Schéma des G-fragments d'une variété irréductible

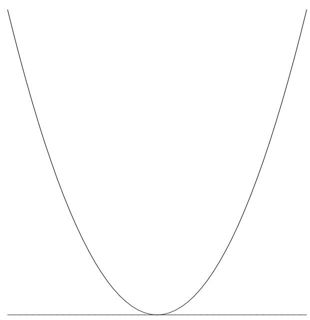
Laurent Demonet
sous la direction de Raphaël Rouquier

On se place ici pour simplifier dans $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})^\dagger$, autrement dit $\mathbb{C}^2$ muni de sa structure naturelle de variété algébrique. On rappelle qu'un fermé de Zariski de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points d'annulation d'un idéal I de $\mathbb{C}[X,Y]$ et sera noté $V(I)$. L'ensemble des ouverts définis comme complémentaires des fermés de Zariski est alors une topologie. L'ensemble des fonctions considérées sur un tel ouvert est l'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{C}(X,Y)$ qui n'ont pas de singularité sur cet ouvert.

1 Notion de sous-schéma fermé, de sous-schéma fermé non réduit

D'un point de vue purement ensembliste, on a $V(X) = V(X^2) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{C}\}$. D'un point de vue algébrique, on introduit la notion de sous-schéma d'une variété en gardant la trace du fait que l'idéal de départ pouvait être non réduit. Ainsi, si I est un idéal de $\mathbb{C}[X,Y]$, on munira $V(I)$ de la structure de variété correspondant à l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/I$. De cette manière, $V(X)$ est $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ tandis que $V(X^2)$, bien qu'ayant la même topologie que $A^1(\mathbb{C})$, est muni d'un anneau de fonctions plus gros qui contient une fonction X non nulle mais nilpotente. D'un point de vue intuitif, ce sous-schéma représente l'axe des ordonnées légèrement épaissi, ou compté avec une multiplicité deux si l'on veut.

Exemple :



Si l'on intersecte les sous-schémas réduits $V(Y)$ et $V(Y-X^2)$, on obtient d'un point de vue algébrique $V(Y, Y-X^2) = V(Y, X^2)$ qui n'est pas réduit : le point 0 est compté avec multiplicité 2 ; l'anneau des fonctions sur cette variété est $\mathbb{C}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$.

†Le but de cette partie étant de donner un aperçu succinct de mon sujet de DEA, les notions de géométrie algébrique ne peuvent être rappelées de manière exhaustive ; de ce fait, le lecteur voulant plus de détails sur les constructions dont on parle pourra se référer par exemple à [1].

2 Quotient et orbite

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Il agit linéairement sur la variété algébrique $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Le quotient $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})/G$ est alors naturellement muni d'une structure de variété algébrique, la topologie étant la topologie quotient et les fonctions définies sur un ouvert de cette topologie étant images des fonctions G-stables définies sur l'image réciproque de cet ouvert par la projection. Ce quotient est un quotient catégorique.

Ce quotient paramètre les orbites **réduites** de $\mathbb{C}^2$ sous l'action de G. Par exemple, si l'on fait agir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^2$ par symétrie centrale, on obtient un cône. En particulier, on voit que dans des cas très simples, il apparaît des singularités.

Le but par la suite va être d'introduire une notion plus précise que les orbites, les G-fragments[†] et de définir une structure de variété sur l'ensemble de ces G-fragments. En dimension 2, cette variété sera une résolution minimale des singularité du quotient.

3 G-fragments

À chaque orbite, on peut associer une représentation linéaire de dimension finie de G : l'espace vectoriel des fonctions sur cette orbite muni de l'action naturelle de G. Dans le cas d'une orbite où G agit librement, on obtient la représentation régulière $\mathbb{C}[G]$. Remarquons par ailleurs que l'union des orbites sur lesquelles G agit librement forme un ouvert de Zariski.

Autrement dit, la propriété pour une orbite d'avoir un anneau de fonction isomorphe en tant que représentation de G à $\mathbb{C}[G]$ est en quelque sorte générique. Il est donc naturel d'essayer de paramétrer tous les objets ayant cette propriété et de regarder la relation de la variété obtenue avec le quotient.

