point à l'infini est un point fixe pour une fraction rationnelle f , la définition peut être ambiguë. Le multiplicateur λ n'est pas égal à la limite quand $z \rightarrow \infty$ de la dérivée de $f^p(z)$, mais plutôt à l'inverse de ce nombre. Le multiplicateur d'un point fixe est le coefficient d'ordre 1 dans le développement en série au voisinage du point fixe. Dans le cas de ∞ , le multiplicateur s'identifie au coefficient d'ordre 1 dans le

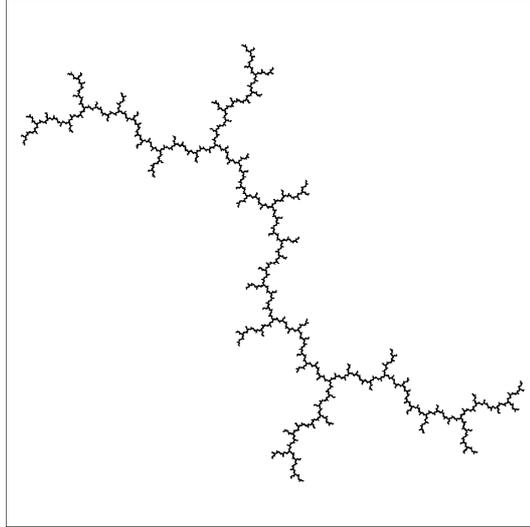


FIG. 3 – Une "dendrite", l'ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + i$.

développement en série de $1/f(1/\zeta) = \lambda\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots$ au voisinage de l'origine. Un calcul montre alors que :

$$\lambda_\infty := \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(f^p)'(z)}$$

En particulier, ce point fixe est super-attractif si et seulement si $|(f^p)'(z)| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} +\infty$.

Définition 1.3. — Si f est holomorphe au voisinage de z_0 et $f(z_0) = z_0$, le nombre complexe $\lambda = f'(z_0)$ est le *multiplicateur* du point fixe z_0 . On classe alors les points fixes de la manière suivante :

<i>Super-attractif</i>	si $\lambda = 0$
<i>Attractif</i>	si $ \lambda \in]0, 1[$
<i>Répulsif</i>	si $ \lambda > 1$
<i>Rationnellement neutre</i>	si $\lambda^q = 1$ pour un entier q non nul
<i>Irrationnellement neutre</i>	si $ \lambda = 1$ et $\lambda^q \neq 1$ pour tout entier q non nul

Proposition 1.2. — Les cycles répulsifs sont contenus dans l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f .

Démonstration. — Considérons un point fixe z_0 de f^p de multiplicateur λ tel que $|\lambda| > 1$. Supposons que f soit normale au voisinage de z_0 . On peut alors extraire une suite $(f^{p \cdot n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(f^{pn})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur un voisinage de z_0 vers une application holomorphe g . En considérant éventuellement $1/f$, on peut supposer que f n'atteint pas l'infini sur un voisinage de z_0 , l'image de ce voisinage est alors incluse dans \mathbb{C} . Le théorème de convergence uniforme de Weierstrass montre alors que la série des dérivées converge uniformément vers la dérivée g' de g où g est une application holomorphe à valeur dans \mathbb{C} définie sur un voisinage de z_0 . En particulier, la suite des $(f^{p \cdot n_k})'(z_0) = \lambda^{n_k}$ reste bornée quand $k \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible puisque $|\lambda| > 1$. \square

Proposition 1.3. — Les cycles attractifs et super-attractifs sont contenus dans l'ensemble de Fatou \mathfrak{F}_f .

Démonstration. — Considérons $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ un cycle (super-)attractif de multiplicateur λ .

Soit $i \in [0, p-1]$, montrons que f est normale sur un voisinage U_i de z_i , l'application f sera alors normale sur le voisinage

$$U = \bigcup_{i \in \{0, \dots, p-1\}} U_i$$

de l'orbite.

Soit ρ tel que $|\lambda| < \rho < 1$, par continuité de $(f^p)'$ on a

$$|f^p(w) - z_i| \leq \rho |w - z_i|$$

sur un voisinage V_i de z_i . Ce qui implique que

$$|f^{np}(w) - z_i| \leq \rho^n |w - z_i|$$

sur le voisinage V_i de z_i . Par conséquent, les itérées de f^p convergent uniformément vers z_i sur ce voisinage.

Pour finir la preuve, soit $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite extraite arbitraire de $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrons qu'après une éventuelle extraction, $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur un voisinage U_i de z_i indépendant de la suite extraite $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ choisie.

Nécessairement la suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rencontre une infinité de fois au moins un des ensembles

$$E_q := \{np + q; n \in \mathbb{N}\}$$

qui forment une partition de \mathbb{N} pour $q \in [0, p-1]$. Il existe donc q tel qu'il existe une suite extraite de $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de la forme $(f^{q+p \cdot n_l})_{l \in \mathbb{N}}$. D'après ce qui précède on sait qu'il existe un voisinage V_i de z_i sur lequel on a convergence uniforme de toute suite de la forme $(f^{p \cdot n_{k'}})_{k' \in \mathbb{N}}$. Posons alors

$$U_i = \bigcap_{j \in \{0, \dots, p-1\}} f^{-j}(V_{i+j})$$

où $i+j$ est pris modulo $p-1$. U_i est un voisinage de z_i (en effet pour tout $j \in [0, p-1]$, $f^{-j}(V_{i+j})$ est un voisinage de z_i) indépendant de la suite extraite $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. En particulier, pour tout point $w \in U_i$, $f^q(w) \in V_{i+q}$. Comme $f^{q+p \cdot n_l}(w) = f^{p \cdot n_l}(f^q(w))$ et par convergence uniforme de $(f^{p \cdot n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ sur V_{i+q} , on en déduit que $(f^{q+p \cdot n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur U_i donc sur

$$U = \bigcup_{i \in \{0, \dots, p-1\}} U_i$$

voisinage de l'orbite ne dépendant que de f . □

Définition 1.4 (Bassin d'attraction). — A tout point fixe attractif ou super-attractif z_0 de f on associe le *bassin d'attraction*

$$A(z_0) := \{\omega \in \mathbb{C}; f^n(\omega) \rightarrow z_0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$$

Le *bassin immédiat d'attraction*, noté $A^*(z_0)$, est alors la composante connexe de $A(z_0)$ contenant z_0 .

La proposition précédente (Proposition (1.3)) montre que :

Proposition 1.4. — Les bassins d'attraction des cycles attractifs ou super-attractifs sont contenus dans l'ensemble de Fatou.

Il est souvent utile de remplacer f par une conjuguée, on peut alors vérifier que cela ne modifie pas la nature de la dynamique (voir la proposition (A.5) pour le définition d'une transformation de Möbius) :

Proposition 1.5. — Pour toute transformation de Möbius ϕ et toute fraction rationnelle f on a

$$\mathfrak{J}_{\phi^{-1} \circ f \circ \phi} = \phi^{-1}(\mathfrak{J}_f) \text{ et } \mathfrak{J}_{\phi^{-1} \circ f \circ \phi} = \phi^{-1}(\mathfrak{J}_f)$$

Si $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ est un cycle de f alors $\{\phi^{-1}(z_0), \phi^{-1}(z_1), \dots, \phi^{-1}(z_{p-1})\}$ est un cycle de $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ et ces deux cycles ont le même multiplicateur.

1.3 Quelques propriétés de l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f

Dans toute cette partie on restreint notre étude aux fractions rationnelles $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de degré au moins égal à 2, $d^\circ f \geq 2$.

Proposition 1.6. — L'ensemble de Julia vérifie les trois propriétés suivantes :

1. \mathfrak{J}_f n'est pas vide
2. $\mathfrak{J}_f = \mathfrak{J}_{f^k}$, pour tout $k \geq 1$
3. \mathfrak{J}_f est soit d'intérieur vide, soit égal à $\hat{\mathbb{C}}$.

Démonstration. 1. — Si $\mathfrak{J}_f = \hat{\mathbb{C}}$ alors il existe une sous-suite $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\hat{\mathbb{C}}$ vers une fonction holomorphe g sur $\hat{\mathbb{C}}$, et d'après le théorème de caractérisation des fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann (théorème (A.2)), g est une fraction rationnelle. De plus, f^{n_k} a pour degré $(d^\circ f)^{n_k} \geq 2^{n_k}$ et est surjective. Soit alors $y \in \hat{\mathbb{C}}$, il existe x_k tel que $f^{n_k}(x_k) = y$, et comme $\hat{\mathbb{C}}$ est compact, à extraction près, $x_k \rightarrow x$, et donc $g(x) = y$. Ainsi, g ne peut pas être constante.

Le principe de l'argument permet de montrer aisément que g et f^{n_k} ont même nombre de zéros à partir d'un certain rang : il suffit d'intégrer g'/g autour d'un zéro ou d'un pôle de f^{n_k} . Le degré de f^{n_k} tendant vers l'infini, ceci est impossible. Donc l'ensemble de Julia n'est pas vide.

2. — Montrons que $\mathfrak{J}_f = \mathfrak{J}_{f^k}$. L'inclusion $\mathfrak{J}_f \subset \mathfrak{J}_{f^k}$ est clair. Soit $(f^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ une sous-suite arbitraire de la suite des itérées de f . On peut écrire $n_i = k.l_i + r_i$ où $r_i \in \{0, \dots, k-1\}$. Après une éventuelle extraction, on peut alors supposer que $r_i = r$. Alors,

$$f^{n_i} = f^r \circ g^{l_i}$$

où $g = f^k$, ce qui montre que $(f^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est normale là où $(g^{l_i})_{i \in \mathbb{N}}$ l'est et justifie l'inclusion réciproque.

3. — Supposons \mathfrak{J}_f d'intérieur non vide. Soit U un ouvert simplement connexe non vide contenu dans \mathfrak{J}_f . La suite $f^n(U)$ évite au plus deux points de $\hat{\mathbb{C}}$ car sinon, d'après le théorème de Montel (Théorème (A.10)), U serait contenu dans \mathfrak{J}_f . Donc il existe deux points $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$ tels que

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\} \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$$

Comme $U \subset \mathfrak{J}_f$ et que \mathfrak{J}_f est invariant par f , on a aussi

$$\bigcup_{n \geq 0} f^n(U) \subset \mathfrak{J}_f$$

L'ensemble de Julia étant fermé on en déduit que $\mathfrak{J}_f = \hat{\mathbb{C}}$. □

Une notion importante qui va nous être utile pour prouver que l'ensemble de Julia est le bord du bassin d'attraction de l'infini est celle de *point exceptionnel*.

Définition 1.5 (Point exceptionnel). — Soit $a \in \mathfrak{J}_f$. On dit que α est *exceptionnel pour a* s'il existe un voisinage U de a et un entier p tels que

$$\alpha \notin \bigcup_{n \geq p} f^n(U)$$

On note $E(f, a)$ l'ensemble des points exceptionnels pour a .

Le Théorème suivante précise la définition de point exceptionnel.

Théorème 1.7 (Ensemble exceptionnel). — *L'ensemble des points exceptionnels $E(f, a)$ ne dépend pas du choix du point $a \in \mathfrak{J}_f$. On définit alors l'ensemble exceptionnel \mathcal{E}_f de f comme étant celui pour un point arbitraire $a \in \mathfrak{J}_f$.*

— *L'ensemble exceptionnel \mathcal{E}_f contient au plus deux points. Ces points sont super-attractifs et donc contenus dans l'ensemble de Fatou \mathfrak{J}_f :*

$$\mathcal{E}_f \subset \mathfrak{J}_f$$

De plus, si \mathcal{E}_f contient un point alors f est conjugué à un polynôme et si \mathcal{E}_f contient deux points alors $f(z) = cz^{\pm d}$ à une conjugaison près.

Démonstration. — Soit U un voisinage du point $a \in \mathfrak{J}_f$. La suite $f^n(U)$ évite au plus deux points de $\hat{\mathbb{C}}$ car sinon, d'après le théorème de Montel (Théorème A.10), $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait une famille normale sur U donc $U \subset \mathfrak{J}_f$. Ainsi $E(f, a)$ est constitué d'au plus 2 points.

