Description du défaut de compacité dans l'injection de Sobolev

Charles Dennery, Thomas Leblé
Sous la direction de Jean-Marc Delort

Juin 2010

1 Présentation

1.1 Espaces de Sobolev

Soit d un entier positif, la dimension de l'espace ambiant. Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ sont l'ensemble des fonctions $L^p(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées d'ordre au plus m au sens des distributions se représentent encore par une fonction $L^p(\mathbb{R}^d)$. Par exemple, $W^{1,p}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telles qu'il existe $g_1, \dots, g_d$ des fonctions $L^p(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tout indice i :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \partial_i \phi = -\int_{\mathbb{R}^d} g_i \phi, \text{ pour tout } \phi \text{ dans } C_c^1(\mathbb{R}^d).$$

On munit $W^{m,p}$ de la norme égale à la somme des normes L^p de ses dérivées successives, qui en fait un espace de Banach :

$$||f||_{W^{m,p}} = ||f||_{L^p} + \sum_{\alpha, 1 \leq |\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha f||_{L^p}$$

Les espaces $H^m = W^{m,2}$ sont des espaces de Sobolev particuliers, car leur norme découle du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} + \sum_{\alpha, 1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha f \times \overline{\partial^\alpha g}$$

Dans la suite, on étudiera des espaces de Sobolev plus généraux, où l'ordre de dérivation m n'est pas nécessairement un entier. Pour étendre la définition, remarquons que si f est une fonction suffisamment régulière pour que l'on puisse considérer sa transformée de Fourier (par exemple si f est dans l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ telles que toutes les dérivées successives décroissent plus vite en norme que n'importe quel polynôme quand $|x|$ tend vers $+\infty$[1]), la norme sur H^1 se réécrit à l'aide de la transformée de Fourier de f :

$$||f||_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 + \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i f|^2 = (2\pi)^{-d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 + \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_i|^2 |\hat{f}|^2 \right)$$

$$||f||_{H^1} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Par analogie, pour s positif on définit l'espace de Sobolev fractionnaire H^s comme l'ensemble des fonctions L^2 dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ (au sens des distributions), se représente par une fonction L^2 telle que $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}$ est encore dans L^2. C'est le complété de l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ pour la norme : $\left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$.

[1]formellement c'est l'ensemble $S(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \sup_x |(1 + |x|^k) \times \partial^\alpha f(x)| < +\infty\}$

Enfin, pour $s \in]0, \frac{d}{2}[$, on définit l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s$ comme le complété de $S_0(\mathbb{R}^d)$ (les éléments $u \in S(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\hat{u}(\xi) = 0$ sur un voisinage de 0) pour la norme

$$||u||_{\dot{H}^s} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$.

Dans H^1, on observe que $\widehat{-\Delta u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi)$, et on définit par analogie sur $\dot{H}^s$ (en fait sur $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ puis on prolonge par densité) un opérateur $\Lambda^s = (-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ par :

$$\widehat{\Lambda^s u}(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi)$$

ce qui revient - comme le Laplacien correspond à une dérivée seconde - à “dériver” s fois. Ainsi, $||u||_{\dot{H}^s} = ||\Lambda^s u||_{L^2}$, et les fonctions de $\dot{H}^s$ sont les fonctions qui dont la transformée de Fourier s'écrit $\hat{u} = \frac{\hat{v}}{|\xi|^s}$, où $v \in L^2$, et $v = \Lambda^s u$. Faisons maintenant quelques commentaires sur ces définitions : si u est dans $\dot{H}^s$, décomposons $u = u_1 + u_2$, où $\hat{u_1} = \hat{u}\mathbf{1}_{B(0,1)}$. Alors u_2 est dans H^s, et u_1, ayant une transformée de Fourier à support compact, est C^∞. Cela montre que, pour ce qui est de la régularité locale, il n'y a pas moins d'information dans les espaces homogènes que dans les espaces non homogènes.

1.2 Injection de Sobolev et défaut de compacité

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ sont, en un sens, plus forts que les espaces L^p, ils jouissent en effet de propriétés supplémentaires (selon les cas : régularité, caractère borné - i.e. inclusion dans L^∞ -) et peuvent être plongés dans des espaces L^q pour certaines valeurs de $q \geq p$. Parmi ces résultats dits d'injections de Sobolev, on affirme en particulier :

Théorème 1 (Injection de Sobolev)**.** *Soit p vérifiant l'égalité $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$. Alors $\dot{H}^s$ s'injecte continûment dans L^p, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $||u||_{L^p} \leq C||u||_{\dot{H}^s}$.*

On rappelle qu'un opérateur linéaire T entre deux espaces vectoriels topologiques (par exemple normés) E et F est dit compact si l'image par T de toute partie bornée de E est d'adhérence compacte dans F. Cela entraîne en particulier que T envoie une suite faiblement convergente sur une suite fortement convergente. Si E s'injecte continûment dans F, le caractère compact de cette injection entraîne que toute suite faiblement convergente est fortement convergente dans l'espace d'arrivée.

Lorsque $s > s(p) = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, on a bien sûr une injection continue de H^s dans $H^{s(p)}$, lui-même inclus dans $\dot{H}^{s(p)}$, donc dans L^p par injection de Sobolev, et si l'on remplace L^p par L^p_{loc}, cette injection devient compacte. Pour justifier cela, on peut voir que $j : H^s \hookrightarrow L^p_{loc}$ est limite des opérateurs compacts $j_n : u \mapsto \chi_n u$ où $\widehat{\chi_n u} = \mathbf{1}_{|\xi| \leq n} \hat{u}$.

Observons maintenant, dans le cas $s = s(p)$ que la norme de L^p et celle de $\dot{H}^s$ sont toutes deux invariantes par deux transformations simples :

- Les translations : $\tau_y \circ u(x) = u(x - y)$. C'est clairement le cas pour la norme L^p, et il suffit de remarquer qu'une translation de u se traduit par une multiplication par un complexe de module 1 de $\hat{u}$, ce qui laisse invariante la norme de $\dot{H}^s$.
- Les dilatations : $\delta_h \circ u(x) = u(\frac{x}{h}) \times \frac{1}{h^{d/p}}$ avec $h > 0$. Ici aussi, cette transformation laisse, par homogénéité, la norme L^p invariante. Le fait d'avoir choisi l'espace $\dot{H}^s$, dont la norme vérifie également un critère d'homogénéité (ce qui n'est pas le cas pour la norme de H^s), permet d'écrire (pour u régulière, le résultat général s'en déduisant par densité) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{\delta_h u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} u(\frac{x}{h}) \frac{1}{h^{d/p}} dx \right|^2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \left|\frac{h^d}{h^{d/p}}\right|^2 \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ih\xi x'} u(x')dx'\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi'|^{2s} \left|\frac{h^{2d}h^{-d}}{h^{2d/p}h^{2s}}\right| \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi' x'} u(x')dx'\right|^2 d\xi'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi'|^{2s} |\widehat{u}(\xi')|^2 d\xi' \text{ par l'identité } d - 2s - 2d/p = 0$$

Ces invariances de la norme induisent un défaut de compacité de l'injection $\dot{H}^s \hookrightarrow L^p$. En effet,si u et v sont deux fonctions de $\dot{H}^s$ non nulles (que l'on peut supposer, par densité, être dans $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$), on a :

– Si $(x_n)_n$ est une suite de points de $\mathbb{R}^d$, alors :

$$\langle \tau_{x_n} \circ u, v\rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} e^{-ix_n\xi} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$$

et le lemme de Riemann-Lebesgue nous garantit que cette quantité tend vers 0, quelque soit v, quand x_n tend vers $+\infty$. Par autodualité des espaces de Hilbert, la suite $\tau_{x_n} \circ u$ tend donc faiblement vers 0 si $|x_n| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

– Si $(h_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs, alors :

$$\langle \delta_{h_n} \circ u, v\rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \hat{u}(h_n\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} \frac{h_n^d}{h_n^{d/p}} d\xi$$

Si h_n tend vers 0, cette quantité tend vers 0 par convergence dominée : $d - \frac{d}{p} > 0$ donc l'intégrande tend presque partout vers 0, et la domination résulte du fait que u et v sont dans $\dot{H}^s$, et que la norme de $\dot{H}^s$ est invariante par dilatation. De même, si h_n tend vers $+\infty$, le changement de variable $\xi' = \frac{\xi}{h_n}$ permet de se ramener au cas précédent (la dilatation porte alors sur v, et l'échelle concernée $(1/h_n)_n$ tend bien vers 0). En résumé, la suite $\delta_{h_n} \circ u$ tend faiblement vers 0 lorsque h_n tend vers 0 ou $+\infty$.

Par conséquent, pour toute fonction non nulle u de $\dot{H}^s$, et toutes suites $(x_n)_n$ ou $(h_n)_n$ vérifiant les hypothèses précédentes, les suites $\tau_{x_n} \circ u$ et $\delta_{h_n} \circ u$ tendent faiblement vers 0 dans $\dot{H}^s$, et ont pourtant une norme constante dans L^p. Si l'injection était compacte, elle enverrait ces suites faiblement convergentes vers des suites tendant fortement vers 0 dans L^p, et de norme constante non nulle, ce qui est absurde. On a donc un défaut de compacité dans le cas limite $s = s(p)$.