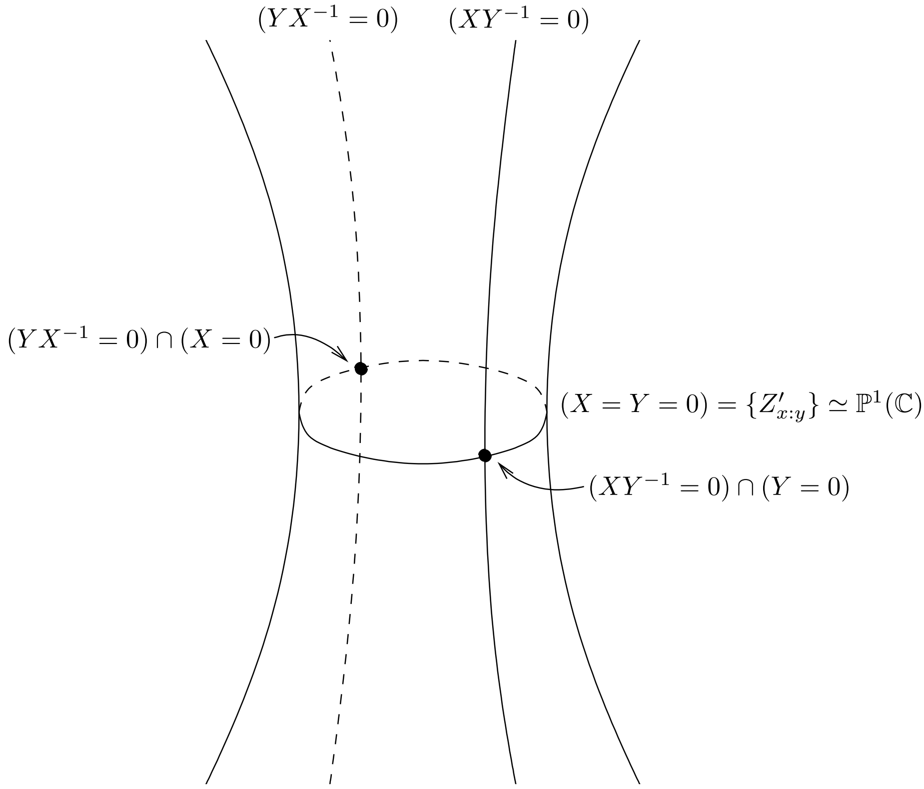
On appellera G-fragment de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ un sous-schéma fermé G-stable de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ tel que la représentation de G associée soit isomorphe à $\mathbb{C}[G]$. À chacun de ces G-fragments correspondra naturellement une orbite en prenant le sous-schéma réduit correspondant (ou de manière équivalente en prenant l'ensemble des points de ce sous-schéma)[‡].

Exemple :

Dans le cas où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par antipodie, le seul cas problématique est celui de l'orbite en 0. Cette orbite correspond à une infinité de G-fragments, les $V(X^2, Y^2, XY, \alpha X - \beta Y)$ pour $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D'un point de vue intuitif, chacun de ces G-fragments représente une direction en 0, ou encore une limite d'orbites selon une direction.

[†] G-clusters en anglais.

[‡] Ceci est une proposition de mon mémoire de DEA, assez intuitive par ailleurs.



L'objectif est maintenant de paramétrer les G-fragments de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ par une variété, autrement dit de mettre une structure de variété sur l'ensemble des G-fragments. Un moyen de faire ceci existait déjà en utilisant les schémas de Hilbert[†]. Le but ici est de faire une construction plus directe. La difficulté est donc de choisir les fonctions de $\mathbb{C}(X, Y)$ qui seront définies en chaque G-fragment de manière à avoir un morphisme d'évaluation naturel[‡].

4 Fonctions définies en chaque G-fragment

Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X, Y]$ correspondant à un G-fragment. On peut tout d'abord définir en ce G-fragment tout élément de $\mathbb{C}(X, Y)$ qui est G-stable et qui est effectivement défini en chaque point de l'orbite correspondant à ce G-fragment. Le problème est que dans ce cas en tous les G-fragments correspondant à une même orbite seront définies les mêmes fonctions. Ce n'est pas acceptable d'un point de vue algébrique[††]. D'autre part, d'un point de vue intuitif, on aimerait que la fonction X/Y soit définie en $V(XY, X - Y)$ car cette fonction admet une « limite » dans la direction de ce G-fragment.

[†] On peut regarder par exemple [3] ou [4]

[‡] On peut en effet démontrer que cela induit une structure qui sous certaines conditions sera bien une structure de variété.

[††] Il existe en géométrie algébrique une notion de séparation d'une variété différente de la notion topologique (mais similaire d'un point de vue catégorique : voir [1] par exemple). Si les mêmes fonctions sont définies en deux points, cela veut dire que les morphismes d'évaluation vont être les mêmes, que ces deux points appartiendront exactement aux mêmes ouverts et la variété ne sera pas séparé. D'une façon imagée, on peut penser l'un des deux points comme un artefact de l'autre.