Montrons que $f^{-1}(E(f, a)) \subset E(f, a)$. Soit $\beta \in f^{-1}(E(f, a))$ alors il existe $\alpha \in E(f, a)$ tel que $\alpha = f(\beta)$. Si $\beta \in f^n(U)$ alors $\alpha \in f^{n+1}(U)$ et par contraposée si $\alpha \notin f^{n+1}(U)$ alors $\beta \notin f^n(U)$. Comme $\alpha \in E(f, a)$, il existe un entier p tel que $\alpha \notin \bigcup_{n \geq p} f^n(U)$ donc $\beta \notin \bigcup_{n \geq p-1} f^n(U)$. Ce qui prouve que $\beta \in E(f, a)$. On en déduit alors que $f^{-1}(E(f, a)) \subset E(f, a)$.

Or f est une fraction rationnelle non constante donc $f(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ (d'après le théorème de d'Alembert-Gauss) et chaque point de $E(f, a)$ a alors au moins un antécédent par f donc $\#f^{-1}(E(f, a)) \geq \#E(f, a)$, finalement

$$f^{-1}(E(f, a)) = E(f, a)$$

et même comme f est surjective,

$$f(E(f, a)) = E(f, a)$$

Supposons $E(f, a) \neq \emptyset$. Si $E(f, a) = \{\alpha\}$, alors $f(\alpha) = \alpha$.

Si $\alpha = \infty$ alors f est un polynôme (le seul antécédent de ∞ par f est lui-même donc f n'a pas de pôle). D'après la proposition (1.5), f et g induisent la même dynamique modulo la composition par ϕ . Le point α est alors un point super-attractif de f (le multiplicateur de ∞ d'un polynôme de degré au moins deux est 0). On en déduit que $\alpha \in \mathfrak{J}_f$ (Proposition (1.3)) et que $\alpha \in E(f, b)$ pour tout point $b \in \mathfrak{J}_f$. En effet, si il existe un entier N pour lequel $\alpha \in f^N(V)$, où V est un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$, alors $\alpha \in V$ car $\{\alpha\}$ est totalement invariant et il suffit alors de prendre un voisinage de b qui ne rencontre pas α (ce qui est possible car $\alpha \in \mathfrak{J}_f \neq b \in \mathfrak{J}_f$ et que $\hat{\mathbb{C}}$ est séparée) pour voir que $\alpha \in E(b, f)$.

Si $\alpha \neq \infty$ conjugurons la fraction rationnelle f par la transformation de Möbius $\phi(z) = 1/(z - \alpha)$, alors $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ n'a pas de pôle de \mathbb{C} et est donc un polynôme.

Si maintenant $E(f, a) = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha \neq \beta$, on voit en raisonnant de la même façon que deux possibilités se présentent :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \alpha = f^{-1}(\alpha) \quad \text{et} \quad f(\beta) = \beta = f^{-1}(\beta) & \quad (\text{cas 1}) \\ f(\alpha) = \beta = f^{-1}(\alpha) \quad \text{et} \quad f(\beta) = \alpha = f^{-1}(\beta) & \quad (\text{cas 2}) \end{aligned}$$

Considérons la transformation $\phi(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$, où on a supposé $\alpha \neq \beta$, son inverse permet par conjugaison de se ramener au cas où $\alpha = 0$ et $\beta = \infty$. Dans le premier cas on remarque que f est un polynôme dont la seule racine est 0 d'où $f = cz^d$. Dans le deuxième cas, on se ramène au premier en considérant $1/f$, f est alors conjugué à cz^{-d} . On en déduit alors que $E(f, a)$ est inclus dans le Fatou et par le même argument que précédemment on voit que $E(f, a) \subset E(f, b)$ et par cardinalité $E(f, a) = E(f, b)$ pour tout $b \in \mathfrak{J}_f$.

S'il existe $a \in \mathfrak{J}_f$ tel que $\#E(f, a) = 2$ alors $E(f, a) = E(f, b)$ pour tout $b \in \mathfrak{J}_f$. Sinon s'il existe $a \in \mathfrak{J}_f$ tel que $\#E(f, a) = 1$ alors $E(f, a) \subset E(f, b)$ pour tout $b \in \mathfrak{J}_f$ mais $\#E(f, b) < 2$ d'où l'égalité $E(f, a) = E(f, b)$. Si aucune des deux éventualités précédentes n'est réalisée alors l'ensemble exceptionnel est vide. Dans tout les cas on voit qu'il ne dépend pas du point $a \in \mathfrak{J}_f$. \square

Remarque. — Ce théorème signifie qu'il existe un ensemble \mathcal{E}_f , d'au plus deux points, ne dépendant que de f pour lequel

$$\mathfrak{J}_f \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}_f \subset \bigcup_{n \geq p} f^n(U)$$

pour tout ouvert U rencontrant l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f et tout entier naturel p .

En particulier, tout point de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}_f$ est "visité" une infinité de fois par la suite $f^n(U)$.

Théorème 1.8. — *L'ensemble de Julia est parfait.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer qu'aucun point de \mathfrak{J}_f n'est isolé. Soit donc $a \in \mathfrak{J}_f$ et U un voisinage ouvert de a . on distingue deux cas :

1^{er} cas : a n'est pas périodique, i.e. $f^n(a) \neq a$, pour tout entier n . Comme $a \in \mathfrak{J}_f$, a n'est pas exceptionnel et donc il existe un entier N tel que $a \in f^N(U)$. Soit donc $w \in U$ tel que $f^N(w) = a$. Comme \mathfrak{J}_f est totalement invariant par f , $w \in \mathfrak{J}_f$ donc on a bien $w \in U \cap \mathfrak{J}_f$ et $w \neq a$ car a n'est pas périodique.

2^{ième} cas : a est périodique. Comme $\mathfrak{J}_f = \mathfrak{J}_{f^k}$ on peut remplacer f par une itérée et supposer que $f(a) = a$ et que $df \geq 4$. Le point a ne peut alors être critique car sinon il serait contenu (avec son bassin super-attractif) dans \mathfrak{F}_f . Ainsi a n'est pas une valeur critique de f donc a est racine simple de $f(z) - a = 0$. Soit b une racine de $f(z) - a = 0$ distincte de a . Comme $f(b) = a \in \mathfrak{J}_f$ et que \mathfrak{J}_f est totalement invariant, on en déduit que $b \in \mathfrak{J}_f$. Par le même argument que pour a on montre que b est une racine simple de $f(z) - a$.

De plus $df \geq 4$, le théorème de d'Alembert-Gauss et le même argument que ci-dessus montrant que toute racine b distincte de a telle que $f(b) - a = 0$ est une racine simple, montrent alors qu'il existe au moins trois autres racines b_1, b_2, b_3 distinctes deux à deux telles que $f(b_i) = a$, ce qui montre que $b_i \in O^-(a)$ pour tout entier $i \in \{1, 2, 3\}$.

L'un au moins des b_i , disons b_1 , n'est pas dans \mathcal{E}_f car $\# \mathcal{E}_f \leq 2$. En procédant comme dans le premier cas on trouve $w \in U \cap O^-(b_1) \subset U \cap \mathfrak{J}_f$, là encore $w \neq a$ car $a \notin O^-(b_1)$ (car a est invariant par f , si $a \in O^-(b_1)$ alors $a = b$). \square

Théorème 1.9. — Si $a \notin \mathcal{E}_f$ alors

$$\mathfrak{J}_f \subset \overline{O^-(a)}$$

— Si $a \in \mathfrak{J}_f$ alors

$$\mathfrak{J}_f = \overline{O^-(a)}$$

Autrement dit, l'ensemble de toutes les préimages itérées $O^-(a)$ d'un point a de l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f est dense dans l'ensemble de Julia \mathfrak{J}_f .

Démonstration. — Soit U un ouvert arbitraire rencontrant \mathfrak{J}_f . Si $a \notin \mathcal{E}_f$ alors $a \in f^N(U)$ pour un entier $N \in \mathbb{N}$ et alors $O^-(a) \cap U \neq \emptyset$. Ceci établit la première assertion.

Puisque $\mathfrak{J}_f \cap \mathcal{E}_f = \emptyset$ alors $\mathfrak{J}_f \subset \overline{O^-(a)}$. De plus \mathfrak{J}_f est fermé et $O^-(a) \subset \mathfrak{J}_f$ lorsque $a \in \mathfrak{J}_f$. On en déduit que $\overline{O^-(a)} \subset \mathfrak{J}_f$. Ceci montre bien la seconde assertion. \square

Corollaire 1.10. — Si f est une fraction rationnelle de degré au moins 2 alors \mathfrak{J}_f coïncide avec le bord du bassin super-attractif de l'infini

$$\mathfrak{J}_f = \partial A(\infty)$$

Démonstration. — Si $a \in \partial A(\infty)$ alors $a \notin \mathfrak{J}_f$ car si l'on suppose le contraire, il existe un voisinage de a sur lequel $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est normale. Comme $a \in \partial A(\infty)$ ce voisinage rencontre $A(\infty)$ et donc la seule valeur d'adhérence de la famille précompacte $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est ∞ , on en déduit que $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sphériquement vers ∞ sur ce voisinage de a et donc que $a \in \overset{\circ}{A}(\infty)$, l'intérieur de $A(\infty)$, ce qui est impossible puisqu'il appartient au bord de cet ensemble.

Pour l'inclusion réciproque, on commence par observer que $\partial A(\infty)$ est complètement invariant car $A(\infty)$ l'est. Ainsi si $a \in \partial A(\infty)$ alors

$$O^-(a) \subset \partial A(\infty)$$

Puis on utilise le théorème (1.9) pour un point $a \in \partial A(\infty) \subset \mathfrak{J}_f$ et comme $\partial A(\infty)$ est fermé on a :

$$\mathfrak{J}_f = \overline{O^-(a)} \subset \partial A(\infty)$$

\square

On a ainsi caractérisé l'ensemble de Julia comme le bord du bassin d'attraction de l'infini. L'ensemble de Julia présente deux aspects, l'une topologique en tant que bord d'attraction de l'infini, l'autre plus dynamique en tant que complémentaire de l'ensemble des points où la famille des itérées de f est localement normale.

2 Dynamique locale

Le but de cette partie est de donner des outils de base pour l'étude de la dynamique d'une fonction holomorphe f au voisinage d'un point fixe (ou plus généralement d'un point périodique), que l'on supposera égal à l'origine. Le comportement de f dépendra étroitement de la nature de ce point fixe.

2.1 Points fixes attractifs et répulsifs

On commence par analyser les points fixes répulsifs et attractifs (mais non super-attractifs). Koenigs a montré qu'une application holomorphe f est localement conjuguée à sa partie linéaire. Les coordonnées réalisant cette conjugaison s'appellent *coordonnées de Koenigs*.

Théorème 2.1 (Théorème de linéarisation de Koenigs). — Soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$.

Si le multiplicateur λ de f en 0 est tel que $|\lambda| \notin \{0, 1\}$, alors il existe un changement local et holomorphe des coordonnées $\omega = \Phi(z)$, tel que $\Phi(0) = 0$ et

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(\omega) = \lambda\omega$$

au voisinage de 0. De plus, Φ est unique à une constante multiplicative non nulle près.

Démonstration. Unicité — Soient deux telles applications Φ et Ψ , alors

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1}(\lambda\omega) &= \Psi \circ (f \circ \Phi^{-1}(\omega)) \\ &= \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}(\Psi \circ \Phi^{-1}(\omega)) \\ &= \lambda\Psi \circ \Phi^{-1}(\omega) \end{aligned} \tag{1}$$

L'application $\Psi \circ \Phi^{-1}$ est holomorphe, en utilisant la relation (1) avec $|\lambda| \neq 0, 1$, il vient que $\Psi \circ \Phi^{-1}(\omega) = \alpha\omega$. D'où l'unicité à une constante multiplicative près.

Existence de la linéarisation — Dans le cas attractif on établit l'existence par un procédé de renormalisation. Soit $c < 1$ tel que $c^2 < |\lambda| < c$. Par continuité de l'application holomorphe $z \mapsto f(z)/z$ à l'origine, on sait qu'il existe $r > 0$ tel que $|f(z)| \leq c|z|$ pour tout $z \in D_r := D(0, r)$.

L'orbite $\{z_n = f^n(z)\}$ d'un point $z \in D_r$ est contenue dans D_r et converge géométriquement vers l'origine

$$|z_n| = |f^n(z)| \leq c|f^{n-1}(z)| \leq \dots \leq c^n|z| \leq rc^n$$

Par ailleurs, pour r suffisamment petit, il existe $k > 0$ tel que

$$|f(z) - \lambda z| \leq k|z|^2 \text{ pour tout } z \in D_r$$

par définition de $\lambda := f'(0)$. Posons $\Phi_n(z) := \frac{1}{\lambda^n} f^n(z)$, alors

$$|\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)| = \frac{1}{|\lambda^{n+1}|} |f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \leq \frac{k}{|\lambda^{n+1}|} |f^n(z)|^2 \leq \frac{kr^2}{|\lambda|} \left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n$$

pour $z \in D_r$. La série de terme général $(\Phi_{n+1} - \Phi_n)$ converge normalement sur D_r (car $c^2 < |\lambda|$). On définit alors une application holomorphe par

$$\Phi(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(z), \quad z \in D_r$$

tel que $\Phi \circ f = \lambda\Phi$ puisque pour tout entier n , $\Phi_n \circ f = \lambda\Phi_{n+1}$.