Réciproquement, la description du défaut de compacité consiste à montrer que ces invariances sont, en un sens à préciser, entièrement responsables du défaut de compacité de l'injection de Sobolev. Pour cela, on introduit trois appellations :

Définition (Échelles, cœurs, profils, couples orthogonaux)

1. On appelle cœur toute suite $\mathbf{x} = (x_n)_n$ de points de $\mathbb{R}^d$, que l'on verra agir par les translations τ.
2. On appelle échelle toute suite $\mathbf{h} = (h_n)_n$ de réels strictement positifs, que l'on verra agir par les dilatations δ.
3. On appelle profil toute fonction ψ de $\dot{H}^s$.

Les échelles permettent naturellement de “remettre à l'échelle”, et les cœurs permettent, à échelle fixée, de “recentrer”. On comparera dorénavant deux couples échelle-cœur $(\mathbf{h}, \mathbf{x})$ et $(\mathbf{h}', \mathbf{x}')$ en disant qu'ils sont orthogonaux si :

– Soit $\log |\frac{h_n}{h'_n}| \longrightarrow +\infty$, c'est à dire que les deux dilatations sont incompatibles.

– Soit $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$ et $\frac{|x_n - x'_n|}{h_n} \longrightarrow +\infty$, c'est à dire que les dilatations sont compatibles mais que, à l'échelle, les translations ne le sont pas.

Remarque 1 Si $(\mathbf{h}, \mathbf{x})$ et $(\mathbf{h}', \mathbf{x}')$ sont deux couples orthogonaux, et si $f \in L^a(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^b(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $1 < a, b < \infty$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta_{h_n} \circ \tau_{x_n} f \times \delta_{h'_n} \circ \tau_{x'_n} \circ g \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Description du défaut de compacité La compacité de l'injection $\dot{H}^s \hookrightarrow L^p$ permettrait d'affirmer que de toute suite bornée de $\dot{H}^s$ on peut extraire une suite qui converge dans L^p. Ici, on décrit le défaut de compacité par le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit* $\mathbf{u}$ *une suite bornée de* $\dot{H}^s$. *Alors il existe une suite extraite* $\mathbf{u}'$, *une suite d'échelles* $\boldsymbol{h}^{(j)}$, *une suite de cœurs* $\boldsymbol{x}^{(j)}$ *et une suite de profils* $\psi^{(j)}$ *vérifiant :*

- *Les couples* $(\boldsymbol{h}^{(j)}, \boldsymbol{x}^{(j)})$ *sont deux à deux orthogonaux.*
- *Pour tout entier* $l \geq 1$, *il existe un développement à l'ordre* l *de la suite* $(u'_n)_n$ *faisant intervenir les* l *premiers profils* $\psi^{(j)}$, *mis à l'échelle et recentrés selon le* n*-ième terme du couple échelle-cœur* $(\boldsymbol{h}^{(j)}, \boldsymbol{x}^{(j)})$, *ainsi qu'un reste d'ordre* l *qui tend vers* 0 *en norme* L^p *pour* l *grand, et ce uniformément en* n *:*

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{l} \delta_{h_n^{(j)}} \circ \tau_{x_n^{(j)}} \circ \psi^{(j)}(x) + r_n^{(l)}, \quad \limsup_{n+\infty} ||r_n^{(l)}||_{L^p} \underset{l+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- *On a une décomposition semblable pour les normes* $\dot{H}^s$ *:*

$$||u'_n||^2_{\dot{H}^s} = \sum_{j=1}^{l} ||\psi^{(j)}||^2_{\dot{H}^s} + ||r_n^{(l)}||^2_{\dot{H}^s} + o(1)$$

On s'intéresse d'abord à la détermination des échelles, puis des cœurs et des profils.

2 Détermination des échelles

On considère des suites bornées de L^2, et l'on montre que l'on peut en écrire, comme précédemment, un développement à tout ordre selon des profils qui ont un comportement "normal" à une certaine échelle.

2.1 Définitions

Définition (Suites $\mathbf{h}$-oscillantes, étrangères à une échelle $\mathbf{h}$). Soit $\mathbf{f}$ une suite bornée de L^2, et $\mathbf{h}$ une échelle.

1. On dit que $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante lorsque :

$$\limsup_{n+\infty} \left(\int_{\{\xi,\ h_n|\xi| \leq 1/R\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi + \int_{\{\xi,\ h_n|\xi| \geq R\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \right) \underset{R+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. On dit que $\mathbf{f}$ est étrangère à $\mathbf{h}$ lorsque :

$$\int_{\{\xi,\ a \leq h_n|\xi| \leq b\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   et ce quels que soient les réels $0 < a < b$.

On observe le comportement de f_n à l'échelle h_n : si $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante ce comportement est "normal" (les spectres ne se concentrent pas au voisinage de 0 ou de l'infini), par opposition au comportement d'une suite étrangère à $\mathbf{h}$, pour laquelle la masse de $|\hat{f}_n(\xi)|^2$ se concentre hors des tous les intervalles du type $[a, b]$ avec $0 < a < b < +\infty$, donc part à l'infini ou en 0.

Si $\mathbf{h}$ est une échelle quelconque et f une fonction de L^2, la suite de terme général $f_n(x) = h_n^{-\frac{d}{2}} f(\frac{x}{h_n})$ (ce qui correspond à $\hat{f}_n(\xi) = h_n^{\frac{d}{2}} \hat{f}(h_n \xi)$) est $\mathbf{h}$-oscillante.

Propriétés

1. Comme l'indique la définition précédente, une suite f_n qui serait à la fois **h**-oscillante et étrangère à **h** pour une certaine échelle **h** tend vers 0 en norme L^2, puisque le spectre de f_n ne peut ni se trouver dans une couronne compacte de $\mathbb{R}^d - \{0\}$, ni se concentrer au voisinage de 0 / $+\infty$. Précisément : pour tout $R > 0$, on peut décomposer $\mathbb{R}^d$ en deux morceaux : $\{\xi,\ h_n|\xi| \leq 1/R$ ou $h_n|\xi| \geq R\}$ et $\{\xi,\ 1/R < h_n|\xi| < R\}$. Quand **f** est **h**-oscillante l'intégrale de $|\hat{f}_n|^2$ sur le premier morceau est petite uniformément en n pour R suffisamment grand, et l'intégrale sur le second tend, à R fixé, vers 0 quand **f** est étrangère à **h**, donc la norme L^2 de $\hat{f}_n$ (qui coïncide avec celle de f_n à une constante multiplicative près d'après la formule de Plancherel) tend bien vers 0.

   On peut montrer en revanche (voir l'annexe) qu'il existe des suites **f** étrangères à toute échelle qui ne tendent pas vers 0 en norme L^2, ce qui justifiera que l'on introduise une autre norme pour éviter ces phénomènes.

2. Ces deux comportements possibles (qui ne sont pas exhaustifs, puisqu'une suite peut bien sûr être ni **h**-oscillante, ni étrangère à **h** en général) induisent une relation dite de presque orthogonalité : si **h** est une échelle, **f** une suite **h**-oscillante et **g** une suite étrangère à **h**, on a d'après la formule de Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\overline{g_n(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_n(\xi)\overline{\hat{g}_n(\xi)}d\xi \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   En effet, la masse du second terme se concentre là où la masse du premier terme est nulle, et inversement. Plus précisément, en découpant encore $\mathbb{R}^d$ en deux morceaux $A = \{\xi,\ h_n|\xi| \leq 1/R$ ou $h_n|\xi| \geq R\}$ et $B = \{\xi,\ 1/R < h_n|\xi| < R\}$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_A \hat{f}_n(\xi)\overline{\hat{g}_n(\xi)}d\xi \leq ||\hat{g}_n||_{L^2}||\hat{f}_n\mathbf{1}_A||_{L^2} \text{ et } \int_B \hat{f}_n(\xi)\overline{\hat{g}_n(\xi)}d\xi \leq ||\hat{g}_n\mathbf{1}_B||_{L^2}||\hat{f}_n||_{L^2}$$

   Par définition, le premier terme est petit uniformément en n pour R assez grand, car **f** est **h**-oscillante et **g** bornée, tandis que le second terme est petit uniformément en n pour R assez grand car **g** est étrangère à **h** et **f** bornée.

3. On en déduit, sous les mêmes hypothèses, l'identité de presque orthogonalité :

$$||f_n + g_n||_{L^2}^2 = ||f_n||_{L^2}^2 + ||g_n||_{L^2}^2 + o(1) \tag{1}$$

4. Remarquons qu'une suite constante de L^2 est toujours **1**-oscillante (c'est le "normal" évoqué plus haut), et que si une suite **f** est **h**-oscillante, c'est encore le cas de n'importe quel translaté de **f**, puisqu'une translation laisse invariant $|\hat{f}|$.

