

Les Représentations du Groupe Symétrique

L. Pirutka - N. de Saxcé

Table des matières

1	Représentations linéaires des groupes finis	2
1.1	Définitions et exemples	2
1.2	Théorie des caractères	5
1.3	Représentation régulière et nombre de représentations irréductibles	7
1.4	Représentations restreintes et induites	9
2	Représentations du groupe symétrique	11
2.1	Tableaux de Young	11
2.2	Modules de Specht	14
2.3	Tableaux standards et base de S^λ	18
2.4	Représentation naturelle de Young	23
2.5	La décomposition de M^μ	23
2.6	Loi de la ramification ("Branching rule")	26
3	La formule des crochets	30
4	Conclusion	33
5	Bibliographie	33

1 Représentations linéaires des groupes finis

1.1 Définitions et exemples

Afin de mieux comprendre les propriétés d'un groupe, on peut tenter de voir ce groupe comme un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Cela conduit à la notion suivante :

Définition 1. On appelle *représentation linéaire* d'un groupe G la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes :

$$\rho : G \rightarrow GL(V).$$

L'espace vectoriel V est l'*espace de la représentation* et la dimension de V son *degré*. Dans toute la suite, nous n'étudierons que des représentations de groupes finis, à valeurs dans des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie. On peut alors raisonner en termes de matrices puisque l'image de G par ρ est un sous-groupe de $GL(V)$, qui s'identifie, par le choix d'une base, à $GL_n(\mathbb{C})$, où n est la dimension de V .

Définition 2. On dit que deux représentations linéaires d'un même groupe G , $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i), i = 1, 2$, sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels, $f : V_1 \rightarrow V_2$, tel que :

$$\forall g \in G, \rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_1(g)$$

En termes de matrices, cela signifie que les matrices associées à la première représentation sont semblables à leurs homologues dans la seconde, via la même matrice de passage.

Exemple

1. Tous les groupes possèdent la représentation triviale (ou représentation identité), qui envoie tout élément de G sur $Id_{\mathbb{C}}$. (L'espace de la représentation est \mathbb{C} .)
2. Si G opère à gauche sur A , on dispose d'une représentation de G dans l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles d'éléments de A définie par :

$$\rho(g)(a) = g.a, \quad g \in G, \quad a \in A.$$

C'est la représentation de permutation associée à A .

(On peut prendre par exemple $G = \mathcal{S}_n$ et $A = \{1, \dots, n\}$, ce qui permet d'identifier \mathcal{S}_n au sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices de permutation.)

3. Un cas particulier important de l'exemple précédent est celui de la représentation régulière (à gauche) de G , qu'on obtient en faisant agir G sur lui-même par translation à gauche.

Définition 3. Soit V un espace vectoriel et G un groupe. On dit que V est un G -module s'il est muni un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Cela équivaut à la donnée d'une multiplication externe $G \times V \rightarrow V$ telle que :

1. $g\mathbf{v} \in V$
2. $g(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c(g\mathbf{v}) + d(g\mathbf{w})$
3. $(gh)\mathbf{v} = g(h\mathbf{v})$
4. $1_G\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Pour tous $g, h \in G$; $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$; $c, d \in \mathbb{C}$.

Une représentation de G correspond donc à un G -module.

Définition 4. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de G , et W un sous-espace vectoriel de V . On dit que W est *stable par G* si W est stable par tous les $\rho(g)$, $g \in G$. La restriction de ρ à W est alors une représentation de G dans W . Cela correspond à dire que W est un sous- G -module de V .

Théorème 5. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de G , et W un sous-espace stable par G . Alors, il existe un supplémentaire W_0 de W stable par G .

Démonstration. Soit W_1 un supplémentaire quelconque de W dans V , et p le projecteur de V sur W correspondant. Posons :

$$p_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho(t)p\rho(t)^{-1} \quad , \quad |G| \text{ étant l'ordre de } G.$$

Alors, p_0 est un projecteur de V sur W qui commute à tous les éléments de G , donc son noyau, W_0 est stable par G . □

Définition 6. Une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ (resp. un G -module) est dit(e) *irréductible* (ou *simple*) si V n'est pas réduit à zéro, et si aucun sous-espace vectoriel strict non nul de V n'est stable par G (resp. si V n'admet aucun sous-module autre que lui-même et $\{0\}$).

On vérifie aisément qu'une représentation est irréductible si et seulement si

le module associé l'est.

Théorème 7. Toute représentation est somme directe de représentations simples.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $\dim(V)$. Si $\dim(V) = 0$, le résultat est clair. Supposons $\dim(V) \geq 1$. Si V est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut décomposer V en $V' \oplus V''$, avec V' et V'' de dimensions strictement inférieures à $\dim(V)$, ce qui permet de passer à la récurrence. \square

Théorème 8. Lemme de Schur

Soient V et W deux modules irréductibles de G , et $f : V \rightarrow W$ un morphisme de G -modules. Alors, $f = 0$ ou f est un isomorphisme de G -modules.

Démonstration. Comme $\ker f$ est un sous-module de V , qui est irréductible ce ne peut être que $\{0\}$ ou V . De même, grâce à l'irréductibilité de W , $\text{Im } f = \{0\}$ ou $\text{Im } f = W$, ce qui prouve ce qu'on veut. \square

Corollaire 9. Si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations irréductibles non équivalentes, et si $f : V_1 \rightarrow V_2$ est linéaire et vérifie $\forall g \in G, f \cdot \rho_1(g) = \rho_2(g) \cdot f$, alors, $f = 0$.

Démonstration. Il suffit de traduire le lemme de Schur en termes de représentations. \square

Corollaire 10. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation irréductible de G (V étant un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie). Un endomorphisme f (d'espace vectoriel) de V qui commute à tous les $\rho(g)$, $g \in G$ est une homothétie.

Démonstration. Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, f admet une valeur propre λ . Mais alors $f - \lambda id_V$ commute aussi à tous les $\rho(g)$, $g \in G$ donc c'est un morphisme de G -modules. Or $f - \lambda id_V$ n'est pas injectif, d'après le lemme de Schur, il est nul : $f = \lambda id_V$ est une homothétie. \square

1.2 Théorie des caractères

Définition 11. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de G . Pour tout $s \in G$, posons :

$$\chi_\rho(s) = \text{Tr}(\rho(s))$$

On obtient ainsi une fonction χ_ρ sur G , à valeurs complexes, appelée *caractère* de la représentation ρ .

On démontre alors aisément les propriétés suivantes :

Proposition 12. Si χ est le caractère d'une représentation ρ de degré n , on a :

1. $\chi(1) = n$
2. $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$ (conjugué complexe de $\chi(s)$), pour tout $s \in G$
3. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$, pour tous $s, t \in G$
4. Si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations irréductibles équivalentes, alors, $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

Définition 13. Soient χ et ψ deux fonctions de G dans \mathbb{C} . On définit le produit scalaire de χ et ψ par :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(t) \psi(t)^* = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(t) \psi(t^{-1})$$

Théorème 14. Soient χ et ψ deux caractères irréductibles de G , alors :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Démonstration. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices des représentations associées à χ et à ψ , de degrés d et f respectivement (les a_{ij} et les b_{ij} sont des fonctions de G dans \mathbb{C}). Soit $X = (x_{ij})$ une matrice $d \times f$ quelconque. Posons :

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} A(t) X B(t^{-1})$$

Alors, pour tout $s \in G$,

$$A(s) Y B(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} A(st) X B((st)^{-1}) = Y$$

Donc, pour tout $s \in G$, $A(s) Y = Y B(s)$.

En appliquant alors les corollaires 9 et 10, on obtient :

$$Y = \begin{cases} \lambda I_d & \text{si les représentations sont équivalentes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1^{er} cas : $\chi \neq \psi$ Les représentations ne sont pas équivalentes, donc, pour toute matrice X ,

$$\forall i, j, \quad \sum_{k,l} \sum_{t \in G} a_{ik}(t) x_{kl} b_{lj}(t^{-1}) = 0$$

Pour que ce polynôme en les x_{kl} soit nul, il faut que tous ses coefficients soient nuls, donc :

$$\forall i, j, k, l, \quad \sum_{t \in G} a_{ik}(t) b_{lj}(t^{-1}) = 0$$

Par suite,

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j} \sum_{t \in G} a_{ii}(t) b_{jj}(t^{-1}) = 0$$

2^e cas : $\chi = \psi$ $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \chi \rangle$ ne dépend que de χ , donc que de A . Par suite, on peut supposer $A = B$, et les représentations sont alors équivalentes :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} A(t) X A(t^{-1}) = \lambda I_d \quad (*)$$

D'où, en prenant la trace, $cd = \text{Tr} X$.