Ce point est assez difficile à résoudre, surtout si l'on veut généraliser ces notions dans le cas d'une variété irréductible quelconque, ce qui est le cas dans le mémoire. La définition retenue a été finalement de prendre l'algèbre des fonctions engendrée sur $\mathbb{C}$ par les fonctions G-stables de la forme i/φ avec $i \in I$ et $\varphi \notin I$.

Ceci permet de définir une structure de faisceau sur l'ensemble des G-fragments. Mais cela ne suffit pas a priori à définir une structure de variété puisqu'une variété doit être localement affine[†] en particulier et l'on doit avoir un morphisme d'évaluation[‡].

Dans mon mémoire, j'ai étudié deux familles d'exemples pour lesquelles cette définition convient bien. Dans ce cas, la variété obtenue est isomorphe au G-schéma de Hilbert. Je n'ai pas résolu le problème dans le cas d'une variété irréductible quelconque. On peut conjecturer que, quitte à rajouter quelques hypothèses, de lissité par exemple, on obtiendra toujours une variété. Par ailleurs, on peut conjecturer que l'on construit ainsi le schéma réduit correspondant au G-schéma de Hilbert[††].

5 Les exemples traités dans le mémoire

Dans le mémoire, les cas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et I_{2n} ont été traité, sachant que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agit par $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}$ où ω est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité et I_{2n} est engendré par $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}$ où ω est une racine primitive $2n^{\text{ième}}$ de l'unité et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les G-fragments de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ correspondant à l'orbite en 0 forment $n-1$ copies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en formant une « chaîne ». En ce qui concerne le cas de I_{2n}, on trouve n copies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ formant une chaîne et deux autres copies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ reliées à la dernière copie de la chaîne.

Dans le premier cas, le principal outil pour effectuer les démonstrations est l'existence d'une valuation spécifique à chaque G-fragment sur $\mathbb{C}(X,Y)$ qui permet de détecter les fonctions définies en chaque point.

Si l'on se place dans le cas décrit plus haut de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la valuation de Y/X sera :
- -1 en le G-fragment $V(X, Y^2)$;
- 1 en le G-fragment $V(X^2, Y)$;
- 0 en tous les autres G-fragments correspondant à l'orbite en 0.

Malheureusement, je n'ai pas réussi à généraliser cette technique dans le cas de variétés plus générales.

Dans le second cas, on peut en fait effectuer la construction en deux temps en commençant par faire agir $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. D'un point de vue combinatoire, il est alors simple d'interpréter ce qui se passe en 0 : on a en effet « plié en deux » les $2n-1$ copies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ présentes dans le cas

[†] C'est-à-dire être réunions d'ouverts, parfois appelés cartes, isomorphes à des fermés de $\mathbb{A}^k(\mathbb{C})$ (cette définition n'est pas la plus générale, mais elle permet de comprendre l'esprit).

[‡] Ceci est en fait conséquence du premier point.

[††] En effet, cette construction ne peut pas amener des fonctions nilpotentes alors que dans des cas compliqués, le G-schéma de Hilbert peut en avoir.

$\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ puis, les points fixes de la copie du milieu lors de ce « pliage » se sont traduits par deux singularités qui ont été remplacées par deux copies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

6 Quelques applications (non développées ici)

On peut citer au moins deux utilisations du G-schéma de Hilbert, et donc possiblement du schéma des G-fragments. Tout d'abord, c'est une résolution minimale des singularités du quotients. Autrement dit, c'est en quelque sorte la plus petite variété lisse qui se surjecte sur le quotient. Par ailleurs, cette construction apparaît naturellement dans le cas de la correspondance de McKay qui fait correspondre aux copies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui apparaissent en 0 ici les représentations de dimension finie irréductibles non triviales de G[†]. On voit en effet apparaître le diagramme de Dynkins de G.

Références

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer.

[2] D. Eisenbud, J Harris, *The Geometry of Schemes*, GTM **192**, Springer.

[3] L. Göttsche, *Hilbert schemes of zero-dimensional subschemes of smooth varieties*, LNM **1572**, Springer.

[4] Y. Ito, I. Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, New trends in algebraic geometry, Cambridge university press (1999), 151-233.

[5] D. Bessis, C. Bonnafé, R. Rouquier, *Extensions de groupes de réflexion*, Math. Annalen **323** (2002), 405-436.

[6] T. Bridgeland, A. King, M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535-554.

[7] Y. Ito, *Special McKay correspondance*, Séminaires et congrès SMF **6** (2002), 213-225.

[†]Voir par exemple [7] ou [6].