Il reste à montrer que Φ est inversible en 0. On sait que $f^n(0) = \lambda^n$, ainsi pour tout entier n

$$f^n(z) = \lambda^n z + O(z^2) \text{ au voisinage de } 0$$

Donc $\Phi'_n(0) = 1$ pour tout entier n et $\Phi'(0) = 1$.

Le cas répulsif se déduit du cas attractif. En effet, il suffit de considérer f^{-1} , qui est bien définie au voisinage de 0, de multiplicateur $\frac{1}{|\lambda|} < 1$. \square

²Soit ε tel que $0 < |\lambda| < \varepsilon < 1$, posons $c = \min\{|\lambda| + (1/2)|\lambda|(1 - \varepsilon), (\varepsilon + |\lambda|)/2\}$ alors $c - c^2 = c(1 - c) > |\lambda|(1 - \varepsilon)$ et $c^2 < c - |\lambda|(1 - \varepsilon) < |\lambda|$ soit $1 > c > |\lambda| > c^2$.

On peut généraliser le théorème (2.1) comme suit.

Corollaire 2.2 (Linéarisation globale). — Soit λ , tel que $0 < |\lambda| < 1$, le multiplicateur d'une fonction holomorphe $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ en un point fixe attractif noté p . Il existe alors une application holomorphe $\Phi : A(p) \rightarrow \mathbb{C}$, définie sur $A(p)$ le bassin d'attraction de p , telle que :

– le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A(p) & \xrightarrow{f} & A(p) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

commute

– $\Phi(p) = 0$ et ϕ est un biholomorphisme d'un voisinage de p sur un voisinage de l'origine

De plus Φ est unique à une constante multiplicative près.

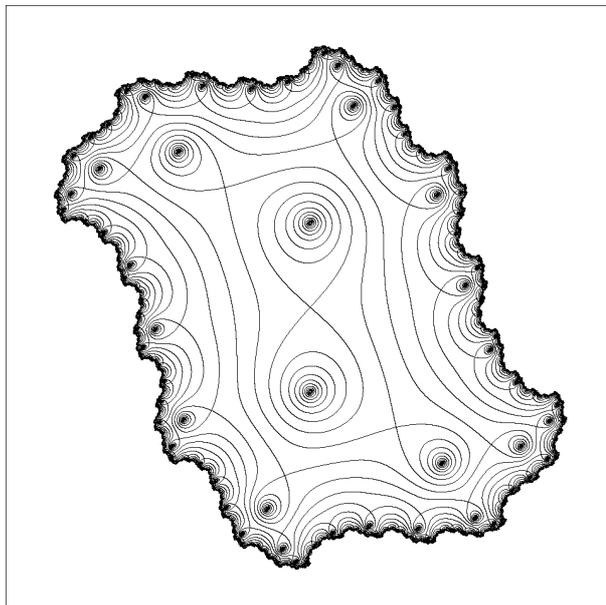


FIG. 4 – L'ensemble de Julia de l'application $z \mapsto z^2 + 0.7iz$ avec les courbes $|\Phi| = \text{constante}$.

Démonstration. — Notons δ un réel strictement positif tel que f soit linéarisable sur $D(0, \delta)$ (théorème (2.1)). Soit $z \in A(p)$, comme par définition $f^n(z) \rightarrow p$, alors à partir d'un certain rang N , on aura $f^n(z) \in D(0, \delta)$. Remarquons alors que l'expression

$$\lambda^{-n} \Phi(f^n(z))$$

ne dépend pas de l'entier $n \geq N$. En effet, pour tout $w \in D(0, \delta)$, on a $\Phi \circ f(w) = \lambda \Phi(w)$, donc

$$\lambda^{-(n+1)} \Phi(f^{n+1}(w)) = \lambda^{-n} \Phi(f^n(w))$$

On peut alors étendre Φ en posant $\Phi(z) = \lambda^{-n}(\Phi(f^n(z)))$, pour n assez grand. Vérifions alors que Φ est holomorphe. Soit un voisinage compact V de z inclus dans $A(p)$, on sait que f est normale sur V (car le bassin d'attraction est inclus dans l'ensemble de Fatou), donc il existe un rang n tel que pour tout w dans V , $f^n(w) \in D(0, \delta)$. On a alors $\Phi(w) = \lambda^{-n} \Phi(f^n(z))$, et donc Φ est holomorphe au voisinage de z . La fonction Φ ainsi définie est donc holomorphe sur $A(p)$ et fait commuter le diagramme.

Les propriétés d'unicité et de nullité en p sont évidentes en considérant un voisinage de p , Φ s'identifiant alors au changement de coordonnées de Koenigs. \square

Remarque. — Il existe une version avec paramètre du théorème de Koenigs. Considérons une famille d'applications holomorphes $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C}}$ de multiplicateurs $\lambda(\alpha)$, λ étant une fonction holomorphe de α . Alors la famille Φ_α des biholomorphismes construits dans la démonstration précédente est définie sur un même voisinage de

zéro et varie de façon holomorphe avec α , c'est à dire qu'à z fixé, $\Phi_\alpha(z)$ est holomorphe. Pour montrer cela, plaçons-nous sur un voisinage de α_0 tel que $c^2 < |\lambda(\alpha)| < c$ où c est un réel³ strictement positif. Alors il est aisé de vérifier que la convergence est uniforme en α .

2.2 Points fixes super-attractifs

La dynamique locale au voisinage d'un point fixe super-attractif est décrite par le théorème de Böttcher.

Théorème 2.3 (Théorème de Böttcher). — Si f et f' s'annulent en l'origine, alors f est localement conjuguée à z^p , où p est l'ordre de 0.

Démonstration. — La fonction $f(z)/z^p$ est bornée au voisinage de l'origine, donc il existe une constante C telle que pour $|z|$ assez petit, $|f(z)| \leq C|z|^p$. On peut alors trouver un voisinage de l'origine tel que $|f^n(z)| \leq C^n|z|^{p^n}$. Pour k adéquat, le changement de variables $w = kz$ permet de se ramener au cas où $f(z) = z^p + z^{p+1} + \dots$. Au voisinage de l'origine, $f^n(z)/z^{p^n}$ ne s'annule pas, car 0 est un zéro isolé de f et $f^n(z)$ reste confiné dans un voisinage de 0 aussi petit que l'on veut. On peut donc définir $\varphi_n(z) = (f^n(z))^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}}$. On a la relation de récurrence suivante

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-(n-1)}} = \varphi_n^p$$

Il suffit alors de montrer que la suite φ_n converge uniformément sur tout compact. Pour cela, montrons que le produit des φ_{n+1}/φ_n converge. On a

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \left(\frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = (1 + O(|f^n|)^{p^{-n}}) = 1 + O(p^{-n})$$

pour $|z| \leq 1/C$. Le produit $\prod_{n \geq 1} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ converge donc uniformément au voisinage de zéro, d'où le résultat. \square

2.3 Points fixes paraboliques ou rationnellement neutres

On considère désormais le cas où le multiplicateur λ du point fixe est une racine de l'unité : $\exists p \in \mathbb{N}$, $\lambda^p = 1$. On suppose que ce point fixe est l'origine.

2.3.1 Etude du cas où $\lambda = 1$

Le développement de f au voisinage de 0 est

$$f(z) = z + az^{n+1} + o(z^{n+1})$$

en supposant qu'un tel complexe a non nul existe (le cas $f(z) = z$ n'étant pas très intéressant). L'entier $n + 1$ désigne la *multiplicité* du point fixe.

Considérons V un voisinage de l'origine tel que $f|_V : V \rightarrow V' = f(V)$ soit un difféomorphisme conforme (ce voisinage existe bien d'après le théorème d'inversion locale).

Définition 2.1 (Pétale attractif et répulsif). — Un ouvert connexe U , avec $\overline{U} \subset V \cap V'$ est un *pétale attractif* pour f si

$$f(\overline{U}) \subset U \cup \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{k \geq 0} f^k(\overline{U}) = \{0\}$$

On dit que U est un *pétale répulsif* pour f , si U' est un pétale attractif pour f^{-1} .

Remarque. — Dans le cas où l'ouvert connexe U est un pétale attractif, la propriété

$$\bigcap_{k \geq 0} f^k(\overline{U}) = \{0\}$$

est équivalente⁴ à supposer que $\{f^k\}_{k \geq 0}$ converge uniformément sur \overline{U} de $(f^k)_{k \geq 0}$ vers la fonction nulle.

³voir la note de bas de page n° 2, page 9, pour l'existence d'un tel réel c . Dans le cas présent une telle construction de c est toujours possible quitte à prendre un voisinage de α_0 aussi petit que l'on veut.

⁴En effet, supposons que $\bigcap_{k \geq 0} f^k(\overline{U}) = \{0\}$. Comme $f(\overline{U}) \subset \overline{U}$, la famille $\{f^k(\overline{U})\}_{k \geq 0}$ est alors une famille décroissante de compact qui tend vers $\{0\}$ ce qui est équivalent à la convergence uniforme sur \overline{U} de $(f^k)_{k \geq 0}$ vers la fonction nulle.

Le théorème central de cette partie est le suivant :

Théorème 2.4 (Théorème de la fleur). — *Si l'origine est un point fixe parabolique de multiplicateur $\lambda = 1$ et de multiplicité $n + 1 \geq 2$ pour une application holomorphe f définie au voisinage de l'origine, alors il existe n pétales attractifs disjoints U_i et n pétales répulsifs disjoints U'_i pour f tels que*

$$N_0 = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n (U_i \cup U'_i)$$

soit un voisinage de 0. De plus ces pétales alternent : "Si on fait un tour autour de l'origine, on rencontre successivement un pétale attractif puis un pétale répulsif et ainsi de suite."⁵

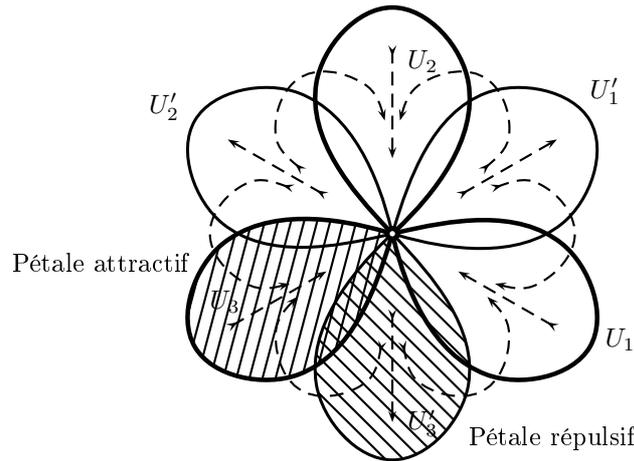


FIG. 5 – La fleur de Leau à trois pétales attractifs et trois pétales répulsifs. Les flèches indiquent la dynamique induite par f .

Avant de débiter la preuve du théorème de la fleur commençons par localiser les différents types de pétales. Au voisinage de l'origine

$$f(z) = z(1 + az^n + o(z^n))$$

Si $|v|$ est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes de plus haut degré, on a $f(v) \approx v(1 + av^n)$.

- Si v satisfait à la condition $av^n < 0$, on voit que $f(v)$ définit approximativement la même direction que v mais est attiré par l'origine. On dira qu'un vecteur $v \in \mathbb{C}^*$ est une *direction attractive* si

$$av^n < 0$$

Au voisinage de l'origine et dans la direction v on remarque que $|f(z)| < c|z|$, où c est un réel tel que $0 < c < 1$, ainsi que $f(z)$ reste dans la direction et le sens indiqués par v . Par conséquent, pour v suffisamment petit, $(f^n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- De manière analogue, on dira qu'un vecteur $v \in \mathbb{C}^*$ est une *direction répulsive* si

$$av^n > 0$$

Si le point fixe est de multiplicité $n + 1$, on a précisément n directions attractives et n directions répulsives⁶ qui alternent lorsqu'on fait un tour de l'origine.