L'égalité des coefficients matriciels dans (*) donne alors :

$$\forall i, j, \quad \frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{t \in G} a_{ik}(t) x_{k,l} a_{l,i}(t^{-1}) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_{i,i}$$

Comme l'égalité vaut pour tout choix de X ,

$$\forall i, j, k, l, \quad \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} a_{ik}(t) a_{li}(t^{-1}) = \frac{1}{d} \delta_{k,l}$$

On en déduit :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j} \sum_{t \in G} a_{ii}(t) a_{jj}(t) = 1$$

et le théorème est prouvé. □

On en déduit facilement le corollaire suivant :

Corollaire 15. Soit V une représentation de G de caractère χ . Supposons :

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus m_2 V^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k V^{(k)}$$

où les $V^{(i)}$ sont irréductibles et deux à deux non équivalentes, de caractères $\chi^{(i)}$. Alors,

1. $\chi = m_1\chi^{(1)} + \dots + m_k\chi^{(k)}$
2. $\forall j, \langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$.
3. $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2$.
4. V est irréductible si et seulement si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.
5. Si W est une autre représentation de G de caractère ψ , $X \cong Y$ si et seulement si $\chi = \psi$.

Corollaire 16. Soit W un G -module et V un G -module irréductible. Le nombre de copies de V dans une décomposition en sous-modules irréductibles de W ne dépend pas de la décomposition et il est égal à $\dim \text{Hom}_G(V, W)$ (morphisme de G -modules de V vers W).

Démonstration. Que ce nombre soit indépendant de la décomposition est une conséquence immédiate de la proposition précédente. Ensuite, soit $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ une décomposition de W en sous-modules irréductibles. Notons p_i la projection de W sur W_i pour cette décomposition. Pour tout i , p_i est un morphisme de modules, et $\sum_i p_i = id_W$. Soit alors $f \in \text{Hom}_G(V, W)$, on a :

$$f = f \circ p_1 + \dots + f \circ p_r$$

Et pour chaque i , $f \circ p_i$ est un morphisme de modules de V vers W_i . On en déduit que $\text{Hom}_G(V, W) \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_G(V, W_i)$. Or, $\text{Hom}_G(V, W_i) = \{0\}$ si $V \not\cong W_i$ (lemme de Schur) et $\text{Hom}_G(V, W_i)$ est une droite vectorielle si $V \cong W_i$ (d'après le corollaire 10). \square

1.3 Représentation régulière et nombre de représentations irréductibles

Dans ce paragraphe, on désigne par χ_1, \dots, χ_h les différents caractères associés aux représentations irréductibles W_1, \dots, W_h de G ; on note n_i le degré de W_i , i.e. $n_i = \chi_i(1)$.

Proposition 17. Chaque représentation irréductible W_i de G est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son degré n_i .

Démonstration. Il suffit de remarquer que le caractère r_G de la représentation régulière est donné par $r_G(1) = |G|$ et $r_G(s) = 0$ si $s \neq 1$. Ensuite, le nombre d'apparitions de W_i dans V est :

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1}) \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} |G| \chi_i(1) = n_i \quad \square$$

Corollaire 18. Les n_i vérifient :

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Définition 19. Une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *centrale* si elle est constante sur les classes de conjugaison de G (i.e. si $\forall s, t \in G, f(sts^{-1}) = f(t)$).

Proposition 20. Soit f une fonction centrale sur G , et soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de G . Soit ρ_f l'application linéaire de V dans lui-même définie par :

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t)\rho(t).$$

Si V est irréductible de degré n et de caractère χ , ρ_f est une homothétie de rapport :

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\chi(t) = \frac{|G|}{n} \langle f, \chi^* \rangle.$$

Démonstration. Pour $s \in G$, calculons :

$$\rho(s)\rho_f\rho(s^{-1}) = \sum_{t \in G} f(t)\rho(s^{-1}ts) \quad (1)$$

$$= \sum_{u \in G} f(sus^{-1})\rho(u) \quad (2)$$

$$= \sum_{u \in G} f(u)\rho(u) = \rho_f \quad (3)$$

On a donc $\rho_f\rho(s) = \rho(s)\rho_f$. D'après le corollaire 10, ρ_f est une homothétie de rapport :

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\text{Tr}(\rho(t)) = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\chi(t) = \frac{|G|}{n} \langle f, \chi^* \rangle. \quad \square$$

On introduit maintenant l'espace vectoriel H des fonctions centrales sur G ; les caractères χ_1, \dots, χ_h appartiennent à H .

Théorème 21. Les caractères χ_1, \dots, χ_h forment une base orthonormale de H .

Démonstration. On sait déjà que les χ_i forment un système orthonormal dans H . Pour prouver qu'ils forment une base de H , il suffit de montrer que tout élément de H orthogonal aux χ_i^* est nul. Soit donc f un tel élément. Pour toute représentation ρ de G , la fonction ρ_f définie à la proposition précédente est nulle. Appliquant cela à la représentation régulière, on obtient en particulier :

$$\rho_f(\mathbf{1}) = \sum_{t \in G} f(t)\mathbf{t} = 0$$

Donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in G$, ce qui achève la démonstration. \square

Théorème 22. Le nombre de représentations irréductibles de G (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de G .

Démonstration. Les fonctions indicatrices des classes de conjugaisons de G forment une base de H , donc il y en a h , ce qu'il fallait démontrer. \square

1.4 Représentations restreintes et induites

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Dans ce paragraphe on va étudier comment obtenir des représentations de G à partir de celles de H et vice versa.

Définition 23. Soit H un sous-groupe d'un groupe G , soit X une représentation de G . La restriction de X à H , notée $X \downarrow_H^G$, est donnée par

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h)$$

pour chaque $h \in H$.

On voit facilement que $X \downarrow_H^G$ est effectivement une représentation de H .

Définition 24. Soit H un sous-groupe d'un groupe G , soit Y une représentation de H . Fixons une transversale t_1, \dots, t_l de classes à gauche de H , i.e. $G = t_1H \uplus \dots \uplus t_lH$ – union disjointe. La représentation de G induite par Y , notée $Y \uparrow_H^G$, est donnée par

$$Y \uparrow_H^G = (Y(t_i^{-1}gt_j)) = \begin{pmatrix} Y(t_1^{-1}gt_1) & Y(t_1^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_1^{-1}gt_l) \\ Y(t_2^{-1}gt_1) & Y(t_2^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1}gt_1) & Y(t_l^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_l^{-1}gt_l) \end{pmatrix}$$

où $Y(g)$ est égal à zéro si $g \notin H$. On dit aussi que la transversale $\{t_1, \dots, t_l\}$ donne la représentation induite $Y \uparrow_H^G$.

Cette définition vient naturellement de l'idée consistant à prolonger la représentation de H par zéro en dehors de H (ce qui est impossible, car les matrices $X(g)$, $g \in G$ doivent être inversibles). On montre facilement que $Y \uparrow_H^G$ est effectivement une représentation de G , en notant que chaque ligne et chaque colonne de matrices de $Y \uparrow_H^G(g)$ contient exactement un bloc non nul $Y(t_i^{-1}gt_j)$ (car pour chaque $i = 1, \dots, l$ il y a exactement un élément de H dans la liste $t_1^{-1}gt_i, t_2^{-1}gt_i \dots t_l^{-1}gt_i$ et de même pour les lignes).

Si χ est le caractère de la représentation X , on note $\chi \downarrow_H^G(h)$ le caractère de $X \downarrow_H^G$ et $\chi \uparrow_H^G(h)$ le caractère de $X \uparrow_H^G$.

Le cas particulier des représentations induites qui va nous servir est $1 \uparrow_H^G$.

Rappelons que si $\{t_1, \dots, t_l\}$ est une transversale de H , alors le module $\mathbb{C}[t_1H, \dots, t_lH]$ est isomorphe à la représentation de permutation associée à H . Les matrices (z_{ij}) de cette représentation sont données par

$$z_{ij}(g) = \begin{cases} 1, & gt_jH = t_iH \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 25. Soit Y la représentation unité de H (i.e. $Y(h) = 1$ pour chaque $h \in H$). Alors les matrices de $1 \uparrow_H^G$ sont identiques à celles de la représentation de permutation associée à H .

Démonstration. Soient (y_{ij}) et (z_{ij}) les matrices pour ces représentations respectivement. Les éléments de ces matrices sont les zéros et les unités par les définitions de $1 \uparrow_H^G$ et de la représentation de permutation. De plus, $y_{ij}(g) = 1 \Leftrightarrow t_i^{-1}gt_j \in H \Leftrightarrow gt_jH = t_iH \Leftrightarrow z_{ij} = 1$.

Donnons quelques propriétés importantes de $Y \uparrow_H^G$.

Proposition 26. Soit H un sous-groupe d'un groupe G , soit Y une représentation de H .