2.2 Décomposition d'une suite bornée selon une échelle

On montre maintenant un premier résultat qui permet de décomposer une suite bornée par rapport à une échelle :

Proposition 1. *Soit **h** une échelle, **f** une suite bornée dans L^2. Il existe une extraction ϕ et une suite bornée* **g** *de L^2, $\mathbf{h}_\phi$-oscillante, telle la suite de terme général $f_{\phi(n)} - g_n$ soit étrangère à **h**.*

Ainsi, **f** se décompose, à extraction près, comme la somme d'une suite **h**-oscillante et d'une suite étrangère à **h**.

Preuve. La démonstration utilise le lemme de Helly, dont nous rappelons l'énoncé en annexe. Pour n entier et $R > 1$, on pose :

$$L_n(R) = \int_{\frac{1}{R} \leq h_n|\xi| \leq R} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi$$

$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de fonctions croissantes sur $I =]1, +\infty[$, vérifiant $\sup_{n,R} L_n(R) < +\infty$. Le lemme de Helly garantit alors l'existence d'une extraction φ_1, telle que $L_{\varphi_1(n)}(R) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} L(R)$ pour tout R. Alors en particulier :

$$\forall R > 1,\ \exists n_R, \forall n > n_R, |L(R) - L_{\varphi_1(n)}(R)| \leq \frac{1}{R}$$

On peut en particulier construire une deuxième extraction φ_2 vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |L(n) - L_{\varphi_1(\varphi_2(n))}(n)| \leq \frac{1}{n}$$

En notant $l = \lim_{R\to+\infty} L(R)$ et $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} L_{\varphi(n)}(n) = l$$

et on définit alors g_n par $\hat{g}_n(\xi) = \mathbf{1}_{\frac{1}{n}\leq h_{\varphi(n)}|\xi|\leq n} \hat{f}_{\varphi(n)}(\xi)$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2. Pour $b > a > 0$, pour n assez grand, $[a, b] \subset [\frac{1}{n}, n]$, donc

$$\hat{g}_n(\xi) = \hat{f}_{\varphi(n)}(\xi) \text{ pour } a \leq h_{\varphi(n)}|\xi| \leq b$$

et il vient :

$$\int_{\{\xi,\ a\leq h_n|\xi|\leq b\}} |\hat{f}_{\varphi(n)}(\xi) - \hat{g}_n(\xi)|^2 d\xi = 0$$

ainsi $\mathbf{f}_\varphi - \mathbf{g}$ est étrangère à $\mathbf{h}_\varphi$. De plus, pour $n \geq R$:

$$\begin{aligned} &\int_{\{\xi,\ h_{\varphi(n)}|\xi|\leq 1/R\}} |\hat{g}_n(\xi)|^2 d\xi + \int_{\{\xi,\ h_{\varphi(n)}|\xi|\geq R\}} |\hat{g}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\{\xi,\ 1/n\leq h_{\varphi(n)}|\xi|\leq n\}} |\hat{f}_{\varphi(n)}(\xi)|^2 d\xi - \int_{\{\xi,\ 1/R\leq h_{\varphi(n)}|\xi|\leq R\}} |\hat{f}_{\varphi(n)}(\xi)|^2 d\xi \\ &= L_{\varphi(n)}(n) - L_{\varphi(n)}(R) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l - L(R). \end{aligned}$$

Comme $L(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $\mathbf{g}$ est bien $\mathbf{h}_\varphi$-oscillante.

On remarque que l'on a pu prendre pour suite $\mathbf{g}$ la suite dont le terme général vérifie :

$$\hat{g}_n = \sigma_n \hat{f}_{\varphi_n} \tag{2}$$

égalité que l'on notera plus bas $g_n = \sigma_n(D) f_{\varphi(n)}$, avec $\sigma \in L^\infty$. □

Si $\mathbf{f}$ est une suite bornée de L^2 et $\mathbf{h}$ une échelle, une suite $\mathbf{g}$ donnée par la proposition 1 est unique à une suite tendant vers 0 en norme L^2 près : on appellera une telle suite une composante $\mathbf{h}$-oscillante de $\mathbf{f}$.

Orthogonalité On dit que deux échelles $\mathbf{h}$ et $\mathbf{h}'$ sont orthogonales (et on note $\mathbf{h} \perp \mathbf{h}'$) lorsque $|\log(\frac{h_n}{h'_n})| \longrightarrow +\infty$ (comportement que l'on trouve déjà dans la définition de deux couples échelles-cœurs orthogonaux).

Le comportement d'une fonction par rapport à deux échelles orthogonales est décrit par la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit $\boldsymbol{f}$ une suite de fonctions L^2, et $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{h}'$ deux échelles, alors :*

1. *Si $\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{h}$-oscillante et $\boldsymbol{h} \perp \boldsymbol{h}'$, alors $\boldsymbol{f}$ est étrangère à $\boldsymbol{h}'$.*

2. *Si $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante, et si de plus $||f_n||_{L^2}$ admet une limite inférieure strictement positive, alors toute échelle $\mathbf{h}'$ à laquelle $\mathbf{f}$ est étrangère est orthogonale à $\mathbf{h}$.*

Preuve. 1. Supposons que $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante, soit $\mathbf{h}'$ étrangère à $\mathbf{h}$, et soient $0 < a < b < +\infty$ des réels. On remarque que $\{|\xi|,\ a \leq h'_n|\xi| \leq b\} = \{|\xi|,\ \frac{h_n}{h'_n}a \leq h_n|\xi| \leq \frac{h_n}{h'_n}b\}$, or $\frac{h_n}{h'_n}$ prend des valeurs arbitrairement petites ou arbitrairement grandes (éventuellement de façon alternée) pour n assez grand , donc - par définition d'une suite $\mathbf{h}$-oscillante - l'intégrale sur ce domaine (à l'échelle $\mathbf{h}$) de $|\hat{f}_n(\xi)|^2$ tend vers 0, ce qui assure que $\mathbf{f}$ est étrangère à $\mathbf{h}$.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbf{h}$ et $\mathbf{h}'$ ne soient pas orthogonales, quitte à extraire on peut supposer que $\frac{h'_n}{h_n}$ est bornée, donc (quitte à extraire de nouveau), tend vers une limite $\lambda \in]0, +\infty[$. Observons alors que pour n assez grand, l'inclusion $\frac{h'_n}{h_n} \in [\lambda/2, 2\lambda]$ assure que :

$$\int_{\{|\xi|,\ a \leq h_n|\xi| \leq b\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\{|\xi|,\ \lambda a/2 \leq h'_n|\xi| \leq 2\lambda b\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi$$

Le terme de droite tendant, par hypothèse, vers 0, il en est de même du terme de gauche, et ce quels que soient $0 < a < b < +\infty$. La suite $\mathbf{f}$ est alors étrangère à $\mathbf{h}$, étant pourtant $\mathbf{h}$-oscillante, et tend donc vers 0 en norme L^2 ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\liminf ||f_n||_{L^2}$.

□

Avant d'énoncer le premier résultat de décomposition d'une suite bornée de L^2, il nous faut introduire, comme annoncé précédemment, une nouvelle norme dont le principal intérêt est de mesurer le fait qu'une suite $\mathbf{f}$ soit étrangère à toute échelle.

2.3 Norme de Besov

Si a est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^d$, on définit le multiplicateur de Fourier de symbole a, noté $a(D)$ par :

$$\widehat{a(D)f}\ (\xi) = a(\xi)\hat{f}(\xi)$$

pour $f \in L^2$, où $a(D)$ doit être compris comme a appliqué à l'opérateur de dérivation $\frac{1}{i}D$. Par exemple, si a est un monôme du type $a(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$, et si $f \in S(\mathbb{R}^d)$, on a bien :

$$\widehat{a(D)f}(\xi) = \big(\prod_{j=1}^{d} \xi_j^{\alpha_j}\big)\hat{f}(\xi) = \widehat{\big(\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{i}\partial_{x_j}^{\alpha_j} f\big)}(\xi)$$

Soit φ une fonction positive C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^d - \{0\}$, telle que $1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-k}\xi)$ pour tout $\xi \neq 0$. En Fourier, cette égalité se traduit par l'identité $I = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k$, où Δ_k est le multiplicateur de Fourier $\varphi(2^{-k}D)$, en effet, par définition, les transformées de Fourier de $\sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k f$ et de f sont égales (en fait elles coïncident en tout point sauf, *a priori*, en 0 puisque $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 0$, mais on peut toujours travailler avec des fonctions $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle près de 0).

Une telle décomposition permet de découper la transformée de Fourier selon une infinité dénombrable de supports (qui sont les dilatés du support de ϕ par 2^k pour k entier relatif), or le comportement d'une suite $\mathbf{f}$ vis-à-vis d'une échelle $\mathbf{h}$ est précisément défini par le comportement, à la limite, de sa transformée de Fourier considérée sur des supports compacts.