On verra que les pétales attractifs (resp. répulsifs) se situent dans les secteurs S (resp. S') formés par deux directions répulsives (resp. attractives) successives. Afin de décrire ces pétales et comprendre la dynamique que f y induit, on introduit le changement de coordonnées suivant :

$$w = \phi(z) = \frac{-1}{naz^n}$$

⁵L. Leau (1897)

⁶données par $\arg v = (\pi + 2k\pi - \alpha)/n$ et $\arg v = (2k\pi - \alpha)/n$, pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$, avec $\alpha = \arg a$

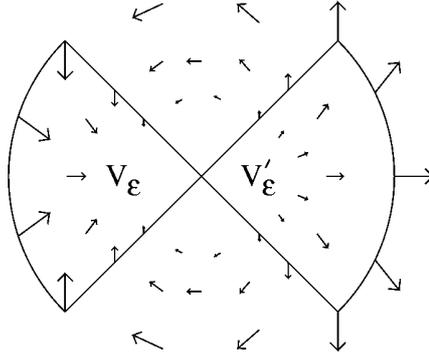


FIG. 6 – Un pétale répulsif V'_ϵ et un pétale attractif V_ϵ de l'application $f : w \mapsto w + w^2$.

Cette application transporte le problème de l'origine à l'infini et peut être vue comme un difféomorphisme conforme⁷ d'un secteur S , se situant entre deux directions répulsives, sur $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. On notera alors

$$z = \sqrt[2]{-1/naw} := \phi^{-1}(w)$$

l'application réciproque⁸. Un calcul⁹ montre que l'application f devient après conjugaison par ϕ

$$g(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w + 1 + o(1) \quad \text{pour } w \rightarrow \infty$$

De manière analogue, la même application $w = \phi(z)$ envoie un secteur S' compris entre deux directions attractives sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ et la conjugaison de $f|_{S'}$ par ϕ donne

$$g^*(w) = \phi \circ f|_{S'}^{-1} \circ \phi^{-1}(w) = w - 1 + o(1) \quad \text{pour } w \rightarrow \infty$$

Passons à la démonstration du théorème de la fleur (Théorème 2.4).

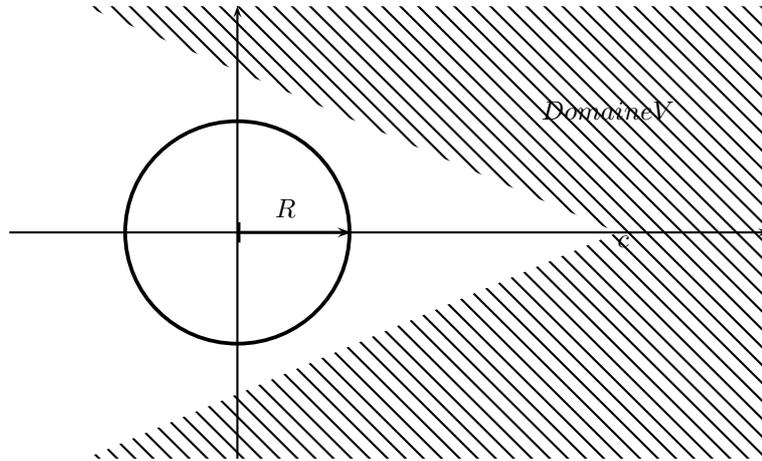


FIG. 7 – On peut choisir un réel c de telle sorte que V ne rencontre pas $\overline{D}(0, R)$.

Démonstration. — Tout d'abord, recherchons un pétale attractif dans un secteur S , situé entre deux directions répulsives successives. Grâce au changement de coordonnées précédent où l'on a déplacé le problème de l'origine à l'infini, ceci revient à trouver dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ un ouvert non borné V satisfaisant

$$g(\overline{V}) \subset V \quad \text{et} \quad (g|_V^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \infty \text{ uniformément}$$

⁷Sur un secteur ouvert d'angle $2\pi/n$, l'application $z \mapsto z^n$ est conforme sur son image.

⁸Comme l'application holomorphe $-1/naz^n$ définie sur S simplement connexe est à valeur dans \mathbb{C}^* , on peut définir une application holomorphe "racine n -ème" de $-1/naz^n$.

⁹ $g(w) = \phi \circ f(z) = \phi(z(1 + az^n + o(z^n))) = \frac{-1}{naz^n(1+naz^n+o(z^n))} = \frac{w}{1-1/w+o(1/w)} = w(1 + 1/w + o(1/w)) = w + 1 + o(1)$

On choisit alors V de la manière suivante : Soit $\alpha > 0$ tel que $\tau = \sin \alpha \in]0, 1/4[$. Comme

$$g(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w + 1 + o(1) \quad \text{pour } w \rightarrow \infty$$

On prend R tel que

$$|g(w) - (w + 1)| < \tau \quad \text{pour tout } |w| > R \quad (2)$$

Il suffit alors de choisir (voir figure 7) une constante positive $c > 0$ telle que

$$V = \left\{ w = u + iv; u > c - \frac{|v|}{\tan 2\alpha} \right\}$$

ne rencontre pas le disque $\overline{D}(0, R)$. En utilisant (2), on a

$$g(\overline{V}) \subset V$$

et de plus, $\Re(g(w)) > \Re(w) + 1/2$ pour $w \in V$ puisque $\tau < 1/4$. Par conséquent, $\Re(g^n(w)) > \Re(w) + n/2$, ce qui montre que $P = \phi^{-1}(V)$ est un pétale attractif. On conclut de même dans chaque secteur S et de manière analogue pour les pétales répulsifs dans les secteurs S' . \square

2.3.2 Etude du cas général

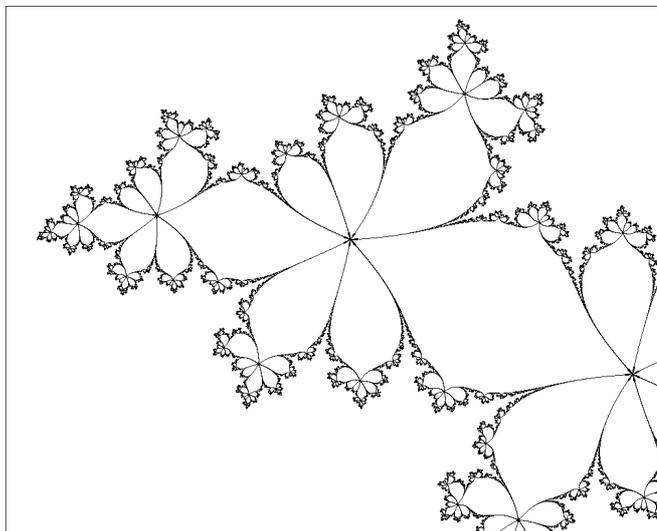


FIG. 8 – Ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + e^{2i\pi t}z$ où $t = \frac{3}{7}$.

Nous allons compléter les arguments utilisés pour l'étude du premier cas. Considérons l'application $F = f^p$. Pour cette application, l'origine est un point fixe parabolique de multiplicateur 1. Soit $N + 1$ la multiplicité de ce point fixe. Le théorème de la fleur (Théorème 2.4) s'applique et montre qu'il existe N pétales attractifs U_1, U_2, \dots, U_N et autant de pétales répulsifs U'_1, U'_2, \dots, U'_N .

Si P désigne par exemple un pétale attractif de F , alors $f(P)$ est de nouveau un pétale attractif de P puisque¹⁰

$$F(\overline{f(P)}) = F(f(\overline{P})) = f \circ f^p(\overline{P}) = f \circ F(\overline{P}) \subset f(P) \cup \{0\}$$

et comme $(F^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur \overline{P} on en déduit que $F^k \circ f = f \circ F^k$ converge uniformément vers $f(0) = 0$ c'est-à-dire que $(F^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\overline{f(P)}$. $f(P)$ est donc un pétale attractif.

Au voisinage de l'origine

$$f(z) = \lambda z + o(z) \quad \text{avec } \lambda^p = 1$$

L'application f agit en l'origine comme une rotation d'angle $\theta = \arg \lambda$, elle échange les pétales. Ainsi $f(P)$ est équivalent¹¹ à l'un des pétales U_1, U_2, \dots, U_N . Par conséquent f permute les pétales de F , f a le même nombre N de pétales que F et ce nombre est un multiple de p .

¹⁰en utilisant d'une part le fait que f est un homéomorphisme local sur un voisinage de l'origine, ce qui permet d'écrire que $\overline{f(P)} = f(\overline{P})$ et d'autre part le fait que P est un pétale pour F donc $F(\overline{P}) \subset P \cup \{0\}$.

¹¹Le pétale étant connexe, on peut proprement identifier $f(P)$ avec un autre pétale.

2.4 Points fixes irrationnellement neutres

La question de la linéarisation au voisinage des points irrationnellement neutres est longtemps restée ouverte. En 1912, lors un congrès international, E. Kasner conjecture qu'une linéarisation est toujours possible. En 1917, G.A. Pteiffer construit un contre-exemple, et Julia prétendra deux ans plus tard qu'une linéarisation n'est jamais possible. Sa preuve se révélera incorrecte, et Cremer en 1927, puis Siegel en 1942, clarifieront la situation.

Soit f une application holomorphe définie au voisinage de l'origine. Rappelons que l'origine est un point fixe irrationnellement neutre pour f si

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \text{ au voisinage de } 0$$

où $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, θ irrationnel. L'argument $\theta \in]0, 1[$ est appelé *angle de rotation*.

Définition 2.2. — Les points fixes irrationnellement neutres sont de deux sortes :

- *Les points de Siegel* pour lesquels il existe une linéarisation locale.
- *Les points de Cremer* pour lesquels il n'existe pas de linéarisation locale.

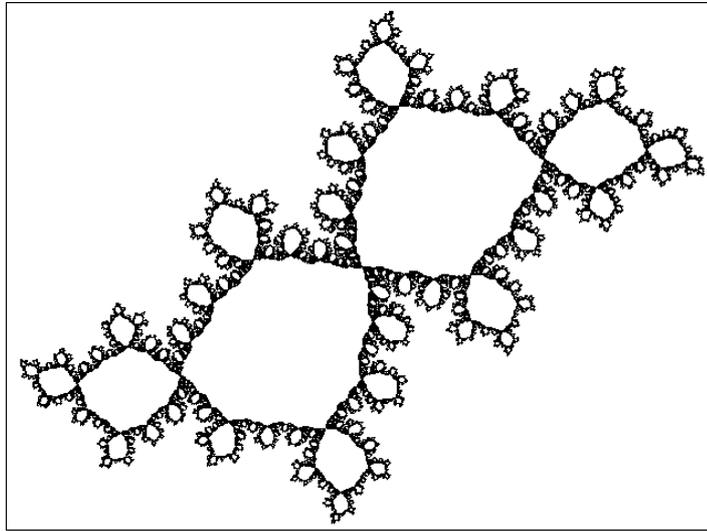


FIG. 9 – Ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + e^{2i\pi\zeta}z$ où $\zeta = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Théorème 2.5 (Théorème de non-linéarisation de Cremer). — *L'origine est un point de Cremer de tout polynôme de la forme $f(z) = z^d + \dots + \lambda z$, avec λ irrationnellement neutre tel que*

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(1/|1 - \lambda^q|))}{q} > \log(d)$$

En particulier, l'ensemble des multiplicateurs λ irrationnellement neutres tels que l'origine soit un point de Cremer pour tout polynôme $f(z) = z^d + \dots + \lambda z$ de degré quelconque est dense dans le cercle unité.

Démonstration. — Soit f un tel polynôme, et supposons par l'absurde que $f(z) = z^d + \dots + \lambda z$ soit linéarisable : il existe une fonction h biholomorphe telle que sur $D(0, \delta)$,

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z$$

Alors pour tout entier n ,

$$f^n(z) = h(\lambda^n h^{-1}(z))$$

Soit alors z un zéro de f^n dans $D(0, \delta)$. D'après la relation précédente, $\lambda^n h^{-1}(z)$ est un zéro de h . Comme λ est irrationnellement neutre, l'ensemble des λ^n est dense dans le cercle unité, et donc on doit avoir $h^{-1}(z) = 0$ en vertu du principe des zéros isolés. Donc l'origine est le seul zéro de f^n dans $D(0, \delta)$.

De plus, on a clairement

$$f^q(z) - z = z^{d^q} + \dots + (\lambda^q - 1)z$$

Ce polynôme a $d^q - 1$ racines non nulles (car λ n'est pas racine de l'unité) dont le produit vaut $\pm(1 - \lambda^q)$. Soient alors $\varepsilon > 0$ et une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante tels que pour tout n , $|1 - \lambda^{q_n}| < 1$ et

$$\log(\log(1/|1 - \lambda^{q_n}|)) > q_n(\log(d) + \varepsilon)$$

(une telle suite et un tel ε existent par hypothèse).