1. $Y \uparrow_H^G$ ne dépend pas de la transversale, c'est-à-dire que si $\{t_1, \dots, t_l\}$ et $\{s_1, \dots, s_l\}$ sont les transversales donnant les représentations induites $X = Y_1 \uparrow_H^G$ et $Z = Y_2 \uparrow_H^G$ respectivement, alors X et Z sont isomorphes.
2. (*Réciprocité de Frobenius*)

Soient ψ et χ les caractères de H et G respectivement. Alors,

$$\langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle \quad (4)$$

Démonstration.

1. Il suffit de montrer que les caractères des représentations X et Z sont égaux. Soit χ le caractère de X , ψ le caractère de Y , et ϕ le caractère de Z . Alors $\chi(g) = \sum_i \text{Tr} Y(t_i^{-1}gt_i) = \sum_i \psi(t_i^{-1}gt_i)$, où la somme est prise sur les i tels que $t_i^{-1}gt_i \in H$. De même, $\phi(g) = \sum_i \psi(s_i^{-1}gs_i)$.

Comme $\{t_1, \dots, t_l\}$ et $\{s_1, \dots, s_l\}$ sont des transversales, on peut supposer, que $t_i H = s_i H$, $i = 1, \dots, l$ et alors t_i et s_i sont dans la même classe à gauche de H et donc $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(s_i^{-1}gs_i)$, d'où $\chi(g) = \phi(g)$.

2. Soit $\{t_1, \dots, t_l\}$ une transversale. Notons que si $h \in H$, alors $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_i h)$. Par suite,

$$\psi \uparrow_H^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_i \sum_{h \in H} \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_i h) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \psi(x^{-1}gx).$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle \psi \uparrow_H^G (h), \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi \uparrow_H^G (g) \chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(xy^{-1}x^{-1}) \quad [\text{en posant } y = x^{-1}gx] \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(y^{-1}) = \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

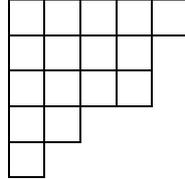
2 Représentations du groupe symétrique

2.1 Tableaux de Young

Dans cette section il s'agit de construire toutes les représentations irréductibles (à isomorphisme près) du groupe symétrique. De façon générale le nombre de représentations irréductibles d'un certain groupe (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de ce groupe. Dans le cas du groupe symétrique \mathcal{S}_n c'est le nombre de partitions de n . On écrit $\lambda \vdash n$ pour la partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $n = |\lambda| = \sum_i \lambda_i$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$. Une méthode pour visualiser une partition est la notion de diagramme de Ferrer.

Définition 27. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$. Le diagramme de Ferrer t de forme λ est un tableau avec l lignes, tel que la i -ème ligne contienne λ_i cases, $i = 1, \dots, l$.

Par exemple, pour $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$ on a le diagramme suivant



Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, cette partition correspond à un certain sous-groupe de \mathcal{S}_n , en l'occurrence à

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\{1, 2, \dots, \lambda_1\}} \times \mathcal{S}_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times \mathcal{S}_{\{n-\lambda_l+1, n-\lambda_l+2, \dots, n\}}.$$

On l'appelle *le sous-groupe de Young* correspondant à $\lambda \vdash n$.

L'idée qui vient naturellement pour construire les représentations irréductibles de \mathcal{S}_n est de considérer d'abord la représentation induite $1 \uparrow_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n}$. D'après le paragraphe précédent le module de cette représentation est

$$\mathbb{C}[\pi_1 \mathcal{S}_\lambda, \dots, \pi_k \mathcal{S}_\lambda] \stackrel{\text{def}}{=} V^\lambda,$$

où π_1, \dots, π_k est une transversale de \mathcal{S}_λ .

Maintenant, pour obtenir l'action de \mathcal{S}_n sur les tableaux ou sur les diagrammes de Ferrer, introduisons les notions suivantes.

Définition 28. Soit $\lambda \vdash n$. Remplaçons les cases d'un diagramme de Ferrer de forme λ par les nombres $1, 2, \dots, n$ bijectivement. Le tableau ainsi obtenu est *un tableau de Young* de forme λ .

Si $\lambda = (3, 1)$ alors des exemples de tableaux de Young de forme λ sont

$$\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & \\ 3 & & & \end{array}, \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ 4 & & & \end{array}, \quad \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & \\ 2 & & & \end{array}.$$

Définition 29. On dit que deux tableaux t_1 et t_2 de même forme λ sont équivalents et on note $t_1 \sim t_2$ si chaque ligne de t_1 contient les mêmes éléments que la ligne correspondante de t_2 . On appelle *tabloïde* une classe d'équivalence pour cette relation et on note $\{t\}$ le tabloïde associé à t .

Si $\lambda = (2, 1)$, $t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$, alors

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & \end{array} \right\} = \overline{\frac{1 \ 2}{3}}$$

Si t est un tableau de Young de forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, alors le nombre de tableaux dans la classe $\{t\}$ est égal à $\lambda_1! \cdots \lambda_l! \stackrel{\text{def}}{=} \lambda!$. Ainsi le nombre de λ -tabloïdes est $\frac{n!}{\lambda!}$.

Maintenant on peut considérer l'action du groupe symétrique sur l'ensemble de tabloïdes de forme λ , en posant

$$\pi\{t\} = \{\pi t\}, \quad \pi \in \mathcal{S}_n.$$

Cette action est bien définie, i.e. ne dépend pas du choix du représentant de $\{t\}$. Il en découle la notion de \mathcal{S}_n -module suivant.

Définition 30. Soit $\lambda \vdash n$. Soit $\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$ l'ensemble des λ -tabloïdes. Alors,

$$M^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\{t_1\}, \dots, \{t_k\}]$$

est un module de permutation correspondant à λ .

Dans la suite on aura besoin d'encore une définition.

Définition 31. Soit M un G -module. Il est dit *cyclique* s'il existe $v \in M$ tel que $Gv = \{gv, g \in G\}$ engendre linéairement M . On dit aussi que le G -module M est *engendré par v* .

Donnons quelques propriétés de M^λ .

Proposition 32.

1. M^λ est cyclique, engendré par un λ -tabloïde quelconque. De plus $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$.
2. V^λ et M^λ sont isomorphes comme \mathcal{S}_n -modules.

Démonstration.

1. Il suffit de noter que \mathcal{S}_n agit transitivement sur l'ensemble des λ -tabloïdes.
2. Puisque M^λ est cyclique, il est engendré comme \mathcal{S}_n -module par un tabloïde $\{t\}$ quelconque. Si π_1, \dots, π_k est une transversale de \mathcal{S}_λ , alors l'application $\theta : V^\lambda \rightarrow M^\lambda : \pi_i \mathcal{S}_\lambda \mapsto \{\pi_i t\}$ est un isomorphisme de \mathcal{S}_n -modules. \square

2.2 Modules de Specht

Soit $\lambda \vdash n$ et soit t un tableau de Young de forme λ . On s'intéresse aux éléments de \mathcal{S}_n qui stabilisent t d'une certaine manière.

Définition 33. Soient R_1, \dots, R_l les lignes d'un tableau t , soient C_1, \dots, C_k ses colonnes. Alors

$$R_t = \mathcal{S}_{R_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{R_l}$$

est le stabilisateur des lignes de t et

$$C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}$$

est le stabilisateur des colonnes de t .

Ce sont des sous-groupes de \mathcal{S}_n . En général, si $H \subseteq \mathcal{S}_n$ et si \mathcal{S}_n agit sur un espace vectoriel X , alors une des méthodes pour étudier l'action de H sur X est de considérer les sommes $H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi$ et $H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi)\pi$. Si $H = \{\pi\}$, on écrit simplement π^- au lieu de H^- . Dans le cas des λ -tabloïdes, considérons

$$k_t \stackrel{\text{def}}{=} C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n].$$

Notons que si $C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}$, alors $k_t = k_{C_1} \cdots k_{C_k}$.

Définition 34. Soit t un tableau, alors le polytabloïde associé à t est

$$\mathbf{e}_t = k_t\{t\}.$$

Par exemple, si $t = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{array}$, alors $k_t = (e - (3, 4))(e - (1, 5))$ et

$$\mathbf{e}_t = \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \end{array}}$$

Définition 35. Soit $\lambda \vdash n$. Le module de Specht S^λ est le sous-module de M^λ , engendré par tous les polytabloïdes \mathbf{e}_t , où t est de forme λ .

Proposition 36. Soit t un tableau, $\pi \in \mathcal{S}_n$. Alors,

1. $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$,
2. $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$,

3. $k_{\pi t} = \pi k_t \pi^{-1}$,
4. $\mathbf{e}_{\pi t} = \pi \mathbf{e}_t$,
5. S^λ est cyclique, engendré par un λ -polytabloïde quelconque.