Définissons, pour toute fonction $f \in L^2$, la norme de Besov de f par :

$$||f||_B = \sup_{k \in \mathbb{Z}} ||\Delta_k f||_{L^2}$$

norme qui ne dépend pas pas, à équivalence près, du choix de la fonction φ vérifiant l'égalité précédente. Remarquons que $||f||_B \leq ||f||_{L^2}$. Pour une construction explicite d'une telle fonction φ, on peut se reporter au chapitre 2 de [CHEM]. En particulier, on supposera que φ est minorée par une constante $C > 0$ sur une couronne $\alpha \leq |\xi| \leq \beta$ avec $\frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

L'exemple donné dans l'Annexe de suite de fonctions **f** étrangère à toute échelle et ne tendant pas vers 0 en norme L^2 trouve sa réponse dans la proposition suivante :

Proposition 3. *Soit* $\boldsymbol{f}$ *une suite bornée dans* L^2. *Alors* $\boldsymbol{f}$ *est étrangère à toute échelle si et seulement si* $||f_n||_B$ *tend vers* 0.

Preuve. Supposons maintenant que le support de φ soit inclus dans la couronne $\{\xi, a \leq |\xi| \leq b\}$ (avec $a > 0$), et que φ soit minorée par $C > 0$ sur la couronne $\{\xi, \alpha \leq |\xi| \leq \beta\}$ avec $a < \alpha \leq \beta < b$ et $2\alpha \leq \beta$. On a alors, pour tout f dans L^2, l'inégalité :

$$\frac{C^2}{(2\pi)^d} \int_{\{\xi, \alpha \leq 2^{-k}|\xi| \leq \beta\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq ||\Delta_k f||_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\{\xi, a \leq 2^{-k}|\xi| \leq b\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \qquad (3)$$

Soit **f** une suite de L^2, observons que par définition $\limsup_{n+\infty} ||f_n||_B = \limsup_{n+\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||\Delta_k f_n||_{L^2}$, et que cette dernière expression se ré-écrit sous la forme :

$$\limsup_{n+\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||\Delta_k f_n||_{L^2} = \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \limsup_{n+\infty} ||\Delta_{k_n} f_n||_{L^2}$$

Si f est étrangère à toute échelle, *a fortiori* pour toute échelle $\mathbf{h} = 2^{-\mathbf{k}}$ avec $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, l'inégalité de droite dans (3) : $||\Delta_{k_n} f_n||_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\{\xi, a \leq 2^{-k_n}|\xi| \leq b\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi$ entraîne que $\limsup_{n+\infty} ||\Delta_{k_n} f_n||_{L^2} = 0$. Réciproquement, si $||f||_B$ tend vers 0, supposons par l'absurde qu'il existe une échelle **h** telle que f ne soit pas étrangère à **h** : il existe donc une couronne $a' < b'$ pour laquelle :

$$\limsup_{n+\infty} \int_{\{|\xi|,\ a' \leq h_n|\xi| \leq b'\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi > 0$$

Comme on peut toujours encadrer h_n par $2^{-(k_n+1)} \leq h_n \leq 2^{-k_n}$, on remarque que - quitte à supposer que $2a' < b'$, ce qui n'est pas restrictif - :

$$\int_{\{|\xi|,\ a' \leq h_n|\xi| \leq b'\}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\{\xi, a' \leq 2^{-k_n}|\xi| \leq b'\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\{\xi, a' \leq 2^{-(k_n+1)}|\xi| \leq b'\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

et f est alors non étrangère à une échelle du type précédent, à savoir $2^{-\mathbf{k}}$ pour $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. De plus, comme $2\alpha \leq \beta$, on peut recouvrir la couronne $a' < |\xi| < b'$ par un nombre fini de dilatés de la couronne $\alpha < |\xi| < \beta$, et que par conséquent il existe une des ces couronnes $\mathcal{C} = \{\alpha \leq 2^{-r}|\xi| \leq \beta\}$ pour laquelle $\limsup_{n+\infty} \int_{2^{-k_n}\mathcal{C}} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi > 0$, ce qui compte tenu de l'inégalité de gauche dans (3) entraîne que $||f_n||_B$ ne tend pas vers 0, ce qui est absurde. □

2.4 Décomposition selon des échelles

On peut maintenant énoncer un premier théorème de décomposition pour une suite bornée de L^2.

Théorème 3. *Soit* $\boldsymbol{f}$ *une suite bornée de* L^2. *Alors il existe une suite extraite* $\mathbf{f}'$, *une suite d'échelles* $\boldsymbol{h}^{(j)}$ *et une suite* $\mathbf{g}^{(j)}$ *de suites bornées de* L^2 *vérifiant :*

- *Les échelles* $\boldsymbol{h}^{(j)}$ *sont deux à deux orthogonales.*
- *Les suites de fonctions* $\mathbf{g}^{(j)}$ *sont* $\boldsymbol{h}^{(j)}$*-oscillantes.*
- *Pour tout entier* $l \geq 1$, *il existe un développement à l'ordre* l *de la suite* $\mathbf{f}'$ *faisant intervenir les* l *premières fonctions* $\mathbf{g}^{(j)}$, *ainsi qu'un reste d'ordre* l *qui tend vers* 0 *en norme de Besov pour* l *grand, et ce uniformément en* n :

$$f'_n(x) = \sum_{j=1}^{l} g_n^{(j)}(x) + r_n^{(l)}(x)$$

la suite des restes d'ordre l, notée $\mathbf{r}^{(l)}$, étant étrangère aux l premières échelles et vérifiant :

$$\limsup_{n+\infty} ||r_n^{(l)}||_B \underset{l+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve. Posons, pour $\mathbf{f}$ une suite bornée de L^2, la fonction d'erreur $\delta(\mathbf{f}) = \limsup_{n+\infty} ||f_n||_B$.

Première étape. Soit $\mathbf{f}$ une suite bornée de L^2, montrons qu'il existe une suite extraite $\mathbf{f}'$ de $\mathbf{f}$ et une échelle $\mathbf{h}$ telle que $\mathbf{f}'$ admette une composante $\mathbf{h}$-oscillante $\mathbf{g}$, qui vérifie de plus :

$$||g_n||_{L^2} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} C \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2} \tag{4}$$

Pour cela, dans le cas où $\delta(\mathbf{f}) > 0$ (sinon, comme on sait d'après la proposition 3 que $\delta(\mathbf{f}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{f}$ est étrangère à toute échelle, on peut prendre $\mathbf{g} = 0$ et $\mathbf{h}$ quelconque, sans extraire), on se place le long d'une sous-suite $\mathbf{f}'$ et d'une suite d'indices $(k_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$||\Delta_{k_n} f'_n|| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} C_1 \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2} \tag{5}$$

(Une telle suite existe par définition de δ). Considérons l'échelle $\mathbf{h}$ associée de terme général $h_n = 2^{-k_n}$. D'après la proposition 1, on sait que - quitte se placer de nouveau le long d'une sous-suite -, $\mathbf{f}'$ possède une composante $\mathbf{h}$-oscillante, notée $\mathbf{g}$. Comme $\mathbf{g}$ est bornée, on peut également supposer que $||g_n||_{L^2}$ admet une limite, et cette limite vérifie :

$$\lim_{n+\infty} ||g_n||_{L^2} \geq \lim_{n+\infty} ||\Delta_{k_n} f'_n||_{L^2} \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}$$

En effet, $\Delta_{k_n} f'_n = \Delta_{k_n}(f'_n - g_n) + \Delta_{k_n} g_n$, avec $\mathbf{g}$ qui est $\mathbf{h}$-oscillante et $\mathbf{f}' - \mathbf{g}$ qui est étrangère à $\mathbf{h}$, et on peut appliquer la relation de presque orthogonalité (1), tout en utilisant que $||\Delta_{k_n} g_n||_{L^2} \leq ||g_n||_{L^2}$.

Deuxième étape. On montre par récurrence la propriété suivante : il existe des extractions ψ_j, des échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ et des suites $\mathbf{g}^{(j)}$ vérifiant :

- Les suites $\mathbf{g}^{(j)}$ sont $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillantes.
- Les échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ sont deux à deux orthogonales.
- On a le développement à l'ordre l suivant :

$$f_{\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_l(n)} = \sum_{j=1}^{l-1} g^{(j)}_{\psi_{j+1} \circ \cdots \circ \psi_l(n)} + g_n^{(l)} + r_n^{(l)}$$

où la suite des restes d'ordre l, notée $\mathbf{r}^{(l)}$, est étrangère aux $\mathbf{h}^{(j)}_{\psi_{j+1} \circ \cdots \circ \psi_l}$, et où $\mathbf{g}^{(j)}$ vérifie :

$$||g_n^{(j)}||_{L^2} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} C_j \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}^{(j-1)}) \text{ (avec } \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f}\text{)}$$

Sans détailler la preuve, remarquons que l'initialisation résulte de la première étape. On applique ensuite la première étape aux restes successifs, et les orthogonalités des échelles ainsi obtenues résultent du critère d'orthogonalité des échelles obtenu dans la proposition 2.

