# Théorème central limite local sur $SL_2(\mathbb{R}$

Nicolas de Saxcé, sous la direction d'Emmanuel Breuillard

10 octobre 2008

## Table des matières

# 1 Introduction au domaine de recherche

Pour une suite de variables $(X_n)$ centrées, la loi des grands nombres affirme que les moyennes de Césaro de $(X_n)$ convergent vers zéro presque sûrement. Si les $X_n$ admettent un moment d'ordre deux $\sigma^2$, on a même, par le théorème central limite, la convergence de $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sigma\sqrt{n}}$ vers une loi normale de variance égale à 1.

Ici, on désire étudier le comportement asyptotique de $P(S_n \in [a,b])$, $a,b \in \mathbb{R}$. Dans le cas des variables à valeurs dans $\mathbb{Z}$ les résultats précédents permettent d'obtenir le résultat suivant :

si les $X_n$ sont des variables identiquement distribuées sur $\mathbb{Z}$, ayant un moment d'ordre deux $\sigma^2$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} P(S_n \in [a,b]) = \frac{b-a}{2\pi\sigma}.$$

C'est un résultat de ce type qu'on appelle théorème central limite local.

En voici un autre exemple, celui auquel est principalement consacré ce mémoire :

**Théorème central limite local sur $SL_2(\mathbb{R})$.** *Soit $\mu$ une probabilité irréductible très étalée sur $SL_2(\mathbb{R})$, avec un moment d'ordre 2. Alors, la suite de mesures $n^{3/2}\sigma(\mu)^n\mu^n$ converge vaguement vers une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Haar.*

# 2 La preuve d'un théorème local

Le schéma de peuve utilisé dans le cas de $SL_2(\mathbb{R})$ est très semblable à celui du cas réel, que nous rappelons donc ici.

## 2.1 Le cas réel

On considère une probabilité $\mu$, sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) = \sigma^2$ et $\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) = 0$. Si $\hat{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des caractères de $\mathbb{R}$ $\{e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, x \in \mathbb{R}\}$ et $F\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e_\lambda(x) d\mu(x)$, alors, pour toute fonction $f$ continue à compact sur G telle que $Ff(x) = \int_{\mathbb{R}} e_\lambda(x) f(x) dx$ est $d\lambda$ intégrable, la formule d'inversion de Fourier nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu^n = (\mu^n * \check{f})(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\check{\mathbb{R}}} F\mu(\lambda)^n Ff(-\lambda) d\lambda,$$

où $\check{f}(x) = f(-x)$ pour tout réel $x$. La démonstration du théorème local se décompose en deux étapes.

**Étape 1.**

Pour simplifier, on suppose que $\mu$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour $\epsilon > 0$, $\sup\{F\mu(\lambda); |\lambda| > \epsilon\} < 1$ (lemme de Riemann-Lebesgue), et :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} f d\mu^n = \int_{|\lambda|<\epsilon} F\mu(\lambda)^n Ff(-\lambda) d\lambda.$$

**Étape 2.**

Au voisinage de l'origine, $F\mu(\lambda) = 1 - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + o(\lambda^2)$, donc, avec le changement de variable $\lambda \mapsto \lambda/\sqrt{n}$, et par convergence dominée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} f d\mu^n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|<\epsilon\sqrt{n}} F\mu\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^n Ff\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $(\sqrt{n}\mu^n)$ converge vaguement vers $\frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

## 2.2 Le cas $SL_2(\mathbb{R})$

### 2.2.1 Représentations de $SL_2(\mathbb{R})$ et transformée sphérique

Pour étudier $SL_2(\mathbb{R})$, on utilise sa décomposition d'Iwasawa, $G = ANK$, où :

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

$$K = SO_2(\mathbb{R}).$$

Cette décomposition permet de décrire la mesure de Haar sur $SL_2(\mathbb{R})$ :

**Théorème 2.1.** *Une mesure de Haar sur $SL_2(\mathbb{R})$ est donnée par :*

$$f \mapsto \int_A \int_N \int_K f(ank) da dn dk.$$

*De plus, si on pose $\alpha(a) = a^2 \in \mathbb{R}_+^*$ (en identifiant la matrice et son premier coefficient diagonal), on a : Pour tout $a \in A$, pour toute fonction $f$ dans $L^1(AN)$,*

$$\int_N f(an)dn = \alpha(a)^{-1} \int_N f(na) da dn.$$

Cette connaissance de la mesure de Haar sur $SL_2(\mathbb{R})$ va nous permettre de définir des représentations utiles de $SL_2(\mathbb{R})$.