Démonstration. Les assertions (1), (2) et (3) se démontrent de la même manière. Démontrons (1) :

$$\sigma \in R_{\pi t} \Leftrightarrow \sigma\{\pi t\} = \{\pi t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} = \{t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi \in R_t \Leftrightarrow \sigma \in \pi R_t \pi^{-1}.$$

Pour (4) on a $\mathbf{e}_{\pi t} = k_{\pi t}\{\pi t\} = \pi k_t \pi^{-1}\{\pi t\} = \pi k_t\{t\} = \pi \mathbf{e}_t$, d'où on déduit (5). \square

On a maintenant introduit tous les objets nécessaires pour énoncer le théorème suivant.

Théorème 37. Les S^λ , $\lambda \vdash n$ énumèrent toutes les représentations irréductibles de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C} . Plus précisément, les S^λ , $\lambda \vdash n$ sont des \mathcal{S}_n -modules irréductibles deux à deux non isomorphes et tout \mathcal{S}_n -module irréductible est isomorphe à l'un d'entre eux.

Pour le démontrer on a besoin de développer une machinerie appropriée. D'abord on aura besoin de l'unique produit scalaire sur M^λ tel que

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}$$

Ce produit scalaire existe car $M^\lambda = \mathbb{C}[\{t_1\}, \dots, \{t_k\}]$, où $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$ est une liste de tous les λ -tabloïdes, donc pour définir le produit scalaire sur M^λ il suffit de le définir pour les λ -tabloïdes $\{t\}$ et $\{s\}$. Notons que ce produit scalaire est \mathcal{S}_n -invariant, car pour $\pi \in \mathcal{S}_n$ on a : $\{t\} = \{s\} \Leftrightarrow \{\pi t\} = \{\pi s\}$.

Lemme 38. Lemme du signe

Soit H un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

1. Si $\pi \in H$, alors

$$\pi H^- = H^- \pi = (\text{sgn } \pi) H^-,$$

d'où $\pi^- H^- = H^-$.

2. Si $u, v \in M^\lambda$, alors

$$\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$$

3. Si la transposition (b, c) appartient à H , alors on peut factoriser H^- par $(e - (b, c))$, c'est-à-dire écrire $H^- = k(e - (b, c))$, où $k \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$.
4. Si t est un tableau, si b et c sont dans la même ligne de t et si $(b, c) \in H$, alors $H^- \{t\} = 0$.

Démonstration.

1. $\pi H^- = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\pi \sigma) \pi \sigma = \sum_{\tau = \pi \sigma \in H} \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\tau) \tau = (\text{sgn } \pi) H^-$ et de même pour $H^- \pi$.
2. Comme $\langle \pi u, \pi v \rangle = \langle u, v \rangle \forall \pi \in \mathcal{S}_n$, on a $\langle H^- u, v \rangle = \langle \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi u, v \rangle = \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi^{-1} v \rangle = \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi^{-1}) \pi^{-1} v \rangle = \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$.
3. Soit K le sous-groupe $\{e, (b, c)\}$ de H . On écrit $H = \bigsqcup_i k_i K$, où $\{k_i\}$ est une transversale de K . Alors on peut factoriser $H^- = \sum_i k_i^- (e - (b, c))$.
4. On a $(b, c)\{t\} = \{t\}$, donc $H^- \{t\} = k(e - (b, c))\{t\} = k(\{t\} - \{t\}) = 0$. \square

Une deuxième chose qui va nous servir est la notion d'ordre sur l'ensemble des partitions de n .

Définition 39. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \vdash n$. On dit que λ domine μ et on écrit $\lambda \supseteq \mu$, si

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

pour chaque $i \geq 1$. (Si $i > l$, on prend $\lambda_i = 0$ et si $i > m$, on prend $\mu_i = 0$.) \supseteq est une relation d'ordre.

Lemme 40. Lemme de domination

Soient t^λ et s^μ deux tableaux de formes λ et μ respectivement. Si pour chaque i les éléments de la i -ème ligne de s^μ sont dans des colonnes différentes de t^λ , alors $\lambda \supseteq \mu$.

Démonstration. On peut permuter les éléments de chaque colonne de t^λ de telle manière que les éléments des lignes $1, 2, \dots, i$ de s^μ soient dans les lignes $1, 2, \dots, i$ de t^λ , d'où $\lambda \supseteq \mu$, car $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$ et $\mu_1 + \dots + \mu_i$ sont les nombres d'éléments dans les lignes $1, 2, \dots, i$ de t^λ et s^μ respectivement. \square

Notons que si $\lambda \supseteq \mu$, alors $\lambda \geq \mu$, où " \geq " signifie l'ordre lexicographique. Démontrons maintenant quelques corollaires du lemme du signe.

Corollaire 41. Soit $\lambda, \mu \vdash n$. Soient $t = t^\lambda$ et $s = s^\mu$ un λ -tableau et un μ -tableau respectivement. Si $k_t\{s\} \neq 0$, alors $\lambda \supseteq \mu$. Si $\lambda = \mu$, alors $k_t\{s\} = \pm \mathbf{e}_t$.

Démonstration. Si b et c sont deux éléments dans la même ligne de s^μ , alors ils sont dans des colonnes différentes de t^λ . Sinon par le lemme du signe on aurait $k_t = k(e - (b, c))$ et $k_t\{s\} = 0$. Donc, d'après le lemme de domination, $\lambda \supseteq \mu$.

Si $\lambda = \mu$, alors $\{s\} = \{\pi t\}$ pour un certain $\pi \in \mathcal{S}_n$ et alors $k_t\{s\} = k_t\pi\{t\} = \pm \mathbf{e}_t$. (La dernière égalité est claire si π est une transposition, donc pour tout $\pi \in \mathcal{S}_n$.) \square

Corollaire 42. Si $u \in M^\mu$ et t est un μ -tableau, alors $k_t u$ est un multiple de \mathbf{e}_t .

Démonstration. On a $u = \sum_i c_i \{s_i\}$ où s_i sont des μ -tableaux. Par ce qui précède, $k_t u = \sum_i \pm c_i \mathbf{e}_t$ \square

Démontrons maintenant le résultat suivant, qui est plus fort que le théorème 37 et qui reste vrai lorsque le corps de base n'est plus \mathbb{C} .

Théorème 43. Théorème du sous-module

Soit U un sous-module de M^μ . Alors soit $U \supseteq S^\mu$, soit $U \subseteq (S^\mu)^\perp$.

Démonstration. Soit $u \in U$, soit t un μ -tableau. Par ce qui précède $k_t u = f \mathbf{e}_t$ où f est un scalaire. Donc s'il existe $u \in U$ et un μ -tableau t tels que $f \neq 0$ (f dépend de u et de t), alors $S^\mu \subseteq U$, car $k_t u \in U$, $\mathbf{e}_t \in U$ et S^μ est cyclique. Sinon, en appliquant le lemme du signe, on aurait pour chaque $u \in U$ et pour chaque μ -tableau t $\langle u, \mathbf{e}_t \rangle = \langle u, \mathbf{e}_t \rangle = \langle k_t u, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle = 0$, d'où $U \subseteq (S^\mu)^\perp$. \square

Pour la suite on se place sur \mathbb{C} .

Proposition 44. Soit $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ non nul. Alors $\lambda \supseteq \mu$ et si $\lambda = \mu$, alors θ est une multiplication par un scalaire.

Démonstration. Comme $\theta \neq 0$, il existe un vecteur \mathbf{e}_t tel que $\theta(\mathbf{e}_t) \neq 0$. On peut prolonger θ à un élément de $\text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$ en posant $\theta((S^\lambda)^\perp) = 0$, ($M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$ sur \mathbb{C}). Alors on a $0 \neq \theta(\mathbf{e}_t) = \theta(k_t\{t\}) = k_t\theta(\{t\}) = k_t(\sum_i c_i \{s_i\})$, où s_i sont des μ -tableaux. Alors, par le corollaire 41 du lemme du signe, $\lambda \supseteq \mu$. Si $\lambda = \mu$, $\theta(\mathbf{e}_t) = c \mathbf{e}_t$ où c est une constante. Donc θ est une multiplication par c sur S^λ , car S^λ est cyclique et

$$\theta(\mathbf{e}_{\pi t}) = \theta(\pi \mathbf{e}_t) = \pi \theta(\mathbf{e}_t) = \pi(c \mathbf{e}_t) = c \mathbf{e}_{\pi t}. \quad \square$$

Maintenant on est prêt à démontrer le théorème 37.

Démonstration du théorème 37. Par le théorème du sous-module, les S^λ sont irréductibles, car $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$ sur \mathbb{C} . Comme leur nombre est égal au nombre de représentations irréductibles de \mathcal{S}_n (à isomorphisme près), il suffit pour conclure de démontrer que $S^\lambda \not\cong S^\mu$ si $\lambda \neq \mu$. Supposons donc $S^\lambda \cong S^\mu$. Comme $S^\mu \subseteq M^\mu$, il existe un homomorphisme $\theta \neq 0$, $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Par la proposition précédente $\lambda \supseteq \mu$. De même $\mu \supseteq \lambda$, donc $\lambda = \mu$. \square

Corollaire 45.