Il est important de noter que par construction, les suites de fonctions $\mathbf{g}^{(j)}$ peuvent s'obtenir toutes sous la forme du produit d'un multiplicateur de Fourier par une suite extraite de $\mathbf{f}$: c'est le cas pour la première suite $\mathbf{g}^{(1)}$ puisqu'elle est obtenue en considérant la composante $\mathbf{h}$-oscillante d'une suite extraite de $\mathbf{f}$ pour une certaine échelle $\mathbf{h}$ (voir à ce propos l'identité 2), et on vérifie aisément que cette propriété se conserve en passant aux restes successifs. On utilisera cette remarque pour reformuler ce résultat dans le cadre "naturel" ($\dot{H}^s$ et L^p) à la partie 3.

Troisième étape. On réalise une extraction diagonale, pour obtenir des échelles $\mathbf{H}$, des fonctions $\mathbf{G}$, des restes $\mathbf{R}$ et une extraction $\mathbf{F}$ de $\mathbf{f}$ qui vérifient (pour $n > l$), le développement :

$$F_n = \sum_{j=1}^{l} G_n^{(j)} + R_n^{(l)}$$

avec $\mathbf{R}^{(l)}$ étrangère aux l premières échelles $\mathbf{H}^{(j)}$ et l'égalité :

$$||G_n^{(j)}||_{L^2} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} C_j \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}^{(j-1)}) \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{R}^{(j-1)})$$

La presque orthogonalité (1) donne alors : $||F_n||_{L^2}^2 \geq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{l}\delta(\mathbf{R}^{(j-1)})^2 + ||R_n^{(l)}||_{L^2}^2 + o(1)$. Comme la suite $\mathbf{f}$ est bornée, la convergence de la série des $\delta(\mathbf{R}^{(j)})^2$ entraîne que $\delta(\mathbf{R}^{(j)})$ tend vers 0, ce qui était la dernière condition du théorème. □

3 Inégalité de Sobolev et inégalité de Sobolev raffinée

3.1 Une inégalité de Sobolev raffinée

On a énoncé en préambule, le résultat suivant :

Soit p vérifiant l'égalité $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$. Alors $\dot{H}^s$ s'injecte continûment dans L^p, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $||u||_{L^p} \leq C||u||_{\dot{H}^s}$.

On cherche ici à montrer qu'une suite étrangère à toute échelle tend vers 0 en norme L^p. On va pour cela majorer la norme $||u||_{L^p}$ par la norme de Besov de u, et la proposition 3 permettra de conclure. L'inégalité de Sobolev raffinée s'énonce ainsi (en notant temporairement par commodité $||u||_{\dot{B}^s} = ||\Lambda^s u||_B$) :

$$||u||_{L^p} \leq C||u||_{\dot{B}^s}^{1-2/p}||u||_{\dot{H}^s}^{2/p}$$

Comme $||u||_{\dot{B}^s} \leq ||u||_{\dot{H}^s}$, cette inégalité raffinée redonne en particulier l'inégalité annoncée au théorème 1 et rappelée ci-dessus.

Preuve. On démontre l'inégalité de Sobolev raffinée pour $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ et on l'étend ensuite à $\dot{H}^s$ par densité de $\mathcal{S}_0$. Décomposons u selon "hautes" et "basses" fréquences, en posant pour tout $A > 0$: $u = u_{1,A} + u_{2,A}$, avec

$$u_{1,A} = \mathcal{F}^{-1}(1_{B(0,A)}\widehat{u}) \text{ et } u_{2,A} = \mathcal{F}^{-1}(1_{B(0,A)^c}\widehat{u})$$

On a, d'après le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (\int_0^{|f|} p\lambda^{p-1}d\lambda)d\mu = p\int_{\mathbb{R}^d}(\int_{\mathbb{R}+} 1_{\lambda\leq|f|}\lambda^{p-1}d\lambda)d\mu$$

d'où l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu = p\int_{\mathbb{R}+} \mu(\xi \in \mathbb{R}^d, |f(\xi)| > \lambda)\lambda^{p-1}d\lambda. \tag{6}$$

Par ailleurs, l'inégalité triangulaire $|\alpha+\beta| > \gamma \Rightarrow |\alpha| > \frac{\gamma}{2}$ ou $|\beta| > \frac{\gamma}{2}$ garantit que :

$$\mu(|u| > \lambda) \leq \mu(|u_{1,A}| > \frac{\lambda}{2}) + \mu(|u_{2,A}| > \frac{\lambda}{2})$$

On décompose maintenant $u_{1,A}$ en $u_{1,A} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\Delta_k u_{1,A}$. Alors, en choisissant le plus petit entier $k(A)$ vérifiant $2^{k(A)+1}Supp(\varphi) \subset B(0,A)^c$, il vient :

$$||u_{1,A}||_{L^\infty} \leq ||\widehat{u_{1,A}}||_{L^1} \leq \sum_{-\infty}^{k(A)} ||\widehat{\Delta_k u_{1,A}}||_{L^1}$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$||\widehat{\Delta_k u_{1,A}}||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^{-k}\xi)\frac{\widehat{u_{1,A}}(\xi)\xi^s}{\xi^s}d\xi \leq \left(\int_{2^k Supp(\varphi)} \xi^{-2s}d\xi\right)^{1/2} ||u||_{\dot{B}^s} \leq K(2^k)^{d/2-s}||u||_{\dot{B}^s}$$

où $K = \int_{Supp(\varphi)} \xi^{-2s}$, ce qui, en sommant, donne :

$$||u_{1,A}||_{L^\infty} \leq CA^{d/2-s}||u||_{\dot{B}^s}$$

pour une certaine constante C. En choisissant une valeur de $A = A_\lambda := (\frac{\lambda}{2C||u||_{\dot{B}^s}})^{\frac{1}{d/2-s}}$, on obtient :

$$||u_{1,A_\lambda}||_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2} \text{ donc } \mu(|u_{1,A_\lambda}| > \frac{\lambda}{2}) = 0$$

ce qui entraîne que :

$$\mu(|u| > \lambda) \leq \mu(|u_{2,A_\lambda}| > \frac{\lambda}{2}).$$

Or, par l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev $\mu(|u_{2,A_\lambda}| > \frac{\lambda}{2}) \leq \frac{4}{\lambda^2}||u_{2,A_\lambda}||_{L^2}^2$ donc, en réinjectant dans (6) :

$$\begin{aligned} ||u||_{L^p}^p &\leq p\int_{\mathbb{R}+} \mu(|u| > \lambda)\lambda^{p-1}d\lambda \leq 4p\int_{\mathbb{R}+} \frac{||u_{2,A_\lambda}||_{L^2}^2}{\lambda^2}\lambda^{p-1}d\lambda \\ &\leq 4p\int_{\mathbb{R}+} \lambda^{p-3}\left((2\pi)^d\int_{A_\lambda\leq|\xi|}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)d\lambda \end{aligned}$$

ce qui, en posant $C_\xi = 2C||u||_{\dot{B}^s}|\xi|^{d/2-s}$, s'écrit :

$$||u||_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^{-d}\int\int_{\lambda\leq C_\xi} \lambda^{p-3}d\lambda|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$

car $A_\lambda = (\frac{\lambda}{2C||u||_{\dot{B}^s}})^{\frac{1}{d/2-s}} \leq |\xi| \Leftrightarrow \lambda \leq C_\xi$.

Enfin, compte tenu de l'égalité $p = \frac{2d}{d-2s}$ i.e. $p-2 = \frac{4s}{d-2s}$, on a :

$$\int_0^{C_\xi} \lambda^{p-3}d\lambda = \frac{(2C||u||_{\dot{B}^s}|\xi|^{d/2-s})^{p-2}}{p-2} = \frac{(2C)^{p-2}}{p-2}||u||_{\dot{B}^s}^{p-2}|\xi|^{2s}$$

d'où :

$$||u||_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^{-d}\frac{(2C)^{p-2}}{p-2}||u||_{\dot{H}^s}^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi \leq \frac{4p(2\pi)^{-d}}{p-2}(2C)^{p-2}||u||_{\dot{B}^s}^{p-2}||u||_{\dot{H}^s}^2$$

ce qui donne l'inégalité voulue :

$$||u||_{L^p}^p \leq C'||u||_{\dot{H}^s}^2||u||_{\dot{B}^s}^{p-2}$$

□

3.2 Corollaire, et nouvelle formulation du théorème 3

Énonçons d'abord un corollaire de l'inégalité de Sobolev raffinée : si l'on se donne toujours $s \in]0, \frac{d}{2}[$, et p vérifiant $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$, et si $\mathbf{u}$ est une suite bornée de $\dot{H}^s$ telle que $||\Lambda^s u_n||_B$ tend vers 0, alors $||u_n||_{L^p}$ tend vers 0.