D'une part, en passant aux exponentielles, on obtient

$$1/|\lambda^{q_n} - 1| > \exp(d^{q_n} e^{q_n \varepsilon})$$

donc

$$|\lambda^{q_n} - 1| < \exp(-e^{q_n \varepsilon} d^{q_n}) < \exp(-e^{q_n \varepsilon})$$

D'autre part, la racine z_n de $f^{q_n}(z) - z$ de module minimal vérifie $|z_n|^{q_n - 1} \leq |\lambda^{q_n} - 1|$, donc

$$|z_n| < |\lambda^{q_n} - 1|^{\frac{1}{q_n - 1}} < |\lambda^{q_n} - 1|^{\frac{1}{q_n}}$$

Finalement, $|z_n| < \exp(-e^{q_n \varepsilon}/q_n)$ donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro, et à partir d'un certain rang, $z_n \in D(0, \delta)$, ce qui contredit le fait que f^n ait un unique zéro au voisinage de l'origine.

Si on écrit alors $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, la condition sur λ peut se reformuler ainsi : il existe une suite de couples d'entiers premiers entre eux (p_n, q_n) telle que :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(1/|\theta - \frac{p_n}{q_n}|))}{q_n} > \log(d)$$

Ce résultat se démontre simplement en effectuant une factorisation par l'angle moitié, comme dans la proposition (B.2). On montre en annexe que l'ensemble des nombres irrationnels vérifiant cette condition pour tout d est dense dans \mathbb{R} . \square

Malgré ce résultat, il reste encore "beaucoup" de multiplicateurs λ irrationnellement neutres tels que toute fonction holomorphe ayant zéro pour point fixe et λ pour multiplicateur en zéro soit linéarisable :

Théorème 2.6 (Théorème de linéarisation de Siegel). — *Soit θ un réel diophantien¹². Toute fonction holomorphe s'annulant à l'origine et de multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ est linéarisable au voisinage de zéro.*

Démonstration. — Écrivons $f(z) = \lambda z + \hat{f}(z)$, avec $\hat{f}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, et recherchons un biholomorphisme ψ tel que

$$\psi^{-1} \circ f \circ \psi(z) = g(z) = \lambda z + \hat{g}(z) \tag{3}$$

où \hat{g} est une fonction holomorphe "plus petite" que \hat{f} en un certain sens que l'on précisera. On construira alors le biholomorphisme φ tel que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = \lambda z$ comme une limite de biholomorphismes construits par récurrence.

L'équation fonctionnelle

$$\hat{\psi}(\lambda z) - \lambda \hat{\psi}(z) = \hat{f}(z) \tag{4}$$

admet une solution définie comme la somme de la série

$$\hat{\psi}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^n - \lambda} z^n$$

En effet, le rayon de convergence de cette série est non nul, car comme θ est diophantien, d'après la proposition B.2, il existe deux constantes $c, \mu > 0$ telles que

$$|\lambda^n - \lambda| \geq cn^{1-\mu}$$

¹²voir l'annexe B

(μ peut être prise entière et supérieure ou égale à 2). On a alors $\frac{|a_n|}{|\lambda^n - \lambda|} \leq c^{-1}|a_n|n^{\mu-1}$, et la série entière $\sum |a_n|n^{\mu-1}z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum |a_n|z^n$.

Dans toute la suite, on prend une constante c_0 telle que pour tout n

$$\frac{1}{|\lambda^n - 1|} \leq c_0 \frac{n^\mu}{\mu!}$$

et on peut choisir $\eta < 1/5$ et δ suffisamment petit tel que $c_0\delta < \eta^{\mu+2}$. On remarque qu'en prenant η assez petit, cette dernière condition implique que $\delta < \eta$. On peut également prendre $r > 0$ tel que $\forall z \in D(0, r)$, $|\widehat{f}'(z)| < \delta$.

L'inégalité de Cauchy appliquée à \widehat{f}' donne $|a_n| \leq \frac{\delta}{nr^{n-1}}$, et alors, pour $z \in D(0, (1-\eta)r)$, on a :

$$\begin{aligned} |\widehat{\psi}'(z)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{na_n}{|\lambda^n - \lambda|} r^{n-1} (1-\eta)^{n-1} \leq \frac{c_0\delta}{\mu!} \sum_{n=2}^{\infty} n^\mu (1-\eta)^{n-1} \\ &< \frac{c_0\delta}{\mu!} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\dots(n+\mu-1)(1-\eta)^{n-1} = \frac{c_0\delta}{\eta^{\mu+1}} \end{aligned}$$

Comme $c_0\delta < \eta^{\mu+2}$, alors $|\widehat{\psi}'| \leq \eta$ sur le disque $D(0, (1-\eta)r)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors $|\psi(z)| \leq |z| + \eta|z| < r(1-3\eta)$ pour $z \in D(0, (1-4\eta)r)$.

Montrons de plus que ψ est un biholomorphisme de $D(0, (1-\eta)r)$ dans $D(0, (1-2\eta)r)$. Pour cela, on remarque que $\psi(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$: en effet, $\psi(0) = 0$ et réciproquement, si $\psi(z) = 0$, alors $\psi(\lambda z) = 0$, et pour tout n , $\psi(\lambda^n z) = 0$, et comme θ est irrationnel, l'ensemble des λ^n est dense dans le cercle unité, donc z est nul par le principe des zéros isolés. De plus, l'inégalité des accroissements finis montre que $|\widehat{\psi}(z)| \geq (1-2\eta)r$ pour $z \in D(0, (1-\eta)r)$, donc $\psi - w$ ne s'annule pas sur $D(0, (1-\eta)r)$ pour $w \in D(0, (1-2\eta)r)$. On peut alors appliquer le principe de l'argument : en notant C la frontière de $D(0, (1-\eta)r)$ et $N(w)$ le nombre de solutions de l'équation $\psi(z) = w$ dans $D(0, (1-\eta)r)$, où $w \in D(0, (1-2\eta)r)$, on a

$$N(w) = \int_C \frac{\psi'(z)}{\psi(z) - w} dz$$

Donc N est continue sur $D(0, (1-2\eta)r)$ qui est connexe, donc N est constante : $N(w) = N(0) = 1$. Finalement, ψ est un biholomorphisme de $D(0, (1-\eta)r)$ dans $D(0, (1-2\eta)r)$.

Étudions alors $g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ sur le disque $D(0, (1-4\eta)r)$. D'après ce qui précède, et en utilisant le fait que $\delta < \eta$, on a :

$$D(0, (1-4\eta)r) \xrightarrow{\psi} D(0, (1-3\eta)r) \xrightarrow{f} D(0, (1-2\eta)r) \xrightarrow{\psi^{-1}} D(0, (1-\eta)r)$$

donc $g(D(0, (1-4\eta)r)) \subset D(0, (1-\eta)r)$.

On écrit $g(z) = z + \widehat{g}(z)$, et on veut estimer \widehat{g} relativement à \widehat{f} . D'après (3), on a :

$$\widehat{g}(z) + \widehat{\psi}(\lambda z + \widehat{g}(z)) = \lambda \widehat{\psi}(z) + \widehat{f}(z + \widehat{\psi}(z))$$

et la relation (4) donne alors l'équation fonctionnelle

$$\widehat{g}(z) = \widehat{\psi}(\lambda z) - \widehat{\psi}(\lambda z + \widehat{g}(z)) + \widehat{f}(z + \widehat{\psi}(z)) - \widehat{f}(z) \quad (5)$$

Notons C le maximum de \widehat{g} sur le disque $D(0, (1-4\eta)r)$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la relation (5) donne :

$$C \leq \sup |\widehat{\psi}'(z)| \cdot C + \sup |\widehat{f}(z + \widehat{\psi}(z)) - \widehat{f}(z)| \leq \eta C + \delta \frac{c_0\delta}{\eta^{\mu+1}} r$$

ce qui se résout en

$$C \leq \frac{c_0\delta^2 r}{\eta^{\mu+1}} \frac{1}{1-\eta}$$

L'inégalité de Cauchy s'écrit alors :

$$\forall z \in D(0, (1-5\eta)r), |\widehat{g}'(z)| \leq \frac{c_0\delta^2 r}{\eta^{\mu+2}} \frac{1}{1-\eta}$$

On note la présence du terme quadratique en δ , qui va permettre à la récurrence de fonctionner. Posons $\eta_0 = \eta$, $\delta_0 = \delta$, $r_0 = r$, et définissons les suites r_n , η_n et δ_n par récurrence :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n(1 - 5\eta_n) \\ \eta_{n+1} &= \eta_n/2 \\ \delta_{n+1} &= c_0 \delta_n^2 \eta_n^{-(\mu+2)} 2^{-(\mu+2)} \end{aligned}$$

La condition $c_0 \delta_n < \eta_n^{\mu+2}$ est immédiate à vérifier par récurrence, et comme $\eta_{n+1} < \eta_n$, on a également $\delta_n < \eta_n$. On peut donc construire par récurrence une suite de fonctions biholomorphes $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $D(0, (1 - 5\eta_n)r_n)$ ainsi qu'une suite

$$g_n = \psi_n^{-1} \circ \psi_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \psi_1^{-1} \circ f \circ \psi_1 \circ \dots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n$$

Posons alors

$$R = r_0 \prod_{n \geq 0} (1 - 5\eta_n) > 0$$

alors

$$|(\widehat{g_n})'| \leq \frac{\delta_n r_n}{1 - \eta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sur $D(0, R)$, donc $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ sur ce même disque. Enfin, comme $\psi_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \psi_1^{-1} \circ f \circ \psi_1 \circ \dots \circ \psi_{n-1} \circ \psi_n$ est bornée, on peut en extraire une suite qui converge uniformément vers une fonction biholomorphe φ telle que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \lambda z$ sur $D(0, R)$. \square

En particulier, l'ensemble des réels diophantiens dans $[0, 1]$ ayant pour mesure 1, pour presque tout λ du cercle unité, toute fonction holomorphe fixant l'origine et ayant λ comme multiplicateur en zéro est linéarisable.

On s'intéresse maintenant à la famille des polynômes de degré 2 de la forme $P(z) = z^2 + \lambda z$. Cette famille joue un rôle important dans l'étude des points fixes irrationnellement neutres ; citons pour cela le résultat difficile suivant dû à Yoccoz (voir par exemple [Yoc95]).

Théorème 2.7 (Yoccoz). — *Si $p_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ est linéarisable alors tout germe holomorphe $g(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ défini au voisinage de 0 est également linéarisable.*

Il existe une démonstration plus élémentaire du théorème de Siegel dans le cas de ces polynômes :

Théorème 2.8 (Linéarisation des polynômes de degré 2, Yoccoz, 1988). — *Pour presque tout θ , le polynôme $f(z) = z^2 + e^{2i\pi\theta} z$ est linéarisable en zéro.*

La preuve repose sur trois lemmes élémentaires, ainsi que sur la formule de Jensen exposée en annexe.

Lemme 2.9. — Soit f une fonction holomorphe de degré au moins deux ayant zéro pour point fixe attractif. D'après le théorème de Koenigs, il existe un biholomorphisme local φ tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \lambda z$. Le bassin immédiat d'attraction $A^*(0)$ contient alors un voisinage U qui s'envoie bijectivement par φ sur un disque D_ρ , et contenant un point critique de f sur sa frontière.

Démonstration. — Notons $\psi = \varphi^{-1}$. Supposons que cette fonction soit prolongeable analytiquement sur \mathbb{C} . La relation $f \circ \psi(z) = \psi(\lambda z)$ étant vraie sur un ouvert non vide, elle est donc vraie sur \mathbb{C} en entier par le principe des zéros isolés. Il est alors clair que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f^n \circ \psi(z) = \psi(\lambda^n z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc ψ est à valeurs dans $A^*(0)$, qui omet trois points car il est contenu dans l'ensemble de Fatou, ce qui est impossible d'après le théorème de Picard.