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda, \quad \text{où les } m_{\lambda\mu} \text{ sont des nombres entiers.}$$

2.3 Tableaux standards et base de S^λ

En général, les polytabloïdes qui engendrent S^λ ne sont pas linéairement indépendants. On cherche donc ici à déterminer une sous-famille de polytabloïdes qui forment une base de S^λ .

Définition 46. Un tableau t est dit *standard* si ses lignes et ses colonnes sont croissantes. Dans ce cas, on dit aussi que les tabloïde et polytabloïde correspondants sont standards.

Exemple

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array}$$

est standard, mais

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array}$$

ne l'est pas.

Définition 47. Une *composition de n* est un l -uplet d'entiers strictement positifs :

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$$

tel que $\sum_i \lambda_i = n$. Les entiers $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sont appelés les *parties* de la composition.

On étend de manière évidente les définitions de diagramme de Ferrer et de tableau pour les compositions. La relation de domination s'étend aussi clairement aux compositions.

Définition 48. Soit $\{t\}$ un tabloïde de forme λ , partition de n . Pour tout i entre 1 et n , on définit :

$\{t^i\}$ = le tabloïde formé des éléments de $\{t\}$ inférieurs à i

λ^i = la composition qui est la forme de $\{t^i\}$

Définition 49. Soit $\{s\}$ et $\{t\}$ deux tabloïdes ayant pour suites de compositions λ^i et μ^i , respectivement. On dit que $\{s\}$ domine $\{t\}$ si, pour tout i , $\lambda^i \geq \mu^i$.

Lemme 50. Lemme de domination pour les tabloïdes

Si $k < l$, et si k apparaît dans une ligne en-dessous de l dans $\{t\}$, alors,

$$\{t\} \triangleleft (k, l)\{t\}.$$

Démonstration. Supposons que $\{t\}$ et $(k, l)\{t\}$ ont les suites de compositions λ^i et μ^i . Alors, pour $i < k$ ou $i \geq l$, on a $\lambda^i = \mu^i$.

Étudions maintenant le cas $k \leq i < l$. Si r et q sont les lignes de $\{t\}$ dans lesquelles k et l apparaissent (respectivement), alors :

$$\lambda^i = \mu^i \text{ avec la } q^{\text{e}} \text{ partie diminuée de 1, et la } r^{\text{e}} \text{ augmentée de 1.}$$

Or, par hypothèse, $q < r$, on trouve donc $\lambda^i \triangleleft \mu^i$.

Définition 51. Si $\mathbf{v} = \sum_i c_i \{\mathbf{t}_i\} \in M^\mu$, on dit que $\{\mathbf{t}_i\}$ apparaît dans \mathbf{v} si $c_i \neq 0$.

Proposition 52. Si t est standard, et si $\{\mathbf{s}\}$ apparaît dans \mathbf{e}_t , alors, $\{t\} \geq \{\mathbf{s}\}$.

Démonstration. Écrivons $s = \pi t$, où $\pi \in C_t$, de sorte que $\{\mathbf{t}\}$ apparaît dans \mathbf{e}_t . On raisonne par récurrence sur le nombre d'inversions de colonne dans s , i.e. le nombre de paires $k < l$ dans la même colonne de s telles que k apparaît plus bas que l . Si s n'a pas d'inversion, $s = t$. Ensuite, si (k, l) est une inversion,

$$\{\mathbf{s}\} \triangleleft (k, l)s$$

d'après le lemme précédent. Comme $(k, l)\{s\}$ a moins d'inversions que s , $(k, l)\{s\} \trianglelefteq \{t\}$ ce qui achève la récurrence.

Définition 53. Soit (A, \geq) un ensemble partiellement ordonné. Un élément $b \in A$ est appelé *maximum* si $\forall c \in A, b \geq c$. Un élément b est dit *maximal* s'il n'existe pas de $c \in A$ vérifiant $c > b$.

Lemme 54. Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ des éléments de M^μ . Supposons que, pour chaque \mathbf{v}_i , on puisse choisir un tabloïde $\{\mathbf{t}_i\}$ qui apparaît dans \mathbf{v}_i tel que :

1. $\{\mathbf{t}_i\}$ est maximum dans \mathbf{v}_i
2. les $\{\mathbf{t}_i\}$ sont tous distincts.

Alors, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sont linéairement indépendants.

Démonstration. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que \mathbf{t}_1 est maximal parmi les \mathbf{t}_i . Alors, \mathbf{t}_1 ne peut apparaître que dans \mathbf{v}_1 . Par suite, toute combinaison linéaire :

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m = 0$$

doit vérifier $c_1 = 0$ car il n'y a pas d'autre moyen d'annuler le coefficient de $\{\mathbf{t}_1\}$. On conclut par récurrence.

Théorème 55. La famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ est linéairement indépendante.

Démonstration. Par la proposition 7, $\{t\}$ est maximum dans \mathbf{e}_t , et, par hypothèse, les éléments de \mathcal{F} sont distincts, donc le lemme précédent s'applique.

On veut maintenant montrer que cette famille est une base de S^λ ; il reste donc à prouver qu'elle engendre S^λ .

Définition 56. Soit A et B deux ensembles disjoints d'entiers positifs. On choisit des permutations π telles que :

$$\mathcal{S}_{A \cup B} = \bigsqcup_{\pi} \pi(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B).$$

L'élément de Garnir correspondant est :

$$g_{A,B} = \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) \pi.$$

Définition 57. Soit t un tableau et A et B des parties des colonnes j et $j+1$ respectivement. L'élément de Garnir associé à t (et A, B) est $\sum_{\pi} (\text{sgn } \pi)$, où les π ont été choisis de sorte que les éléments de $A \cup B$ croissent quand on descend les colonnes de πt .

Proposition 58. Soit t , A et B comme dans la définition précédente. Si $|A \cup B|$ est strictement supérieur au nombre d'éléments dans la j^e colonne de t , alors, $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$.

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{S}_{A \cup B}^- \mathbf{e}_t = 0$.

Soit $\sigma \in C_t$, quelconque. D'après les hypothèses, il existe $a, b \in A \cup B$ tels que a et b sont dans la même ligne de σt . Mais alors, $(a, b) \in \mathcal{S}_{A \cup B}$ donc $\mathcal{S}_{A \cup B}^- \{\sigma \mathbf{t}\} = 0$, grâce au lemme du signe. Comme ceci vaut pour tout σ apparaissant dans κ_t , on a bien, $\mathcal{S}_{A \cup B}^- \mathbf{e}_t = 0$.

Or, $\mathcal{S}_{A \cup B} = \bigsqcup_{\pi} \pi(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)$, donc $\mathcal{S}_{A \cup B}^- = g_{A,B}(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)^-$. En substituant dans l'équation précédente, on trouve :

$$g_{A,B}(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)^- \mathbf{e}_t = 0.$$

Mais $(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B) \subset C_t$, donc, pour $\sigma \in \mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B$, par le lemme du signe,

$$\sigma^- \mathbf{e}_t = \sigma^- C_t^- \{\mathbf{t}\} = C_t^- \{\mathbf{t}\} = \mathbf{e}_t.$$

Par suite, $(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)^- \mathbf{e}_t = |\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B| \mathbf{e}_t$ donc $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$.

Définition 59. Soit t un tableau, on définit son *tabloïde colonne* par :

$$[t] = C_t$$

i.e. l'ensemble des tableaux obtenus en réarrangeant les colonnes de t .

La relation de domination colonne pour les tabloïdes s'obtient de manière analogue à la relation de domination ligne (i.e. celle définie précédemment).

Définition 60. Soit t un tableau, on appelle *descente (de ligne)* de t un couple d'entiers (k, l) , $k < l$, tel que k et l sont adjacents dans une ligne de t , k apparaissant après l .

Théorème 61. La famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ engendre S^λ .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si \mathbf{e}_t est engendré par cette famille, alors, \mathbf{e}_s aussi, pour tout $s \in [t]$ (en effet, on a alors $s = \pi t$ où

$\pi \in C_t$, donc $\mathbf{e}_t = (\text{sgn } \pi)\mathbf{e}_s$. Ainsi, on peut supposer que les colonnes de t sont croissantes. L'ensemble partiellement ordonné des tabloïdes colonne admet un élément maximum $[t_0]$, où t_0 s'obtient en numérotant les cases du tableau de haut en bas, en commençant par la colonne la plus à gauche. Comme t_0 est standard, \mathbf{e}_{t_0} est engendré par \mathcal{F} .