Ce corollaire nous permet de reformuler le théorème 3 en remplaçant l'estimation en norme $||.||_B$ par une estimation en norme $||.||_{L^p}$:

Théorème 4. *Soit* $\mathbf{u}$ *une suite bornée de* $\dot{H}^s$*. Alors il existe une suite extraite* $\mathbf{u}'$*, une suite d'échelles* $\boldsymbol{h}^{(j)}$ *et une suite* $\mathbf{v}^{(j)}$ *de suites bornées de* $\dot{H}^s$ *vérifiant :*

– *Les échelles* $\boldsymbol{h}^{(j)}$ *sont deux à deux orthogonales.*

– *Les suites bornées de fonctions de* L^2*,* $\Lambda^s\mathbf{v}^{(j)}$ *sont* $\boldsymbol{h}^{(j)}$*-oscillantes.*

– *Pour tout entier $l \geq 1$, il existe un développement à l'ordre l de la suite $\mathbf{u'}$ faisant intervenir les l premières fonctions $\mathbf{v}^{(j)}$, ainsi qu'un reste d'ordre l qui tend vers 0 en norme de L^p pour l grand, et ce uniformément en n :*

$$u'_n(x) = \sum_{j=1}^{l} v_n^{(j)}(x) + \rho_n^{(l)}(x), \ \limsup_{n+\infty} ||\rho_n^{(l)}||_{L^p} \underset{l+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

Preuve. On applique le Théorème 3 à la suite bornée $\mathbf{f}$ de L^2 définie par $f_n = \Lambda^s u_n$. Le seul point à vérifier est que les fonctions $\mathbf{g}^{(j)}$ fournies par le Théorème 3 et qui figurent dans le développement à tout ordre de $\mathbf{f}$ s'écrivent bien comme des $\Lambda^s \mathbf{v}^{(j)}$ pour une certaine suite $\mathbf{v}$. La remarque faite au cours de la preuve du théorème 3 garantit qu'elles peuvent s'écrire sous la forme $g_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(D) f'_n$, à savoir comme le produit de f'_n et d'un certain multiplicateur de Fourier. Comme les multiplicateurs de Fourier passent naturellement au travers de l'opérateur Λ^s (étant lui-même un multiplicateur de Fourier), on obtient bien que $g_n^{(j)} = \Lambda^s v_n^{(j)}$, lorsque l'on pose $v_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(D) u'_n$.

L'égalité (7) et la condition de décroissance en norme L^p du reste $\rho_n^{(l)}$ résultent alors de la conclusion du Théorème 3 et du corollaire précédent. On obtient de plus, grâce à la relation de presque orthogonalité (1) (licite car les échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ sont deux à deux orthogonales et les $\Lambda^s \mathbf{v'}^{(j)}$ sont $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillantes, donc étrangères aux autres échelles), l'égalité suivante sur les normes L^2 :

$$||\Lambda^s u'_n||_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{l} ||\Lambda^s v_n^{(j)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s \rho_n^{(l)}||_{L^2}^2 + o(1)$$

□

4 Détermination des cœurs et des profils

4.1 Un nouveau résultat de décomposition

On sait décomposer (à extraction près) une suite $\mathbf{u}$, une fois plongée dans L^2 par Λ^s, comme une somme de fonctions $\Lambda^s v^{(j)}$ qui sont $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillantes pour une certaine suite d'échelles $\mathbf{h}^{(j)}, j \in \mathbb{N}$. Pour établir le Théorème 2, il faut maintenant arriver à décomposer ces suites $\Lambda^s v^{(j)}$ comme une somme de profils "translatés" par une suite de cœurs. C'est l'objet de la proposition suivante :

Théorème 5. *Soit $\mathbf{w}$ une suite bornée de $\dot{H}^s$ telle que la suite $\Lambda^s \mathbf{w}$ soit $\mathbf{1}$-oscillante. Alors il existe une sous-suite $\mathbf{w'}$ de $\mathbf{w}$, une suite $\boldsymbol{x}_{\alpha\geq 1}^{(\alpha)}$ de cœurs et une suite $\psi^{(\alpha)}$ de profils (i.e. de fonctions de $\dot{H}^s$) vérifiant :*

1. *Si $\alpha \neq \beta$, les couples $(\mathbf{1}, \boldsymbol{x}^{(\alpha)})$ et $(\mathbf{1}, \boldsymbol{x}^{(\beta)})$ sont orthogonaux, i.e. $|x_n^\alpha - x_n^\beta| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
2. *Il existe un développement de $\mathbf{w'}$ à tout ordre $A \geq 1$, de la forme :*

$$w'_n = \sum_{\alpha=1}^{A} \tau_{x_n^{(\alpha)}} \circ \psi^{(\alpha)} + R_n^{(A)}, \ \limsup_{n+\infty} ||R_n^{(A)}||_{L^p} \underset{A+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. *On a un développement semblable pour les normes :*

$$||\Lambda^s w'_n||_{L^2}^2 = \sum_{\alpha=1}^{A} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n^{(A)}||_{L^2}^2 + o(1)$$

Preuve. On va procéder comme pour la preuve du Théorème 3 : c'est la méthode d'exhaustion de G.Métivier et S.Scochet. Posons, pour $\mathbf{w}$ une suite bornée dans $\dot{H}^s$ (et $\mathbf{1}$-oscillante), la fonction d'erreur $\gamma(\mathbf{w}) := \sup\{||\Lambda^s \psi||_{L^2}, \ \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w})\}$, où $\mathcal{P}(\mathbf{w})$ est l'adhérence "faible-translatée" de la suite

$\mathbf{w}$, c'est à dire l'ensemble des $\psi \in \dot{H}^s$ tels qu'il existe une sous-suite $\mathbf{w}_\varphi$ et un cœur $\mathbf{x}$ tel que $(\tau_{-x_n} \circ w_{\varphi(n)})_n$ (attention au signe $-$) converge faiblement (dans $\dot{H}^s$) vers ψ, ce qui s'écrit encore :

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_{\varphi(n)}(x + x_n)\chi(x)dx \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\chi(x)dx, \quad \text{et ce pour tout } \chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$$

Première étape. Soit $\mathbf{w}$ une suite bornée de $\dot{H}^s$, avec $\gamma(\mathbf{w}) > 0$: soit ψ dans $\mathcal{P}(\mathbf{w})$ vérifiant $||\Lambda^s\psi||_{L^2} > \frac{\gamma(\mathbf{w})}{2}$. Soit $\mathbf{w}_\varphi$ et $\mathbf{x}$ donnés par la définition de $\mathcal{P}(\mathbf{w})$, on définit un reste d'ordre 1, noté $\mathbf{R}^{(1)}$ par la formule :

$$\mathbf{w}_{\varphi(n)}(x) = \psi(x - x_n) + R_n^{(1)}(x)$$

Ce reste est borné dans $\dot{H}^s$ et la suite $\Lambda^s\mathbf{R}^{(1)}$ est encore $\mathbf{1}$-oscillante (comme différence de deux fonctions qui le sont, voir la propriété 4 suivant la définition d'une suite de fonction étrangère à une échelle). Par définition, $\mathbf{R}^{(1)}$ tend faiblement vers 0 (au sens précédent), ce qui permet d'écrire :

$$||\Lambda^s w_{\phi(n)}||_{L^2}^2 = ||\Lambda^s\psi||_{L^2}^2 + ||\Lambda^s R_n^{(1)}||_{L^2}^2 + o(1)$$

En effet, en développant les normes L^2, on fait apparaître un terme en $\int_{\mathbb{R}^d} \Lambda^s R_n^{(1)}(x+x_n)\Lambda^s\psi(x)dx$. Supposons que $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$, ce terme est alors (d'après la formule de Plancherel), de l'ordre de $\int_{\mathbb{R}^d} R_n^{(1)}(x+x_n)g(x)dx$ pour un certain $g := \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^s\hat{\psi}(\xi)) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$, et tend bien vers 0 d'après l'hypothèse de convergence faible vers 0 de $\mathbf{R}^{(1)}$. Par densité de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $\dot{H}^s$ et plongement isométrique $\dot{H}^s \overset{\Lambda^s}{\hookrightarrow} L^2$, le résultat demeure vrai en général.

Deuxième étape. En combinant une récurrence et un argument d'extraction diagonale comme dans la démonstration du Théorème 3, on construit une sous-suite $\mathbf{w}'$ de $\mathbf{w}$ et des suites $\psi^{(\alpha)}$, $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ de profils et de cœurs telles que 1., 2. et 3. soit vérifiées, à l'exception de l'estimation :

$$\limsup_{n+\infty} ||R_n^{(A)}||_{L^p} \underset{A+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le principe de la récurrence est le même pour que le Théorème 3 : l'initialisation résulte de la première étape, puis on applique cette même étape aux restes successifs. Une conséquence de l'égalité 3. est que la série de terme général $||\Lambda^s\psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2$ est convergente, ce qui entraîne que $\gamma(\mathbf{R}^{(A)})$ tend vers 0 (en effet on choisit, à l'étape α, une fonction $\psi^{(\alpha)}$ vérifiant $||\Lambda^s\psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{R}^{(\alpha-1)})$).