Notons alors ρ le rayon de convergence de la série entière associée à ψ , qui est fini et non nul. Supposons que f' ne s'annule pas sur sa frontière. Alors on peut définir f^{-1} sur un disque de rayon $r > \rho$, et prolonger ψ par la relation $\psi(z) = f^{-1} \circ \psi(\lambda z)$, ce qui est impossible. Donc f a au moins un point critique sur ∂U . \square

Lemme 2.10. — Dans le cas d'un polynôme $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$, avec $|\lambda| < 1$, notons Φ_λ le changement de variables holomorphes tel que $\Phi_\lambda \circ f_\lambda \circ \Phi_\lambda^{-1}(z) = \lambda z$. Alors avec les mêmes notations qu'au lemme précédent, $\rho = |\Phi(-\lambda/2)|$. De plus, la fonction $\eta(\lambda) = \Phi_\lambda(-\lambda/2)$ est holomorphe et ne s'annule pas sur $\mathbb{D} - \{0\}$.

Démonstration. — La première assertion se déduit du lemme précédent et du fait que $-\lambda/2$ soit la seule valeur critique. L'analyticité de η se déduit de la remarque du théorème de linéarisation de Koenigs. Enfin, pour montrer que η est bornée, on remarque que $U \subset D(0, 2)$: en effet, si $|z| > 2$, il est clair que $|f_\lambda(z)| > |z|$, donc $(f_\lambda^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers z ero. Donc Φ_λ envoie U sur $D(0, \rho)$, avec une dérivée égale à 1 à l'origine, et d'après le lemme de Schwarz, $\rho \leq 2$. \square

L'origine est alors une singularité illusoire, et on peut donc prolonger η à \mathbb{D} .

Lemme 2.11. — Avec les mêmes notations, soit λ un complexe de module 1. Supposons que l'origine soit un point de Cremer pour f_λ , alors :

$$\lim_{r \rightarrow 1} \eta(r\lambda) = 0$$

Démonstration. — Supposons que :

$$\limsup_{r \rightarrow 1} |\eta(r\lambda)| = \rho_0 > 0$$

alors pour $\rho < \rho_0$, pour une suite $\lambda_n \in \mathbb{D}$ qui converge vers λ , $\Phi_{\lambda_n}^{-1}$ est bien définie et envoie $D(0, \rho)$ sur $D(0, 2)$. La suite $\Phi_{\lambda_n}^{-1}$ est donc bornée, on peut en extraire une sous suite convergeant uniformément sur tout compact vers un biholomorphisme Φ^{-1} , et il est aisé de vérifier que $\Phi^{-1}(\lambda z) = f_\lambda(\Phi^{-1}(z))$. L'origine est donc un point de Siegel. \square

On conclut par le théorème de F. et M. Riesz : $\eta(re^{2i\pi\theta})$ ne peut tendre vers z ero que pour un ensemble de mesure nulle d'angles θ , donc pour presque tout θ , z ero est un point de Siegel de $f_{e^{2i\pi\theta}}$.

A Analyse complexe sur la sphère de Riemann

A.1 La sphère de Riemann

On considère le *compactifié d'Alexandrov* du plan complexe \mathbb{C} qui est

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

muni de l'unique topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble formé des ouvert de \mathbb{C} et des ${}^c K \cup \{\infty\}$ pour K compact de \mathbb{C} .

La projection stéréographique $z \mapsto z^*$ permet d'identifier $\hat{\mathbb{C}}$ à la sphère unité euclidienne \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 (voir la figure A.1).

On munit $\hat{\mathbb{C}}$ de la topologie induite par la *métrie sphérique* σ :

$$\sigma(z, w) := \|z^* - w^*\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}$$

$$\sigma(z, \infty) := \lim_{w \rightarrow \infty} \sigma(z, w) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

$$\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}, \sigma(z, w) = \sigma(1/z, 1/w)$$

avec la convention $1/\infty = 0$.

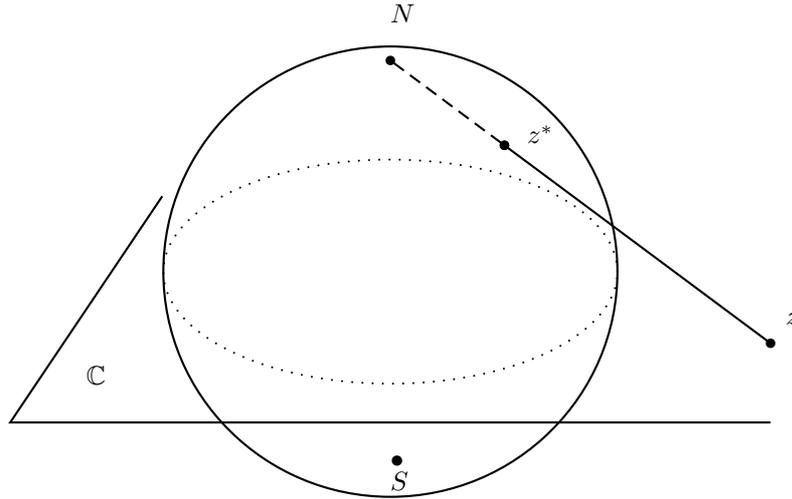


FIG. 10 – La projection stéréographique $z \mapsto z^*$ permet d'identifier $\hat{\mathbb{C}}$ à \mathbb{S}_2 .

Considérons les homéomorphismes

$$\phi_1 : \begin{cases} U_1 = \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi_2 : \begin{cases} U_2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\} & \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{0\} \\ z & \mapsto \begin{cases} 1/z & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases} \end{cases}$$

Alors

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \begin{cases} \mathbb{C} - \{0\} & \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ z & \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}$$

est holomorphe. Donc $(U_1, \phi_1)_{i=1,2}$ est un *atlas de cartes holomorphe* sur $\hat{\mathbb{C}}$. L'espace $\hat{\mathbb{C}}$, muni de l'atlas de cartes holomorphe maximal contenant $(U_1, \phi_1)_{i=1,2}$ est donc une *variété analytique complexe* de dimension 1, que l'on appelle *la sphère de Riemann*. Elle est clairement C^ω -difféomorphe à la variété \mathbb{S}^2 .

La métrie sphérique σ permet de définir la *convergence uniforme sphérique* comme étant la convergence uniforme pour cette métrie particulière.

Définition A.1 (Dérivée sphérique). — Pour une application $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, on définit la *dérivée sphérique* de f en z par

$$|f'(z)|_\sigma = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sigma(f(w), f(z))}{\sigma(w, z)}$$

La notion utile par la suite sera la suivante : pour une application $f : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, où \mathbb{D} est le disque unité ouvert de \mathbb{C} , on définit la *dérivée sphérique* de f en z par

$$f^\#(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sigma(f(w), f(z))}{|w - z|}$$

Définition A.2 (Fonctions holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$). — Une application $f : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ du disque unité ouvert de \mathbb{C} dans la sphère de Riemann est dite *holomorphe* en z_0 si sa composée avec l'une des cartes définissant la structure de $\hat{\mathbb{C}}$ est analytique au voisinage de z_0 .

Plus précisément, f doit vérifier les propriétés suivantes :

- f est à valeurs complexes et holomorphe au voisinage de tout point $z_0 \neq \infty$ vérifiant $f(z_0) \neq \infty$
- Si $z_0 \neq \infty$ et $f(z_0) = \infty$, alors la fonction $z \mapsto 1/f(z)$ est à valeurs complexes et holomorphe au voisinage de z_0
- Si $\infty \in \Omega$ et $f(\infty) \neq \infty$, alors la fonction $z \mapsto f(1/z)$ est à valeurs complexes et holomorphe au voisinage de 0
- Si $\infty \in \Omega$ et $f(\infty) = \infty$, alors la fonction $z \mapsto 1/f(1/z)$ est à valeurs complexes et holomorphe au voisinage de 0.

On vérifie que les restrictions des applications holomorphes à \mathbb{C} sont exactement les fonctions méromorphes.

Les fonctions holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$ en entier sont tout simplement les fractions rationnelles. Pour montrer cette caractérisation, on a besoin du lemme suivant :

Lemme A.1. — Soit f une fonction holomorphe non constante d'un ouvert connexe U de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$. Alors pour tout b dans la sphère de Riemann, l'ensemble $f^{-1}\{b\}$ est un ensemble fermé et discret de U .

Démonstration. — Quitte à traduire ou à changer f en $1/f$, on peut supposer que $b = 0$. L'ensemble des zéros non isolés de f est clairement un fermé de U . S'il est non vide, soit a un zéro non isolé. Supposons d'abord que $a \in \mathbb{C}$. Au voisinage de a , f est holomorphe à valeurs dans \mathbb{C} . Donc d'après le théorème des zéros isolés, f est nulle au voisinage de a . Supposons maintenant que $a = \infty$. En considérant $f(1/z)$, on montre de même que f est nulle sur un voisinage de a . Finalement, l'ensemble des zéros non isolés est un ouvert fermé de U , et par connexité, il est vide (car f est non constante). \square

On en déduit le résultat annoncé :

Théorème A.2. — *Les fonctions holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$ sont exactement les fractions rationnelles.*

Démonstration. — Il est clair que les fractions rationnelles sont holomorphes sur la sphère de Riemann. Réciproquement, soit f une fonction holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$. D'après le lemme précédent, l'image réciproque de ∞ par f est discret dans $\hat{\mathbb{C}}$, donc fini (par compacité de la sphère de Riemann). Notons alors n le nombre de zéros distincts de $1/f$. Soit a un zéro fini de $1/f$, au voisinage de a , $1/f$ est à valeurs dans \mathbb{C} et holomorphe, donc on peut écrire $1/f(z) = (z - a)^k f_1(z)$, où f_1 est holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ et $f_1(a) \neq 0$. Alors les pôles de f différents de a sont les zéros de f_1 , et donc le nombre de zéros de f_1 est strictement inférieur à n . On peut alors montrer par récurrence qu'il existe p complexes a_i (les pôles de f comptés avec leur ordre de multiplicité) tels que

$$g(z) = f(z) \prod_{1 \leq i \leq p} (z - a_i)$$

ne prenne que des valeurs complexes sur \mathbb{C} .

Toujours d'après le lemme, g n'a qu'un nombre fini de zéros. Soit b un zéro de g , au voisinage de b on peut écrire $g(z) = (z - b)^k g_1(z)$, avec $g_1(z) \neq 0$. On peut aussi écrire $g(z) = (z - b)^k g_2(z)$ hors d'un voisinage de b , car $1/(z - b)$ est holomorphe sur un tel ouvert. On peut alors, grâce au principe des zéros isolés, écrire $g(z) = (z - b)g_1(z)$ sur \mathbb{C} . Ainsi, en procédant par récurrence, on obtient $g(z) = h(z) \prod_{1 \leq j \leq q} (z - b_j)$, où h est entière et ne s'annule pas. On a alors :

$$f(z) = h(z) \frac{\prod_{1 \leq i \leq p} (z - a_i)}{\prod_{1 \leq i \leq q} (z - b_i)}$$

Or, h est également holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, donc h est continue en l'infini. Si h est non bornée $h(\infty) = \infty$, comme h ne s'annule pas, alors $1/h$ est entière, nulle en l'infini, donc constante par Liouville, ce qui est absurde. Donc h est bornée, donc constante, et donc f est rationnelle. \square

La convergence uniforme sphérique nous sera très utile pour prouver le théorème de Montel et pour définir les familles normales à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$. Voici quelques théorèmes de convergence qui précisent cette notion.

Théorème A.3. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications holomorphes sur \mathbb{D} à valeur dans $\hat{\mathbb{C}}$.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sphériquement sur tout compact de \mathbb{D} si et seulement si pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ sur lequel soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(1/f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\overline{D}(z_0, r)$.

Démonstration. — Comme $\sigma(w_1, w_2) \leq |w_1 - w_2|$ et $\sigma(w_1, w_2) \leq \left| \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2} \right|$, si soit $\{f_n\}$ ou $\{1/f_n\}$ converge uniformément sur $\overline{D}(z_0, r)$, alors $\{f_n\}$ converge uniformément sphériquement sur $\overline{D}(z_0, r)$, donc sur tout compact de \mathbb{D} .

Réciproquement, on distingue 2 cas :

– $f(w) \neq \infty$:

Par continuité de f , on sait qu'il existe un voisinage de w sur lequel f est borné. f_n converge uniformément sphériquement vers f bornée donc f_n converge uniformément vers f .

– $f(w) = \infty$:

Comme $\sigma(1/f_p, 1/f_q) = \sigma(f_p, f_q)$, en considérant $1/f$ on se ramène au cas précédent. Il y a donc convergence uniforme de $1/f_n$ vers $1/f$ sur un voisinage de w . \square

Proposition A.4. — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions sphériquement continues qui converge sphériquement uniformément vers une fonction f sur un compact E de \mathbb{C} , alors f est sphériquement uniformément continue sur E et les applications $\{f_n\}$ sont sphériquement équicontinues sur E .