Soit maintenant t un tableau quelconque. Par récurrence, on suppose que tout tableau $s \triangleright t$ est engendré par \mathcal{F} . Si t est standard, il n'y a rien à prouver. Sinon, t possède une descente dans une ligne notée i (puisque les colonnes sont croissantes). Notons aussi j et $j+1$ les numéros des colonnes concernées par cette descente, et $a_1 < \dots < a_p$; $b_1 < \dots < b_q$ les entiers qu'elles contiennent, respectivement. On a donc :

$$\begin{array}{cc}
 a_1 & b_1 \\
 & \wedge \\
 a_2 & b_2 \\
 & \wedge \\
 \vdots & \vdots \\
 & \wedge \\
 a_i & > b_i \\
 \wedge & \\
 \vdots & \vdots \\
 \wedge & b_q \\
 a_p &
 \end{array}$$

Prenons $A = \{a_i, \dots, a_p\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_i\}$. L'élément de Garnir associé $g_{A,B}$ vérifie $g_{A,B}\mathbf{e}_t = 0$, donc :

$$\mathbf{e}_t = - \sum_{\pi \neq id} (\text{sgn } \pi)\mathbf{e}_{\pi t}.$$

Enfin, $b_1 < \dots < b_i < a_i < \dots < a_p$ implique que $[\pi t] \triangleright [t]$ pour $\pi \neq id$, grâce à l'analogue colonne du lemme de domination pour les tabloïdes. L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Théorème 62. Résumons les résultats que nous avons obtenus : soit f^λ le nombre de λ -tableaux standards, alors,

1. La famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ est une base de S^λ .
2. $\dim S^\lambda = f^\lambda$
3. $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$

2.4 Représentation naturelle de Young

Les matrices de la représentation S^λ dans la base standard constituent ce qu'on appelle la *représentation naturelle de Young*. Dans cette partie, nous allons montrer comment obtenir ces matrices.

Comme \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions de la forme $(k, k+1)$, il suffit de calculer les matrices correspondant à ces éléments. Pour un tableau t donné, il y a trois possibilités :

1. Si k et $k+1$ sont dans la même colonne, alors $(k, k+1) \in C_t$ puis $(k, k+1)\mathbf{e}_t = -\mathbf{e}_t$.
2. Si k et $k+1$ sont dans la même ligne, alors $(k, k+1)t$ a une descente dans cette ligne. On calcule donc $(k, k+1)$ à l'aide des éléments de Garnir : $(k, k+1)\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t + \text{d'autres polytabloïdes } \mathbf{e}_{t'}$, avec $[t'] \triangleright [t]$.
3. Si k et $k+1$ ne sont ni dans la même ligne, ni dans la même colonne, alors $t' = (k, k+1)t$ est standard et $(k, k+1)\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{t'}$.

Le \mathbf{e}_t dans la somme du deuxième cas provient du terme $(k, k+1)$ dans l'élément de Garnir. Bien que nous n'ayons pas d'expression immédiate des autres polytabloïdes comme combinaisons linéaires de polytabloïdes standards, une application itérée de ces trois cas permet de les calculer.

2.5 La décomposition de M^μ

Le but de ce paragraphe est de développer la méthode combinatoire qui permet de calculer les multiplicités $m_{\lambda\mu}$ de S^λ dans M^μ dans la décomposition $M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$. Pour cela, on introduit quelques nouveaux objets.

Définition 63. *Un tableau de Young généralisé T de forme λ est obtenu à partir du diagramme de Ferrer de forme λ en remplaçant les cases par des entiers, avec répétitions possibles. Le contenu de T est une composition de n , $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, où μ_i est le nombre de répétitions de i dans T . On appellera désormais *tableau simple* un tableau de Young non généralisé.*

Par exemple le tableau $T = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & \end{array}$ est de forme $(3, 2)$ et de contenu $(1, 0, 2, 2)$.

Notons $\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \{T \mid T \text{ est de forme } \lambda \text{ et de contenu } \mu\}$.

On définit la classe d'équivalence $\{T\}$ de la même façon que dans le cas

des tableaux simples. Notons qu'un tableau de Young généralisé de forme λ et de contenu (1^n) n'est rien d'autre qu'un tableau de Young simple de forme λ . De manière générale, si t est un tableau et T est le tableau généralisé de même forme λ , alors on note $T(i)$ l'élément de T qui est dans la même position que i dans t . Par exemple, si

$$T = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & \end{array}, \quad t = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & \end{array}, \quad \text{alors } T = \begin{array}{ccc} T(1) & T(3) & T(5) \\ T(4) & T(2) & \end{array},$$

où $T(1) = T(5) = 4$, $T(2) = T(4) = 3$ et $T(3) = 1$.

Dans la suite on suppose qu'on a fixé un tableau t de forme λ , et donc on note $T(i)$ les éléments de tout tableau généralisé T de même forme. Maintenant, à chaque tabloïde $\{s\}$ on va associer un tableau généralisé T , de sorte que la forme de $\{s\}$ soit le contenu de T : si $\{s\}$ est un tabloïde de forme μ , posons $T(i)$ le numéro de la ligne de $\{s\}$ où i apparaît. Par exemple, si $\mu = (2, 2, 1)$,

$$s = \begin{array}{cc} \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{5} \\ \underline{2} & \end{array}, \quad T = \begin{array}{ccc} T(1) & T(3) & T(5) \\ T(4) & T(2) & \end{array}, \quad \text{alors } T = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & \end{array}$$

Comme le nombre de répétitions de i est égal au nombre d'éléments dans la i -ème ligne de $\{s\}$, le contenu de T est égal à μ . Notons que l'application ainsi définie $\theta : \{s\} \mapsto T$ est une bijection entre les bases de M^μ et de $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$. L'application inverse associe à T donné un tabloïde $\{s\}$ tel que la i -ème ligne de $\{s\}$ contienne les éléments j tels que $T(j) = i$.

Définissons une structure de \mathcal{S}_n -module sur $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ en posant $\pi T(i) \stackrel{\text{def}}{=} T(\pi^{-1}i)$.

Proposition 64. $M^\mu \cong \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ en tant que \mathcal{S}_n -modules, où λ est une partition fixée.

Démonstration. On doit vérifier que $\theta(\pi\{s\}) = \pi T$. Or $\theta(\pi\{s\})(i)$ est le numéro de la ligne de $\pi\{s\}$ où i apparaît, i.e. le numéro de la ligne de $\{s\}$ où $\pi^{-1}i$ apparaît, i.e. $T(\pi^{-1}i)$, donc $\theta(\pi\{s\})(i) = T(\pi^{-1}i) = \pi T(i)$. \square

Dans la suite on identifie M^μ et $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$.

Rappelons que la multiplicité de S^λ dans M^μ est égale à $\dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Pour calculer cette dimension on va construire une base de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$.

Définition 65. Soit t un λ -tableau fixé, $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$. Le morphisme correspondant à T est l'application $\theta_T \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$ donnée par

$$\theta_T(g\{t\}) = g\left(\sum_{S \in \{T\}} S\right).$$

Pour obtenir un élément de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ on considère $\overline{\theta_T}$, la restriction de θ_T à S^λ . Alors pour le tableau fixé t on a :

$$\overline{\theta_T}(\mathbf{e}_t) = \overline{\theta_T}(k_t\{t\}) = k_t(\theta_T\{t\}) = k_t\left(\sum_{S \in \{T\}} S\right).$$

Proposition 66. Soit t un λ -tableau fixé, $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$. Alors $k_t T = 0$ si et seulement si T possède deux éléments égaux dans la même colonne.

Démonstration. Si $k_t T = 0$, alors $T + \sum_{\substack{\pi \in C_t \\ \pi \neq e}} (\text{sgn}(\pi))\pi T = 0$, donc il existe $\pi \in \mathcal{S}_n$

tel que $\text{sgn}(\pi) = -1$ et $T = \pi T$. Alors les éléments correspondant aux cycles non triviaux de π sont tous égaux et sont tous dans la même colonne.

Pour la réciproque supposons que $T(i) = T(j)$, où $T(i)$ et $T(j)$ sont dans la même colonne de T . Alors par le lemme du signe on peut factoriser :

$$k_t T = k(e - (i, j))T = k(T - T) = 0. \quad \square$$

Ce résultat nous permet d'introduire la notion de tableau semistandard de la manière naturelle suivante.

Définition 67. Un tableau de Young généralisé est dit *semistandard* si les éléments de ses lignes sont croissants et les éléments de ses colonnes sont strictement croissants. On note $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ l'ensemble des tableaux semistandard de forme λ et de contenu μ .

Proposition 68. L'ensemble $\{\overline{\theta_T} \mid T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ est une base de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$.

La preuve de cette proposition utilise les mêmes idées que dans le cas de S^λ , on l'omet.

Maintenant on peut calculer les multiplicités $m_{\lambda\mu}$ de S^λ dans M^μ dans la décomposition $M^\mu = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$ en utilisant une méthode combinatoire.