**Notation 2.2.** *Pour $g \in G$, s'écrivant $g = ank$ (décomposition d'Iwasawa), on pose : $K(g) = k$, $A(g) = a$ et, si $a = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0^{-1} \end{pmatrix}$, $H(g) = \begin{pmatrix} \ln(a_0) & 0 \\ 0 & -\ln(a_0) \end{pmatrix}$, $\rho(g) = a_0$ et $\tau.H(g) = \ln(a_0)$.*

**Définition 2.3.** *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $g \in G$, on définit $T_g^\lambda$ par :*

$$T_g^\lambda \varphi : k \mapsto e^{-(i\lambda+\tau)H(kg)} \varphi(K(kg)).$$

**Proposition 2.4.** *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $T^\lambda$ est une représentation de $G$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, cette représentation est unitaire.*

Quand $\lambda \in \mathbb{R}$, $T^\lambda_\mu$ décrit exactement l'ensemble des représentations qui interviennent dans la formule de Plancherel sphérique.

**Définition 2.5.** *La* fonction sphérique *associée à la représentation $T^\lambda$ est :*

$$\varphi_\lambda : x \mapsto \int_K \rho(kx)^{i\lambda+1} dk.$$

On remarque que $\varphi_\lambda(x) = \langle T^\lambda_x.1, 1\rangle$.

**Notation 2.6.** *On note $C_c(G//K)$ l'espace des fonctions $f$ continues à support compact sur $G$, bi-invariantes par $K$, i.e. vérifiant :*

$$\forall x \in G, \forall k_1, k_2 \in K, f(k_1 x k_2) = f(x).$$

**Définition 2.7 (Transformée sphérique).** *Pour $f \in C_c(G//K)$, on définit la* transformée sphérique *de $f$ par :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \mathbf{S}f(is) = \int_G f(x)\varphi_s(x)dx.$$

La transformée sphérique est l'analogue pour $SL_2(\mathbb{R})$ de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie les propriétés suivantes.

**Proposition 2.8.** *Si $f$ et $g$ sont deux éléments de $L^1(G//K)$, alors, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,*

1. *$\mathbf{S}(f * g)(\lambda) = \mathbf{S}f(\lambda)\mathbf{S}g(\lambda)$ ;*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $|\mathbf{S}f(i\lambda)| = \|T^\lambda_f 1\| = \|T^\lambda_f\|$ ;*
3. *Si on se restreint à $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{S}f(i\lambda)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers zéro quand $|\lambda|$ tend vers l'infini.*

Comme dans le cas réel, c'est le fait que $\mathbf{S}$ transforme convolution en produit (d'opérateurs) qui permet de simplifier le problème.

Le formule suivante est au centre de la preuve du théorème central limite local, car c'est elle qui permet de passer des représentations aux mesures.

**Théorème 2.9 (Formule de Plancherel sphérique).** *Pour $f \in C_c^\infty(G//K)$, on a :*

$$f(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}f(i\tau)\tau \tanh(\pi\tau)\frac{d\tau}{2\pi}.$$

### 2.2.2 Étude des opérateurs $T^\lambda_\mu$

On suppose à partir de maintenant que $\lambda$ est réel. La proposition qui suit est l'analogue du lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions d'une variable réelle.

**Définition 2.10.** *Si $\mu$ est une mesure sur $G$, on définit l'opérateur $T^\lambda_\mu$ par :*

$$T^\lambda_\mu \varphi = \int_G T^\lambda_g \varphi d\mu(g).$$

C'est l'étude des $T_\mu^\lambda$ et de leurs itérés qui va nous donner des informations sur le comportement asymptotique des puissances de $\mu$.

**Proposition 2.11.** *Si $f \in L^1(G)$, alors $T_f^\lambda$ est un opérateur compact dont la norme tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$.*

Ce résultat s'obtient facilement : en utilisant la décomposition d'Iwasawa, on voit vite que l'opérateur est compact (par le théorème de Riesz-Fréchet-Kolomogorov) et que sa norme tend vers zéro quand $\lambda$ tend vers l'infini (par le lemme de Riemann-Lebesgue classique sur $\mathbb{R}$.

**Notation 2.12.** *Pour une mesure bornée sur $G$, on note $\sigma(\mu)$ le rayon spectral de $T_\mu^0$.*

C'est ce rayon spectral qui détermine principalement le comportement asymptotique de la mesure, comme on le verra dans l'énoncé du théorème local.

**Définition 2.13.** *On dit que la probabilité $\mu$ est :*

- adaptée*, si Supp$\mu$ n'est pas contenu dans un sous-groupe propre fermé de $G$ ;*
- apériodique*, si $\mu$ est adaptée et si Supp$\mu$ n'est pas contenue dans une classe latérale d'un sous-groupe propre fermé distingué de $G$ ;*
- irréductible*, si le semi-groupe fermé engendré par Supp$\mu$ est égal à $G$ ;*
- étalée*, si $\mu$ possède une puissance de convolution qui n'est pas étrangère à la mesure de Haar ;*
- très étalée*, si $\mu$ posséde une puissance de convolution $\mu^n$ dont la partie singulière $\nu$ par rapport à la mesure de Haar vérifie : $\sigma(\nu) < \sigma(\mu)^n$.*

Remarquons que si $\mu$ est étalée, par connexité de $G$, on montre facilement que $\mu$ est apériodique.