Démonstration. — La preuve est valable dans tout espace métrique, et donc en particulier dans $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Il est souvent fait allusion aux homographies, ou transformations de Möebius. Leur intérêt provient du théorème suivant :

Proposition A.5. — Les automorphismes de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ sont exactement les *transformations de Möebius*, ou homographies, définies par

$$\phi(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

où le déterminant $ad - bc$ est non nul.

Démonstration. — Il est immédiat que les homographies de déterminant non nul sont des automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$, et qu'une homographie est un automorphisme si et seulement si elle est de déterminant non nul. Réciproquement, on commence par montrer que les automorphismes de \mathbb{C} sont les similitudes. Soit g un automorphisme de \mathbb{C} . Quitte à composer par une translation, on peut supposer que $g(0) = 0$. La fonction $\frac{g(z)}{z}$ est alors entière et bornée. En effet, posons $\zeta = \frac{1}{z}$ et $h(\zeta) = 1/g(1/\zeta)$ qui est holomorphe sur \mathbb{C}^* . Alors

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = g'(0) \text{ et } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} = \frac{1}{h'(0)}$$

et la fonction $\omega \mapsto \frac{g(e^\omega)}{e^\omega}$ est alors entière et bornée, donc constante d'après le théorème de Liouville, et g est donc une homothétie.

Soit alors f un automorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$, quitte à composer par une homographie, on peut supposer que $f(\infty) = \infty$. Alors la restriction de f à \mathbb{C} est un automorphisme de \mathbb{C} , donc une similitude. L'application f est donc bien une homographie. \square

Remarque. — On remarquera que tout triplet de points de $\hat{\mathbb{C}}$ peut être envoyé sur le triplet $\{0, 1, \infty\}$ par une transformation de Möebius.

A.2 Familles normales, théorème de Montel

Définition A.3. — Une famille \mathcal{F} de fonctions holomorphes $\mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est dite *normale* si toute suite extraite de \mathcal{F} possède une valeur d'adhérence pour topologie de la convergence uniforme sphérique.

L'objet de cette section est, dans un premier temps, l'étude des familles normales en général, aboutissant au théorème de Montel, et dans un deuxième temps, l'application de certains résultats à la famille des itérées $\{f^n\}$ d'une fonction holomorphe f .

Les résultats qui suivent aboutissent au théorème de Montel, donnant un critère fondamental de normalité.

Théorème A.6. — Une famille \mathcal{F} d'applications holomorphes sur \mathbb{D} est normale si et seulement si \mathcal{F} est sphériquement équicontinue sur \mathbb{D} .

Démonstration. — Pour l'implication directe, on peut raisonner par l'absurde, et considérer une suite non équicontinue de \mathcal{F} . Cette suite admet une valeur d'adhérence pour la convergence uniforme sphérique, donc d'après la proposition A.4 citée en annexe, on obtient un absurdité.

L'implication réciproque est immédiate :

- \mathbb{D} est compact
- l'espace d'arrivée $\hat{\mathbb{C}}$ est compact
- f est équicontinue

D'après un théorème d'Ascoli, \mathcal{F} est normale. □

Le théorème suivant est utilisé dans la démonstration du théorème de Montel.

Théorème A.7 (Théorème d'Hurwitz). — Si $f_n : \mathbb{D} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ est une suite d'applications holomorphes qui converge uniformément sur tout compact vers une application holomorphe g non constante et si g prend la valeur α , alors f_n prend la valeur α pour n assez grand.

Démonstration. — Si $\alpha = \infty$ comme $\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}, \sigma(z, w) = \sigma(1/z, 1/w)$ en considérant $1/f$ et $1/g$ on se ramène au cas où $\alpha = 0$. On peut donc supposer que $\alpha \in \mathbb{C}$, de plus en considérant $f - \alpha$ et $g - \alpha$, on se ramène au cas où $\alpha = 0$. Soit alors $z \in \mathbb{D}$ tel que $g(z) = 0$. Par continuité de g , il existe un voisinage de z tel que g soit à valeur dans \mathbb{C} . En considérant un voisinage compact on peut supposer que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeur dans \mathbb{C} .

Comme l'application holomorphe g n'est pas constante, ses zéros sont isolés. On peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $g(z + \varepsilon e^{i\theta}) \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Par convergence uniforme de $1/f_n$ vers $1/g$ sur le cercle de centre z et de rayon ε , on a pour n suffisamment grand,

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{1}{|f_n(z + \varepsilon e^{i\theta})|} \leq 2 \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{1}{|g(z + \varepsilon e^{i\theta})|} < +\infty$$

Comme $f_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, à partir d'un certain rang

$$2 \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{1}{|g(z + \varepsilon e^{i\theta})|} < \frac{1}{|f_n(0)|}$$

On en déduit que f_n s'annule sur le disque de centre z et de rayon ε , sinon $1/f_n$ ne respecterait pas le principe du module maximum. □

Théorème A.8 (Théorème de Marty). — Une famille \mathcal{F} de fonctions holomorphes de \mathbb{D} dans $\hat{\mathbb{C}}$ est normale si et seulement si $f^\#$ est localement bornée : pour tout compact K de \mathbb{D} , il existe un réel strictement positif $C(K)$ tel que pour tout complexe $z \in K$, pour toute application $f \in \mathcal{F}$

$$f^\#(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq C(K)$$

Démonstration. — Supposons que \mathcal{F} est normal et qu'il existe un compact K inclus dans \mathbb{D} , une suite de points z_n de K et des applications holomorphes f_n de \mathcal{F} tels que

$$f_n^\#(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Après une éventuelle extraction, on peut supposer par normalité de la famille \mathcal{F} que f_n converge uniformément sphériquement sur K vers une application holomorphe $f : K \mapsto \hat{\mathbb{C}}$. Soit $w \in \mathbb{D}$, d'après le théorème (A.3) soit $f_n \rightarrow f$, soit $1/f_n \rightarrow 1/f$ uniformément sur un voisinage de w lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il existe donc un réel r

strictement positif tel que sur $\overline{D}(w, r)$ le disque fermé inclus dans \mathbb{D} de centre w et de rayon r on ait convergence uniforme soit de f_n soit de $1/f_n$.

Dans le cas où f_n converge uniformément vers une application holomorphe f bornée sur $\overline{D}(w, r)$. A partir d'un certain rang, les applications f_n sont bornées sur $\overline{D}(w, r)$ et donc à valeur dans \mathbb{C} , on retrouve la notion classique d'application holomorphe dans \mathbb{C} . Le théorème de Weierstrass s'applique donc et on en déduit que

$$f_n^\#(z) = \frac{2|f_n'(z)|}{1+|f_n(z)|^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^\#(z) = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

uniformément sur $\overline{D}(w, r)$. Comme $f^\#$ est bornée sur $\overline{D}(w, r)$, il en est de même pour $f_n^\#$.

Dans le cas où $1/f_n$ converge uniformément vers une application holomorphe $1/f$ bornée sur $\overline{D}(w, r)$. Le même argument que précédemment s'applique à $1/f_n$, et puisque $g^\# = (\frac{1}{g})^\#$ on a la même conclusion. Dans tout les cas $f_n^\#$ est bornée à partir d'un certain rang sur $\overline{D}(w, r)$. Comme K est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de disque ouvert $\{D(w_i, r_i)\}_{i \in \{0, \dots, p\}}$ ce qui montre que $f_n^\#$ est bornée sur K , ce qui est impossible puisque $f_n^\#(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

— Réciproquement, soit $\overline{D}(0, r)$ un voisinage compact de l'origine sur lequel $\mathcal{F}^\#$ est uniformément bornée, il existe une constante C telle que $\forall z \in \overline{D}(0, r), \forall \alpha \ f_\alpha^\#(z) \leq C$. Soit $z_0, z \in \overline{D}(0, r)$, γ le segment joignant z_0 à z , alors

$$\sigma(f_\alpha(z_0), f_\alpha(z)) \leq \int_\gamma f_\alpha^\#(\zeta) |d\zeta| \leq C |z_0 - z|$$

\mathcal{F} est alors sphériquement équicontinue sur $\overline{D}(0, r)$. D'après le théorème (A.6), \mathcal{F} est normale sur $\overline{D}(0, r)$ \square

Le lemme suivant est la dernière étape avant le théorème de Montel.

Lemme A.9 (Principe de renormalisation de Zalcman). — Une famille d'applications holomorphes \mathcal{F} de \mathbb{D} dans $\hat{\mathbb{C}}$ n'est pas normale au voisinage de $a \in \mathbb{D}$ si et seulement si il existe une suite de points $a_n \in \mathbb{D}$, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, des réels positifs $r_n \searrow 0$ et des applications $f_n \in \mathcal{F}$ tels que la suite $f_n(a_n + r_n w)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une application entière non constante $g : \mathbb{C} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ satisfaisant à la condition de renormalisation

$$g^\#(w) \leq g^\#(a) = 1$$

pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — Supposons que la famille d'applications holomorphes $\mathcal{F} := \{f_\alpha\}$ de \mathbb{D} dans $\hat{\mathbb{C}}$ est une famille normale au voisinage de $a \in \mathbb{D}$ et qu'il existe une suite de points $a_n \in \mathbb{D}$, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, des réels positifs $r_n \searrow 0$ et des applications $f_n \in \mathcal{F}$ tels que la suite $f_n(a_n + r_n w)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une application entière non constante $g : \mathbb{C} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ satisfaisant à la condition de renormalisation. La famille $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant une famille normale au voisinage de a , après une éventuelle extraction on peut supposer que f_n converge sur un voisinage K de a vers une application holomorphe $h : \mathbb{D} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$.

Soit $w \in \mathbb{C}$, comme $a_n + r_n w \rightarrow a$ en passant à la limite sur K on trouve $g(w) = h(a)$. Donc g est constante, ce qui est impossible. La condition énoncée est donc suffisante à la non-normalité.

— Réciproquement, en considérant un disque ouvert de centre a inclus dans \mathbb{D} on se ramène au cas où $a = 0$.

D'après le théorème de Marty (Théorème A.8), $\mathcal{F}^\# := \{f_\alpha^\#\}$ n'est pas uniformément bornée au voisinage de $a = 0$. Soit alors $\rho_n \searrow 0$ une suite de réels décroissant vers 0. On peut trouver $f_n \in \mathcal{F}$ et $\xi_n \in \overline{D}(0, \rho_n/2)$ tels que

$$f_n^\#(\xi_n) \geq \frac{n}{\rho_n} \tag{6}$$

Choisissons $a_n \in \overline{D}(0, \rho_n)$ tel que

$$f_n^\#(a_n)(\rho_n - |a_n|) = \sup_{|z| \leq \rho_n} f_n^\#(z)(\rho_n - |z|) =: M_n \tag{7}$$

Avec (6) on a

$$M_n \geq f_n^\#(\xi_n)(\rho_n - |\xi_n|) \geq \frac{n}{2}$$

et donc la suite M_n diverge vers $+\infty$. Posons $r_n := 1/f_n^\#(a_n)$, (7) peut alors s'écrire

$$r_n M_n = \rho_n - |a_n|$$

ce qui montre en particulier que $r_n \rightarrow 0$.

Comme $|a_n + r_n w| \leq |a_n| + r_n M_n = \rho_n$ pour tout nombre complexe $|w| \leq M_n$, l'application $g_n(w) := f_n(a_n + r_n w)$ est bien définie sur $D(0, M_n)$ et on a

$$g_n^\sharp(w) = r_n f_n^\sharp(a_n + r_n w) \leq \frac{r_n M_n}{\rho_n - |a_n + r_n w|} \leq \frac{r_n M_n}{\rho_n - |a_n| - r_n |w|} = \frac{1}{1 - |w|/M_n}$$

La famille $\{g_n\}$ est donc localement équicontinue. En vertu du théorème d'Ascoli la suite g_n converge donc uniformément sur tout compact de \mathbb{C} après une éventuelle extraction. Si $g : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est la limite, alors

$$g^\sharp(w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n^\sharp(w) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{|w|}{M_n}\right)^{-1} = 1$$

$$\text{et } g^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n^\sharp(0) = 1. \quad \square$$

Le théorème de Montel fournit un critère spectaculaire de normalité, qui servira notamment pour l'étude de l'ensemble de Julia.