Définition 69. Les nombres de *Kostka* sont

$$K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|.$$

Théorème 70. Loi d'Young

La multiplicité de S^λ dans M^μ est égale au nombre de tableaux semistandard de forme λ et de contenu μ , i.e.

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} K_{\lambda\mu} S^\lambda.$$

Donnons quelques exemples.

1. Soit $\mu = (3, 1, 1)$. Alors pour $\lambda \supseteq \mu$ on a toutes les partitions λ possibles et les tableaux généralisés semistandard associés :

$$\lambda = (3, 1, 1) : T = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & 2 \\ & & 3 \end{array}$$

$$\lambda = (3, 2) : T = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 3 \end{array}$$

$$\lambda = (4, 1) : T = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & & 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad T = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{array}$$

$$\lambda = (5) : T = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\text{D'où } M^{(3,1,1)} = S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$$

2. Pour chaque μ on a $K_{\mu\mu} = 1$. Or le seul tableau généralisé semistandard de forme μ et de contenu μ est le tableau avec tous les éléments de la i -ième ligne égaux à i .

2.6 Loi de la ramification ("Branching rule")

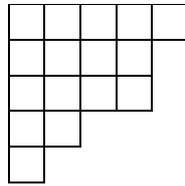
Pour le groupe symétrique \mathcal{S}_n la liste de toutes les représentations irréductibles est $\{S^\lambda, \lambda \vdash n\}$. Il est assez naturel de regarder les représentations induites ou restreintes. D'abord on introduit la notion de restriction et d'extension pour les diagrammes.

Soit t un diagramme de Ferrer de forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. On note

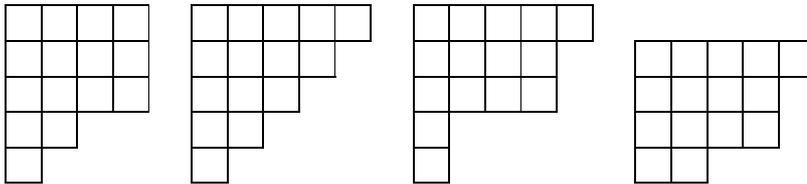
1. (i, j) la case de t à la i -ième ligne et la j -ième colonne,
2. $t - (i, j)$ le tableau obtenu à partir de t en supprimant l'élément (i, j) ,
3. $t + (i, j)$, $(i, j) \notin t$ le tableau obtenu à partir de t en ajoutant un élément à la i -ième ligne et la j -ième colonne.

Définition 71. Soit t un diagramme de Ferrer de forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Le coin $(i, j) \in t$ de ce diagramme est dit *intérieur* si $t - (i, j)$ est encore un diagramme de Ferrer (i.e. la suite des nombres des éléments dans les lignes $1, 2 \dots l$ est décroissante). Le coin $(i, j) \notin t$ de ce diagramme est dit *extérieur* si $t + (i, j)$ est encore un diagramme de Ferrer. On note λ^- et λ^+ les partitions correspondantes à $t - (i, j)$ et $t + (i, j)$ respectivement. Pour indiquer que la partition λ^- est obtenue à partir de λ , on écrira $\lambda^- \leftarrow \lambda$. De même, on écrira $\lambda^+ \leftarrow \lambda$.

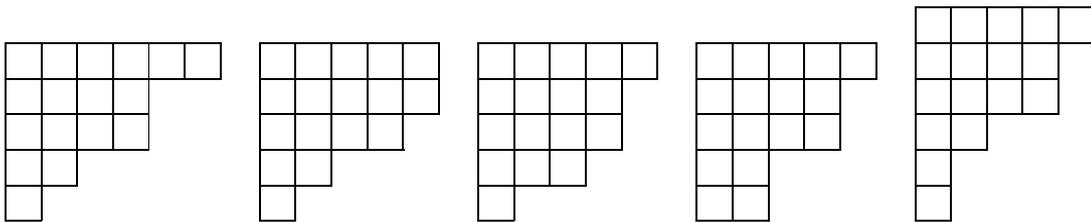
Par exemple, si $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$, on a le diagramme suivant



Les coins intérieurs sont $(1, 5), (3, 4), (4, 2)$ et $(5, 1)$. On a les diagrammes ainsi obtenus :



Les coins extérieurs sont $(1, 6), (2, 5), (4, 3), (5, 2)$ et $(6, 1)$. On a les diagrammes ainsi obtenus :



Théorème 72. "Branching rule"

Soit $\lambda \vdash n$. Alors,

1. $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{\mathcal{S}_n} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-}$
2. $S^\lambda \uparrow_{S_n}^{\mathcal{S}_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$

Ce résultat permet de comprendre la structure de \mathcal{S}_n -module S^λ . En particulier, il contient tous les S^{λ^-} sans multiplicités. Avant de donner la preuve du théorème 72 démontrons quelques résultats préliminaires.

Lemme 73. Soit $f^\lambda = \dim S^\lambda$, soit $f^{\lambda^-} = \dim S^{\lambda^-}$, $\lambda^- \hookrightarrow \lambda$. Alors,

$$f^\lambda = \sum_{\lambda^- \hookrightarrow \lambda} f^{\lambda^-}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t, t \text{ est standard}\}$ est une base de S^λ , f^λ est égal au nombre de tableaux standards de forme λ . Chaque tableau standard t contient n dans un de ses coins intérieurs (i_t, j_t) (car les éléments de ses lignes et de ses colonnes sont croissants). Notons que le tableau $t - (i_t, j_t)$ est un tableau standard de la forme λ^- correspondante. Donc donner un tableau standard t de forme λ est équivalent à donner un coin intérieur (i_t, j_t) du diagramme de Ferrer correspondant à λ et un tableau standard t' de forme λ^- . Le résultat en découle. \square

Lemme 74. Soit V un G -module, soit W un sous-module de V (i.e. stable par l'action de G). Alors,

$$V \cong W \oplus (V/W),$$

où V/W est l'espace quotient.

Démonstration. V/W est effectivement un G -module pour l'action $g[v] \stackrel{\text{def}}{=} [gv]$, où $g \in G$, $[v] \in V/W$ est une classe de $v \in V$ (cette action est bien définie car W est un sous-module de V).

Comme V n'est pas irréductible, il existe un sous-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$. Soit $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ une base de W , soit $\epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_m$ une base de W' . Alors $[\epsilon_{k+1}], \dots, [\epsilon_m]$ est une base de V/W , d'où $V/W \cong W'$ et $V \cong W \oplus (V/W)$. \square

Démonstration du théorème 72.

1. Supposons que les coins intérieurs de λ apparaissent dans les lignes $r_1 < r_2 < \dots < r_k$ et dans les colonnes $c_1 < c_2 < \dots < c_k$. Notons $t^i = t - (r_i, c_i)$, et λ^i la partition correspondante. On veut montrer que

$$S^\lambda \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}^{\mathcal{S}_n} \cong \bigoplus_{i=1}^k S^{\lambda^i}.$$

D'après le lemme 74, il suffit de construire une chaîne de sous-espaces $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^k = S^\lambda$ avec $V^i \setminus V^{i-1} \cong S^{\lambda^i}$ en tant que \mathcal{S}_{n-1} -modules, $1 \leq i \leq k$.
Soit V^i l'espace vectoriel de base

$$\{\mathbf{e}_t\}, n \text{ n'apparaît que dans les lignes } r_1, \dots, r_i \text{ de } t.$$

Montrons que les V^i conviennent.

Pour chaque i , $1 \leq i \leq k$, considérons les applications $\theta_i : M^\lambda \rightarrow M^{\lambda^i}$,

$$\theta_i(\{t\}) = \begin{cases} \{t^i\} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i \text{ de } \{t\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On étend θ_i par linéarité sur tout M^λ .

Notons que \mathcal{S}_{n-1} agit sur l'ensemble des tableaux de forme λ , $\lambda \vdash n$ en permutant les éléments $1, \dots, n-1$. Donc \mathcal{S}_{n-1} ne change pas la position de n dans un tableau, d'où θ_i est un \mathcal{S}_{n-1} -homomorphisme.

De plus, $V^{(i-1)} \subseteq \ker \theta_i$.

Soit $t \in V^{(i)}$ standard. Regardons $V^{(i)}$ comme un \mathcal{S}_{n-1} -module. Comme $\mathbf{e}_t = k_t \{t\}$, (où $k_t = C_t^-$, C_t est le stabilisateur des lignes de t ($C_t \subset \mathcal{S}_{n-1}$)), pour chaque tabloïde apparaissant dans \mathbf{e}_t , n n'apparaît que dans la j -ième ligne avec $j \leq i$. De plus, la position de n dans chaque tabloïde apparaissant dans \mathbf{e}_t est la même et ne dépend que de t . D'où

$$\theta_i(\mathbf{e}_t) = \begin{cases} \mathbf{e}_{t^i}, & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i \text{ de } t \\ 0, & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_j \text{ de } t, j < i \end{cases}$$

Donc θ_i envoie une base de $V^{(i)}$ sur une base de S^{λ^i} surjectivement. D'où $\theta_i V^{(i)} = S^{\lambda^i}$.