Troisième étape. On cherche à conclure en majorant la norme L^p du reste par une expression dépendant de la fonction d'erreur γ (qui tend vers 0 comme annoncé plus haut). On va pour cela établir l'inégalité suivante :

$$\limsup_{n+\infty} ||w_n||_{L^p} \leq C \limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s w_n||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w})^{1-\frac{2}{p}} \tag{8}$$

pour toute suite $\mathbf{w}$ bornée dans $\dot{H}^s$ et telle que $\Lambda^s\mathbf{w}$ est $\mathbf{1}$-oscillante, hypothèses vérifiées par la fonction $\mathbf{w}$ de départ, et par tous les restes successifs comme indiqué dans la première étape.

1. Cas où le spectre est inclus dans une couronne Faisons d'abord l'hypothèse que $\mathbf{w}$ est une suite de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$, et même que le support de w_n est contenu dans une couronne $K_{a,b} : \{\xi, a \leq |\xi| \leq b\}$ indépendante de n. On dispose alors de la majoration suivante :

$$||w_n||_{L^2} \leq \big(\frac{1}{a^s}||\Lambda^s w_n||_{L^2}\big) \tag{9}$$

(en effet le terme en $|\xi|$ qui apparaît dans la transformée de Fourier de $\Lambda^s w_n$ est minoré par a)

Pour faire apparaître $\gamma(\mathbf{w})$, remarquons que si ρ est une fonction de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{\rho} = 1$ au voisinage de $K_{a,b}$, on a $w_n = \rho \star w_n$, ce qui s'écrit encore :

$$w_n(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(-x)w_n(x + y)dx \tag{10}$$

Par ailleurs, on a :

$$\limsup_{n+\infty} ||w_n||_{L^\infty} = \sup_{\mathbf{x}} \limsup_{n+\infty} |w_n(x_n)|, \text{ pour } \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$$

Soit $\mathbf{x}$ dans $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, et φ une extraction telle que $\lim_{n+\infty} |w_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| = \limsup_{n+\infty} |w_n(x_n)|$. Comme cette suite est bornée dans $\dot{H}^s$ (et que $\dot{H}^s$ est réflexif), on peut (quitte à extraire de nouveau) supposer que $\tau_{-x_{\varphi(n)}} \circ w_{\varphi(n)}$ admet une limite faible. Cela permet d'écrire (en utilisant (10) avec $y = x_{\varphi(n)}$) :

$$\limsup_{n+\infty} ||w_n||_{L^\infty} \leq \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho(-x)\psi(x)dx \right|, \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w}) \right\}$$

Puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (la fonction ρ ne dépendant que de a et b) :

$$\limsup_{n+\infty} ||w_n||_{L^\infty} \leq C(a,b)\gamma(\mathbf{w}) \tag{11}$$

Un corollaire de l'inégalité de Hölder donne alors, en rassemblant (9) et (11) :

$$||w_n||_{L^p} \leq \big(\frac{1}{a^s}||\Lambda^s w_n||_{L^2}\big)^{\frac{2}{p}} C(a,b)^{1-\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w})^{1-\frac{2}{p}} = C'(a,b)||\Lambda^s w_n||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w})^{1-\frac{2}{p}} \tag{12}$$

Ce qui donne l'inégalité voulue en passant à la limite, avec une constante $C'(a,b)$ dépendant de a et b.

2. Obtention d'une constante indépendante de la couronne Observons maintenant que si $\mathbf{w}$ a son spectre inclus dans une couronne $K_{a,b}$, il en est de même pour les éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{w})$. Si ψ est une telle fonction, il suffit en effet de prendre comme fonction test χ une approximation (en norme L^2) dans $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ de la fonction $\mathbf{1}_{K_{a,b}}(D)\overline{\psi}$ et d'appliquer la définition.

Cela donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_{\varphi(n)}(x + x_n)\chi(x)dx \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\chi(x)dx$$

le premier terme étant toujours aussi proche que souhaité (quitte à approcher précisément $\mathbf{1}_{K_{a,b}}(D)\overline{\psi}$, la suite $\mathbf{w}$ étant bornée dans L^2) de $\int_{\mathbb{R}^d} w_{\varphi(n)}(x + x_n)\mathbf{1}_{K_{a,b}}(D)\overline{\psi}(x)dx$, qui vaut 0 (d'après l'égalité de Parseval), et le second terme étant aussi proche que souhaité de $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{K_{a,b}}(D)|\psi(x)|^2dx$.

L'hypothèse faite sur le spectre de $\mathbf{w}$ se conserve donc quand on construit les restes successifs (puisqu'elle passe à la limite faible et qu'elle est stable par différence). Ainsi, sous cette hypothèse, l'inégalité (12) est valable pour tous les termes de la suite des restes, et permet de conclure à la convergence vers 0 en norme L^p de cette suite. On dispose alors de la totalité des conclusions de la Proposition 5 sous cette hypothèse de localisation du spectre. En particulier, la conclusion 2. entraîne que :

$$\lim_{n+\infty} ||w'_n||_{L^p}^p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} ||\psi^{(\alpha)}||_{L^p}^p \tag{13}$$

Pour établir cette identité, on utilisera l'inégalité "élémentaire" :

$$\Big| |\sum_{j=1}^{l} \alpha_j|^p - \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j|^p \Big| \leq C_l \sum_{j,k\ j\neq k} |\alpha_j||\alpha_k|^{p-1} \tag{14}$$

Si l'on se fixe $\epsilon > 0$, le caractère uniforme en n de la convergence vers 0 du reste assure l'existence d'un ordre A tel que

$$\limsup_{n+\infty} ||R_n^{(A)}||_{L^p} \leq \epsilon$$

Mais alors, le développement à l'ordre A injecté dans l'inégalité (14) précédente permet d'écrire que :

$$\Big| |\sum_{j=1}^{A} \tau_{x_n^{(j)}} \circ \psi^{(j)}|^p - \sum_{j=1}^{A} |\tau_{x_n^{(j)}} \circ \psi^{(j)}|^p \Big| \leq C_A \sum_{j \neq k} |\tau_{x_n^{(j)}} \circ \psi^{(j)}||\tau_{x_n^{(k)}} \circ \psi^{(k)}|^{p-1}$$

en intégrant cette inégalité et en utilisant la remarque 1 du paragraphe 1.2 (qui s'applique ici car les couples $(\mathbf{1}, \mathbf{x}^{(j)})$ sont deux à deux orthogonaux et car les $|\psi^{(j)}|$ sont dans L^p), on obtient que :

$$\Big| ||w_n' - R_n^{(A)}||_{L^p}^p - \sum_{j=1}^{A} ||\psi_n^{(j)}||_{L^p} \Big| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui, vu la majoration du reste, permet finalement de conclure à l'identité (13).

La conclusion 3. assure, quant à elle, que :

$$\limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s w_n'||_{L^2}^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{+\infty} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2 \tag{15}$$

Appliquons l'inégalité de Sobolev (simple) à chaque $\psi^{(\alpha)}$:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} ||\psi^{(\alpha)}||_{L^p}^p \leq C^p \sum_{\alpha=1}^{\infty} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^p = C \sum_{\alpha=1}^{\infty} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^2 \sup_{\alpha} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^{p-2}$$

Puis en utilisant (13) et (15), on obtient :

$$\lim_{n+\infty} ||w_n'||_{L^p} \leq C \limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s w_n'||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \sup_{\alpha} ||\Lambda^s \psi^{(\alpha)}||_{L^2}^{1-\frac{2}{p}}$$

Ce qui entraîne l'inégalité :

$$\lim_{n+\infty} ||w_n'||_{L^p} \leq C \limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s w_n'||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w}')^{1-\frac{2}{p}}$$

avec une constante C indépendante de $\mathbf{w}$, a et b. Quitte à se placer au préalable le long d'une sous-suite, on peut supposer que $\lim\limits_{n+\infty} ||w_n'||_{L^p} = \limsup\limits_{n+\infty} ||w_n||_{L^p}$. On obtient finalement (en majorant les termes de droite par les termes correspondant pour $\mathbf{w}$) :

$$\limsup_{n+\infty} ||w_n||_{L^p} \leq C \limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s w_n||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w})^{1-\frac{2}{p}} \tag{16}$$

ce qui est l'inégalité voulue.

3. Cas général Dans le cas général (où l'on ne fait plus d'hypothèse sur le support de $\hat{\mathbf{w}}$), on va montrer que l'on peut prolonger cette inégalité par approximation.