Théorème A.10 (Théorème de Montel). — *Si a, b, c sont trois points distincts, alors toute famille d'applications holomorphes $f_\alpha : \mathbb{D} \mapsto \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ est normale.*

Démonstration. — En conjuguant par une homographie appropriée (cf Proposition A.5) on peut supposer que $\{a, b, c\} = \{0, 1, \infty\}$. Soit

$$f_n : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$$

une suite d'applications holomorphes. Comme \mathbb{D} est simplement connexe et $f_n(\mathbb{D})$ évite les valeurs 0 et ∞ on peut, pour tout entier n et tout entier $k \geq 1$, définir

$$f_{n,k} = \sqrt[k]{f_n}$$

Comme f_n ne prend pas la valeur 1, $f_{n,k}(\mathbb{D})$ évite l'ensemble

$$R_k := \{e^{2i\pi q/2^k}; 1 \leq q \leq 2^k\}$$

des racines 2^k -mèmes de l'unité.

Supposons $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non normale. Le principe de renormalisation de Zalcman et le théorème d'Hurwitz appliqués à $\{f_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ fournissent une application entière non constante $\phi_k : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus (\{0, \infty\} \cup R_k)$ telle que $\phi_k^\sharp \leq \phi_k^\sharp(0) = 1$. On en déduit qu'en vertu du théorème de Marty, la famille $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est normale. Après extraction, $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge sur tout compact de \mathbb{C} vers une application entière $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. L'application ϕ est non-constante car $\phi^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_k^\sharp(0) = 1$. Par ailleurs, la suite R_k étant croissante pour l'inclusion, le théorème d'Hurwitz nous montre que

$$\phi(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \geq 1} R_k \quad (8)$$

Comme l'application entière ϕ est ouverte, $\phi(\mathbb{C})$ est ouvert, et par densité avec (8) on a $\phi(\mathbb{C}) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$. L'image continue d'un connexe est connexe, ainsi ϕ ou $1/\phi$ est à valeur dans \mathbb{D} . Mais alors par le théorème de Liouville, ϕ est constante, ce qui est impossible. \square

Le théorème suivant, Théorème de Picard, est équivalent au Théorème de Montel (Théorème A.10).

Théorème A.11 (Théorème de Picard). — *Si a, b, c sont trois points distincts, alors toute application holomorphe f de \mathbb{C} dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ est constante.*

Démonstration. — La normalité de la famille $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ définie par $f_n(z) = f(z_0 + nz)$ entraîne $f'(z_0) = 0$ puisque $f'_n(0) = n f'(z_0)$. Ainsi le théorème de Montel (Théorème A.10) entraîne celui de Picard.

Réciproquement, si $f_n(z) = f(z_0 + nz)$ est non normale, alors d'après le principe de renormalisation de Zalcman (Lemme A.9), il existe $a_n \rightarrow a \in \mathbb{D}$ et $r_n \searrow 0^+$ tels que $f_n(a_n + r_n w)$ converge vers une application entière non constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Comme f_n évite les points a, b, c , le théorème d'Hurwitz (Théorème A.7) justifie que $g(\mathbb{C}) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$. Le théorème de Picard montre alors que g est constante ce qui est impossible. Par contraposée, on a ainsi montré que le Théorème de Picard implique celui de Montel.

Il y a équivalence entre le théorème de Picard et le théorème de Montel. \square

A.3 Théorème de Jensen, Théorème de F. et M. Riesz

La démonstration du théorème de Siegel pour les polynômes de degré deux utilise le théorème de F. et M. Riesz, que l'on montre grâce à un théorème de Jensen. Commençons par deux lemmes :

Lemme A.12. — Pour tout $t \geq 0$, la fonction $\theta \mapsto \log |t - e^{i\theta}|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et on a :

$$\int_0^{2\pi} \log |t - e^{i\theta}| d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \int_0^{2\pi} \log |t - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log(t) & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Démonstration. — L'intégrabilité de la fonction est évidente (dans le cas $t = 1$, on a $\log |1 - e^{i\theta}| \sim \log |\theta|$ qui est intégrable au voisinage de zéro). Notons alors

$$I(t) = \int_0^{2\pi} \log |t - e^{i\theta}| d\theta$$

Si $t > 1$, $t - z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ pour $z \in \mathbb{D}$ donc $z \mapsto \log(t - z)$ est définie et holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Comme $\log |t - z| = \operatorname{Re}(\log(t - z))$, la formule de la moyenne donne :

$$I(t) = 2\pi \operatorname{Re}(\log(t))$$

Si $t < 1$, on a $\log |t - e^{i\theta}| = \log |t - e^{-i\theta}| = \log |e^{i\theta}t - 1| = \log(t) + \log |\frac{1}{t} - e^{i\theta}|$. Dans ce cas

$$I(t) = 2\pi \log(t) + I(1/t) = 0$$

On montre que $I(1) = 0$ par continuité sous le signe intégral. □

Corollaire A.13. — Soit $r > 0$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\theta \mapsto \log |a - re^{i\theta}|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et

$$\int_0^{2\pi} \log |a - re^{i\theta}| d\theta = \begin{cases} 2\pi \log(r) & \text{si } |a| \leq r \\ 2\pi \log |a| & \text{si } |a| > r \end{cases}$$

Démonstration. — On écrit $a = |a|e^{i\theta_0}$ et $\log |a - re^{i\theta_0}| = \log(r) + \log |\frac{|a|}{r} - e^{i(\theta - \theta_0)}|$, et on applique le lemme précédent. □

On en déduit la formule de Jensen :

Théorème A.14 (Formule de Jensen). — Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(0, r)$, telle que $f(0) \neq 0$. Notons a_1, \dots, a_n ses zéros éventuels sur $\overline{D}(0, r)$, comptés selon leurs ordres de multiplicité. Alors $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on a :

$$\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \log |f(0)| + \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{r}{a_j} \right|$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ tel que f soit holomorphe sur $D(0, r + \varepsilon)$ et n'ait pas d'autre zéro que les a_j . On peut écrire

$$f(z) = g(z) \prod_{j \leq n} (z - a_j)$$

où g est holomorphe et ne s'annule pas. Comme $D(0, r + \varepsilon)$ est simplement connexe, on peut définir $\varphi(z) = \log(g)$. Alors $|g(z)| = \operatorname{Re}(\varphi(z))$, et donc d'après la formule de la moyenne,

$$\log |g(0)| = \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$$

De plus, $\log |g(0)| = \log |f(0)| - \sum_{j \leq n} \log |a_j|$ et $\log |g(re^{i\theta})| = \log |f(re^{i\theta})| - \sum_{j \leq n} \log |a_j - re^{i\theta}|$, donc $\theta \mapsto \log |f(re^{i\theta})|$ est intégrable et

$$\int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - n \log(r)$$

d'où le résultat. □

Théorème A.15. — Soit f holomorphe non nulle sur \mathbb{D} . Alors $\log |f(re^{i\theta})|$ est intégrable sur tout cercle $0 < |z| = r < 1$, $\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$ est croissante selon r et $\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \geq \log |f(0)|$.

Démonstration. — Dans le cas où $f(0) \neq 0$, la formule de Jensen permet de conclure. Sinon, on écrit $f(z) = z^m g(z)$ où $g(0) \neq 0$, et alors $f(re^{i\theta}) = r^m + \log |g(re^{i\theta})|$, ce qui montre que $\log |f|$ est intégrable sur tout cercle et permet de conclure. □

On en vient maintenant au théorème de F. et M. Riesz :

Théorème A.16 (F. et M. Riesz). — Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et bornée telle que la limite radiale $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existe et vaut zéro pour tout θ appartenant à un ensemble $E \subset [0, 2\pi]$ de mesure non nulle. Alors f est identiquement nulle.

Démonstration. — f étant bornée, quitte à multiplier par une constante, on peut supposer que $|f| < 1$. Notons $E(\varepsilon, \delta)$ l'ensemble des θ tels que $|f(re^{i\theta})| < \varepsilon$ dès que $1 - \delta < r < 1$. Alors il est clair que pour tout ε ,

$$E \subset \bigcup_{n > 0} E(\varepsilon, 1/n)$$

donc $\lambda(E(\varepsilon, \delta))$ doit tendre vers une limite supérieure ou égale à $\lambda(E)$. On peut donc trouver δ tel que $\lambda(E(\varepsilon, \delta)) > \lambda(E)/2$. Considérons alors la moyenne de Jensen

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour $1 - \delta < r < 1$. Alors $\log |f(re^{i\theta})| < 0$ partout, et $\log |f(re^{i\theta})| > \log(\varepsilon)$ sur un ensemble de mesure au moins $\lambda(E)/2$. Par conséquent,

$$2\pi A(r) < \log(\varepsilon) \lambda(E)/2$$

dès que r est suffisamment proche de 1. ε étant pris arbitrairement petit, si $\lambda(E) \neq 0$, alors $A(r) \xrightarrow{r \rightarrow 1} -\infty$, ce qui contredit le fait que A soit croissante. □

B Approximation des réels par des rationnels

On montre ici deux résultats utiles pour l'étude des points irrationnellement neutres.

Théorème B.1. — *Pour une application $q \rightarrow \eta(q) > 0$ quelconque, l'ensemble des irrationnels θ tels que*

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \eta(q)$$

pour une infinité de rationnels est une intersection dénombrable d'ouverts denses (en particulier, cet ensemble est dense).

Démonstration. Il est immédiat que l'ensemble recherché s'écrit

$$A = \bigcap_{q>0} \left\{ \theta \in \mathbb{R} - 1/q\mathbb{Z}, \exists r > q, p \in \mathbb{N}, \left| \theta - p/r \right| < \eta(r) \right\} = \bigcap_{q>0} B_q$$

où B_q est un ouvert. Soient alors $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, q \in \mathbb{N}$. Par densité, il existe un rationnel p/r , avec $r > q$, tel que $0 < |a - p/r| < \varepsilon$. Soit alors $p/r - \eta(r)\theta < p/r$, il est clair que $|a - p/r| < \varepsilon$ et que $|\theta - p/q| < \eta(q)$. Les B_q sont donc des ouverts denses. \square

En appliquant ce résultat à $\eta(q) = 2^{-q!}$, il est immédiat que les irrationnels θ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(1/|\theta - \frac{p_n}{q_n}|))}{q_n} = +\infty$$

pour une suite p_n/q_n de rationnels forment un ensemble dense.

Les irrationnels qui au contraire ne s'approximent pas bien par les rationnels jouent un rôle dans le théorème de Siegel :

Définition B.1. — Un réel θ est dit diophantien s'il existe $c > 0, \mu > 2$ telles que l'inégalité suivante soit vérifiée sauf pour un nombre fini de rationnels : $|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\mu}$

Remarque. — On remarque que quitte à modifier c , l'inégalité peut être vérifiée pour tout rationnel.

La propriété suivante est utilisée dans la démonstration du théorème de Siegel :

Proposition B.2. — Soit $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, si θ est diophantien, alors à partir d'un certain rang, $|\lambda^q - 1| \geq cq^{1-\mu}$.

Démonstration. — Pour q assez grand et pour $p \wedge q = 1$, on obtient par une factorisation par l'angle moitié : $|\lambda^q - 1| = 2|\sin((q\pi(\theta - \frac{p}{q})))|$. Il suffit alors de choisir p tel que $|\theta - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{2q}$, ce qui est toujours possible, et on obtient : $|\lambda^q - 1| \geq 2cq^{1-\mu}$. \square

Le résultat suivant complète le théorème de Siegel :

Théorème B.3. — *L'ensemble des nombres diophantiens de $[0, 1]$ est de mesure 1*

Démonstration. — Notons E le complémentaire de l'ensemble des nombres diophantiens dans $[0, 1]$. $\theta \in E$ si et seulement si pour tout μ il existe une infinité de rationnels tels que $|\theta - \frac{p}{q}| < q^{-\mu}$. Il est aisé de vérifier que E est mesurable et que $\lambda(E) \leq \sum_{q \geq n} 2q^{-\mu}q$ pour tout n et tout μ . Il suffit alors de prendre $\mu > 2$ pour obtenir le résultat. \square

Références

- [Ber01] V. Berteloot, F. Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe*. Number 7 in Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2001.
- [Car92] T.W. Carleson, L. Gamelin. *Complex Dynamics*. Universitext Springer-Verlag, 1992.
- [Mil99] J. Milnor. *Dynamics in one complexe Variable. Introductory lectures*. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1999.
- [Sch93] Joel L. Schiff. *Normal Families*. Universitext Springer-Verlag, 1993.
- [Ste93] N. Steinmetz. *Rational iteration, Complexe Analytic Dynamical Systems*, volume 16. de Gruyter Studies in Mathematics, 1993.
- [Yoc95] J.-Ch. Yoccoz. *Petits diviseurs en dimension 1*. Société Mathématique de France, 1995.