Comme $V^{(i-1)} \subseteq \ker \theta_i$, on peut construire une chaîne

$$\{0\} = V^0 \subseteq V^1 \cap \ker \theta_1 \subseteq V^1 \subseteq V^2 \cap \ker \theta_2 \subseteq V^2 \subseteq \dots \subseteq V^k = S^\lambda$$

De plus, $\dim S^\lambda = \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} + \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}}$.

Puisque $\theta_i V^{(i)} = S^{\lambda^i}$, on a l'égalité des dimensions :

$$\dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} = \dim \theta_i V^{(i)} = f^{\lambda^i}$$

D'après le lemme 73, $f^\lambda = \dim S^\lambda = \sum_{i=1}^k f^{\lambda^i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim S^\lambda &= \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} + \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \\ &= \sum_{i=1}^k f^{\lambda^i} + \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \\ &= \dim S^\lambda + \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}}. \end{aligned}$$

D'où $V^{(i)} \cap \ker \theta_i = V^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, k$. Donc on a bien une chaîne $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^k = S^\lambda$ avec

$$\frac{V^i}{V^{i-1}} \cong \frac{V^i}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} \cong S^{\lambda^i}$$

2. On démontre cette partie à l'aide de la machinerie développée pour les caractères. Soit $S^{\lambda \uparrow \mathcal{S}_n} \cong \bigoplus_{\mu \vdash n+1} m_\mu S^\mu$. Alors $\chi^\lambda \uparrow \mathcal{S}_n \cong \sum_{\mu \vdash n+1} m_\mu \chi^\mu$.

Donc pour calculer les m_μ on peut utiliser l'orthogonalité des caractères et la loi de la réciprocity de Frobenius. On a

$$\begin{aligned} m_\mu &= \langle \chi^\lambda \uparrow \mathcal{S}_n, \chi^\mu \rangle = \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \downarrow \mathcal{S}_n \rangle = [\text{d'après la partie 1}] = \langle \chi^\lambda, \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \rangle = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda = \mu^- \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = [\text{par définition de } \mu^- \text{ et de } \lambda^+] = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \lambda^+ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

3 La formule des crochets

Il existe une méthode très simple pour calculer f^λ (nombre de λ -tableaux standards), et c'est ce que nous allons étudier dans cette partie.

Définition 75. Si $v = (i, j)$ est un noeud dans le diagramme de λ , le *crochet* correspondant est :

$$H_v = H_{i,j} = \{(i, j') \mid j' \geq j\} \cup \{(i', j) \mid i' \geq i\}.$$

La *longueur* du crochet est $h_v = h_{i,j} = |H_{i,j}|$.

Théorème 76. Formule des crochets

Si $\lambda \vdash n$, alors :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}.$$

Pour prouver ce théorème, on définit un algorithme (probabiliste) de construction d'un λ -tableau standard, dont on montrera qu'il donne un λ -tableau standard P quelconque avec probabilité :

$$\text{prob}(P) = \frac{\prod h_{i,j}}{n!}.$$

Ceci prouve le théorème, puisque la distribution est uniforme. L'algorithme est le suivant :

Prendre un noeud $v \in \lambda$ avec une probabilité $\frac{1}{n}$.

Tant que v n'est pas un coin intérieur **faire**

Prendre un noeud $\bar{v} \in H_v - \{v\}$ avec une probabilité $\frac{1}{(h_v-1)}$.

$v := \bar{v}$

fait

Mettre n dans le coin auquel on est arrivé.

Recommencer l'algorithme au début avec $\lambda := \lambda - \{v\}$ et $n := n - 1$ jusqu'à ce que toutes les cases de λ soient remplies.

Définition 77. La suite de noeuds par lesquels on passe lors d'un passage dans la boucle intérieure de l'algorithme est appelée un *passage*.

Proposition 78. L'algorithme précédent produit un tableau standard P de forme λ avec une probabilité $\frac{\prod_{v \in \lambda} h_v}{n!}$.

Démonstration. Il est clair que l'algorithme produit un λ -tableau standard. Pour montrer que tous les tableaux sont obtenus avec la même probabilité, on raisonne par récurrence sur n .

Soit P un λ -tableau, w la case contenant n , et \bar{P} le tableau obtenu en supprimant w de P (de forme $\bar{\lambda}$). On a alors :

$$\text{prob}(P) = \text{prob}(w) \text{prob}(\bar{P})$$

où $\text{prob}(w)$ est la probabilité qu'un passage se termine sur w . Par récurrence, il suffit de montrer que :

$$\text{prob}(w) = \frac{\prod_{v \in \lambda} h_v / n!}{\prod_{\bar{v} \in \bar{\lambda}} h_{\bar{v}} / (n-1)!}.$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{prob}(w) &\stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \prod_{v \in W} \frac{h_v}{h_v-1} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \prod_{v \in W} \left(1 + \frac{1}{h_v-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } W &= \{v \neq w \mid w \in H_v\} \\ &= \{v \neq w \mid v \text{ est dans la même ligne ou dans la même colonne que } w\}. \end{aligned}$$

Notons (α, β) les coordonnées de w , et posons $a_i = h_{i,\beta} - 1$ et $b_j = h_{\alpha,j} - 1$. En injectant dans l'équation précédente, on trouve :

$$\text{prob}(w) = \text{prob}(\alpha, \beta) \stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \prod_{j=1}^{\beta-1} \left(1 + \frac{1}{b_j}\right) \quad (*)$$

Pour interpréter les termes de cette équation, on définit, pour un passage qui se termine en (α, β) , la *projection horizontale* du passage par :

$$I = \{i \neq \alpha \mid v = (i, j) \text{ pour un certain } v \text{ dans le passage}\}.$$

On définit de même la *projection verticale*. Notons $\text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta)$ la probabilité d'arriver en (α, β) après un passage de projections horizontale et verticale I et J respectivement. On a donc $\text{prob}(\alpha, \beta) = \sum_{I,J} \text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta)$.

Pour obtenir $(*)$ (donc la proposition puis la formule des crochets), il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 79. Soit (α, β) , $I = \{i_1, \dots\}$ et $J = \{j_1, \dots\}$. Alors,

$$\text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \prod_{i \in I} \frac{1}{a_i} \prod_{j \in J} \frac{1}{b_j}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que I ou J est vide. Par exemple, $J = \emptyset$. Alors, le seul passage possible est

$$v_1 = (i_1, \beta), v_2 = (i_2, \beta), \dots$$

donc $\text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta) = \frac{1}{na_{i_1}a_{i_2}\dots}$ et le résultat est vrai.

Supposons maintenant $I, J \neq \emptyset$. Alors, $v_1 = (i_1, j_1)$, et il y a exactement deux possibilités pour v_2 à savoir (i_2, j_1) et (i_1, j_2) (en posant $i_2 = \alpha$ si $|I| = 1$ et de même pour j_2). Soit $\bar{I} = I - \{i_1\}$ et $\bar{J} = J - \{j_1\}$. Alors, par récurrence sur $|I \cup J|$,

$$\begin{aligned} \text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{h_{i_1, j_1} - 1} [\text{prob}_{\bar{I}, J}(\alpha, \beta) + \text{prob}_{I, \bar{J}}(\alpha, \beta)] \\ &= \frac{1}{h_{i_1, j_1}} \left[\frac{1}{n \hat{a}_{i_1} a_{i_2} \dots b_{j_1} b_{j_2} \dots} + \frac{1}{n a_{i_1} a_{i_2} \dots \hat{b}_{j_1} b_{j_2} \dots} \right] \\ &= \frac{a_{i_1} + b_{j_1}}{h_{i_1, j_1}} \left[\frac{1}{n a_{i_1} a_{i_2} \dots b_{j_1} b_{j_2} \dots} \right] \end{aligned}$$

où le symbole $\hat{}$ signifie que le terme est omis.

Or,

$$h_{i_1, j_1} - 1 = (h_{i_1, \beta} - 1) + (h_{\alpha, j_1} - 1) = a_{i_1} + b_{j_1}$$

ce qui achève la preuve. □

4 Conclusion

Nous avons donc établi une correspondance (canonique) entre les classes de conjugaison de \mathcal{S}_n et ses représentations irréductibles sur le corps des complexes. De plus nous avons montré une utilisation simple de la construction des modules de Specht pour calculer facilement les dimensions de ces représentations.

5 Bibliographie

- [1] B.E Sagan, *The Symmetric Group.* , Springer, 2001
- [2] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis.* , Hermann, 1967

Nous tenons également à remercier ici Thierry Lévy pour sa disponibilité et pour sa relecture attentive de ce mémoire.