Soit donc $\mathbf{w}$ une suite bornée de $\dot{H}^s$ telle que $\Lambda^s \mathbf{w}$ soit $\mathbf{1}$-oscillante, et soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe alors $R > 0$ tel que :

$$\limsup_{n+\infty} \left(\int_{\{\xi,\ h_n|\xi| \leq 1/R\}} |\xi|^{2s} |\hat{w}_n(\xi)|^2 d\xi + \int_{\{\xi,\ h_n|\xi| \geq R\}} |\xi|^{2s} |\hat{w}_n(\xi)|^2 d\xi \right) \leq \epsilon^2. \tag{17}$$

Soit alors λ la fonction caractéristique de la couronne $C_{\frac{1}{R},R}$, étudions la fonction d'erreur associée à la suite $\lambda(D)\mathbf{w}$. L'inégalité (17) se réécrit avec ces notations sous la forme :

$$\limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s((1-\lambda)(D) w_n)||_{L^2} \leq \epsilon \tag{18}$$

Remarquons d'abord que si ψ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbf{w})$, alors $\lambda(D)\psi$ est dans $\mathcal{P}(\lambda(D)\mathbf{w})$. En effet, si φ et $\mathbf{x}$ sont l'extraction et le cœur donnés par la définition de $\mathcal{P}(\mathbf{w})$, alors le multiplicateur de Fourier $\lambda(D)$ et la translation τ_{x_n} commutent car une translation induit une multiplication par un complexe de module 1 en Fourier, ce qui ne change pas la valeur de $\lambda(|\xi|)$. Aussi peut-on écrire indifféremment, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\lambda(D)w)_{\varphi(n)}(x+x_n)\chi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} w_{\varphi(n)}(x+x_n)(\lambda(D)\chi)(x)dx$$

Supposons un instant que $\lambda(D)\chi$ soit une fonction de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$, alors par hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_{\varphi(n)}(x+x_n)(\lambda(D)\chi)(x)dx \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)(\lambda(D)\chi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda(D)\psi)(x)\chi(x)dx$$

d'où le résultat annoncé, quitte à approcher (dans L^2) la fonction $\lambda(D)\chi$ par une fonction $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ (la suite $\mathbf{w}$ étant quant à elle bornée dans L^2).

Réciproquement, si $\psi = \lambda(D)\psi$ est une fonction de $\mathcal{P}(\lambda(D)\mathbf{w})$ (l'écriture $\psi = \lambda(D)\psi$ est justifiée par le fait que les éléments de $\mathcal{P}(\lambda(D)\mathbf{w})$ ont un spectre contenu dans $C_{\frac{1}{R},R}$), et si φ et $\mathbf{x}$ sont l'extraction et le cœur fournis par définition, comme la suite $(1-\lambda)(D)\tau_{x_n} \circ w_{\varphi(n)}$ est bornée, on peut en extraire une suite faiblement convergente vers une certaine fonction $u = (1-\lambda)(D)u$, si bien que $\psi + u$ est dans $\mathcal{P}(\mathbf{w})$, et par conséquent $\psi = \lambda(D)(\psi + u)$ est un élément de $\lambda(D)(\mathcal{P}(\mathbf{w}))$. Finalement, on dispose de l'égalité :

$$\mathcal{P}(\lambda(D)\mathbf{w}) = \lambda(D)\mathcal{P}(\mathbf{w}) \tag{19}$$

Par ailleurs, la même démarche que celle utilisée au paragraphe 2. ci-dessus pour établir que si $\mathbf{w}$ a son spectre inclus dans une couronne $K_{a,b}$, alors il en est de même pour les éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{w})$, permet aussi de montrer que l'hypothèse (18) faite plus haut sur le support de $\mathbf{w}$ se conserve quand on considère les éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{w})$, ce qui entraîne :

$$\forall \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w}),\ ||\Lambda^s((1-\lambda)(D)\psi)||_{L^2} \leq \epsilon \tag{20}$$

On peut alors prolonger à $\mathbf{w}$ l'inégalité (16), qui vaut pour $\lambda(D)\mathbf{w}$ puisque cette suite a son spectre contenu dans une couronne. On a en effet obtenu les encadrements suivants :

1. $\limsup_{n+\infty} ||(1-\lambda)(D)w_n||_{L^p} \leq \limsup_{n+\infty} C||\Lambda^s(1-\lambda(D)w_n||_{L^2} \leq C\epsilon$, en utilisant d'abord l'inégalité de Sobolev puis la majoration (18).
2. $\limsup_{n+\infty} ||\Lambda^s((1-\lambda)(D)w_n))||_{L^2} \leq \epsilon$ ce qui est exactement la majoration (18).
3. $|\gamma(\lambda(D)\mathbf{w}) - \gamma(\mathbf{w})| \leq \epsilon$ d'après l'égalité (19) et la majoration (20).

□

4.2 Conclusion

Pour obtenir le théorème principal 2, il faut alors combiner les conclusions du théorème 4 et du théorème 5. Soit $\mathbf{u}$ une suite bornée de $\dot{H}^s$. Le théorème 4 fournit une sous-suite $\mathbf{u}'$ de $\mathbf{u}$, des échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ et des suites $\mathbf{v}^{(j)}$ bornées dans $\dot{H}^s$ vérifiant en particulier que, pour tout j, la suite $(\Lambda^s v_n^{(j)})_n$ est $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillante. Posons alors pour tout j :

$$w_n^{(j)} = \delta_{h_n^j}^{-1} \circ h_n^{(j)}$$

Alors la suite $\mathbf{w}^{(j)}$ est bornée dans $\dot{H}^s$ et la suite $\Lambda^s \mathbf{w}^{(j)}$ est $\mathbf{1}$-oscillante : on peut donc lui appliquer le théorème 5, ce qui fournit une sous-suite $\mathbf{w}'^{(j)}$, une suite $(\mathbf{x}^{(j,\alpha)})_{\alpha\geq 1}$ de cœurs et une suite $\psi_{\alpha\geq 1}^{(j,\alpha)}$ de profils.

On peut ainsi écrire (quitte à pratiquer une extraction diagonale) une décomposition comme exposée dans le théorème 2, la convergence demandée du reste s'obtenant quant à elle au prix de quelques manipulations techniques mais élémentaires.

5 Annexe

5.1 Une fonction étrangère à toute échelle qui ne tend pas vers 0 dans L^2

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx \neq 0$. Pour $n \geq 2$, on pose

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{n^d}{(\log n)^{1/2}}(1-\Delta)^{-d/4}(\psi(nx))$$

soit

$$\hat{f}_n(\xi) = \frac{1}{(\log n)^{1/2}}(1+|\xi|^2)^{-d/4}\hat{\psi}(\frac{\xi}{n})$$

Par la formule de Plancherel, $||f_n||_{L^2}^2 = \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(\frac{\xi}{n})|^2 d\xi$, qui se décompose

$$||f_n||_{L^2}^2 = \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{|\xi|\leq n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(\frac{\xi}{n})|^2 d\xi + \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{|\xi|\geq n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(\frac{\xi}{n})|^2 d\xi$$

Par changement de variable et convergence dominée

$$\frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{|\xi|\geq n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(\frac{\xi}{n})|^2 d\xi = \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{|\xi|\geq 1} \frac{1}{(1/n^2+|\xi|^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puisque $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx \neq 0$, $\hat{\psi}(\xi)^2 = \hat{\psi}(0)^2 + O(\xi)$ et par un changement de variable sphérique,

$$\frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{|\xi|\leq n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(\frac{\xi}{n})|^2 d\xi = \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{\omega\in S^{d-1}}\int_{r\leq 1} \frac{r^{d-1}}{(1/n^2+r^2)^{d/2}}|\hat{\psi}(r\omega)|^2 dr d\omega$$

$$= \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{\omega\in S^{d-1}}\int_{r\leq 1} \frac{r^{d-1}}{(1/n^2+r^2)^{d/2}}(|\hat{\psi}(0)|^2 + O(r)) dr d\omega$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{(2\pi)^{-d}}{\log n}\int_{\omega\in S^{d-1}}\int_{1/n\leq r\leq 1} \frac{1}{r}|\hat{\psi}(0)|^2 dr d\omega$$

donc

$$||f_n||_{L^2}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (2\pi)^{-d}|S^{d-1}||\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx|^2 \neq 0$$

Néanmoins, pour toute échelle $\mathbf{h}$ et pour tout $b > a > 0$,

$$\int_{a\leq h_n\xi\leq b} |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{C}{\log n}\int_{a\leq h_n\xi\leq b} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}$$

$$\leq \frac{C}{\log n}\int_{a\leq h_n\xi\leq b} \frac{d\xi}{|\xi|^d} \leq \frac{C'}{\log n}\log\left(\frac{b}{a}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

5.2 Lemme de Helly

Théorème 6. *(Lemme de Helly) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée A une extraction près, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f croissante dur I.*

Pour une preuve de ce résultat : [GOUR].

Références

[CHEM] J.-Y. Chemin : Fluides parfaits incompressibles, *Astérisque* **230** (1995) 22-25.

[GOUR] X. Gourdon : *Analyse*, 2^{eme} édition, 235.

[3] P. Gérard : Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev. *ESAIM : Cocv*, **3**, (Mai 1998), 213-233

[4] H. Bahouri, P. Gérard : High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *Am. J. of Math.*, **121**, 1 (1999) 131-175.

[5] J.-Y. Chemin, C.J. Xu : Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **30**, (1997), 721-724.