**Proposition 2.14.** *Soit $\mu$ est une probabilité très étalée sur $G$.*
*Alors $\sigma(\mu)^{-1}T_\mu^0$ est un opérateur quasi-compact, i.e. il existe un entier $n$ et un opérateur compact $B$ tels que $\|T^n - B\|^r < 1$.*

Cette proposition n'est en fait qu'une généralisation de la précédente, qu'on obtient simplement en utilisant la définition d'une mesure très étalée. C'est elle aussi qui permet d'isoler $\sigma(\mu)$ des autres valeurs propres, car le spectre d'un opérateur quasi-compact n'est pas trop différent de celui d'un opérateur compact.

On en arrive maintenant à un point essentiel de la preuve : la description du spectre de $T_\mu^0$. C'est ce théorème qui permet de comprendre l'importance du rôle de $\sigma(\mu)$.

**Théorème 2.15.** *Soit $\mu$ une probabilité irréductible très étalée sur $G$, alors :*

1. *Les points du spectre de $T_\mu^0$ différents de $\sigma(\mu)$ sont contenus dans une boule de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon strictement inférieur à $\sigma(\mu)$.*
2. *$\sigma(\mu)$ est un pôle d'ordre un de la résolvante de $T_\mu^0$, le noyau de $T_\mu^0 - \sigma(\mu)Id$ est de dimension un et contient une fonction strictement positive presque partout.*
3. *$\sigma(\mu)$ est la seule valeur propre de $T_\mu^0$ admettant un vecteur propre positif.*

L'existence et l'unicité d'une valeur propre de plus grand module proviennent du fait que $T_\mu^0$ est un opérateur positif dont toutes les puissances sont irréductibles, et d'un analogue en dimension infinie du théorème de Perron-Frobenius sur les matrices positives.

**Lemme 2.16.** *Soit $\mu$ une probabilité irréductible étalée sur $G$. Pour toute fonction $f \in C_c^+(G)$ non nulle en l'élément neutre, il existe un entier $r$ et un réel $\alpha > 0$ tels que $\mu^r$ majore $\alpha f.m$ (où $f.m$ est la mesure de densité $f$ par rapport à la mesure de Haar $m$). Si de plus $\mu$ est très étalée, on peut supposer que $\sigma(\mu^r - \alpha f.m)$ est strictement inférieur à $\sigma(\mu)^r$.*

Le théorème 2.15 nous donne immédiatement, par la théorie des perturbations, une description du spectre de $T_\mu^\lambda$ pour $\lambda$ petit.

Pour $\lambda$ dans un voisinage de zéro, le spectre de $T_\mu^\lambda$ admet un unique élément $s(\lambda)$ de plus grand module, l'espace propre associé à $s(\lambda)$ est de dimension un. De plus, $s(\lambda)$ et le projecteur spectral associé sont des fonctions continues de $\lambda$.

Pour continuer, on doit d'abord, comme dans le cas réel, vérifier que les grandes valeurs de $\lambda$ n'ont pas d'influence. On montre donc la proposition suivante :

**Proposition 2.17.** *Soit $\mu$ une mesure irréductible très étalée sur $G$*
*Alors, pour tout voisinage $V$ assez petit de $0$ dans $\mathbb{R}$,*
$\sup_{\lambda \notin V} \sigma(\mu)^{-n} \|T_{\mu^n}^\lambda\|$ *et* $\sup_{\lambda \in V} \sigma(\mu)^{-n} \|Q_\lambda^n\|$ *tendent vers zéro exponentiellement vite quand $n$ tend vers l'infini.*

Puis, il faut étudier plus précisément le comportement de $s(\lambda)$ au voisinage de zéro :

**Proposition 2.18.** *Soit $\mu$ une probabilité irréductible très étalée sur $G$, alors, l'application $s$ est deux fois dérivable en zéro. En ce point, sa dérivée est nulle, et sa dérivée seconde est strictement négative.*

### 2.2.3 Fin de la preuve

Il ne reste ensuite qu'à passer des représentations aux mesures en utilisant l'inversion de la transformée sphérique. Malheureusement, la formule de Plancherel sphérique n'est valable que pour les fonctions bi-invariantes par $K$ et dont la transformée est intégrable, on ne peut donc pas procéder ici comme dans le cas réel.

Mais on montre que c'est la partie de $\mu$ absolument continue par rapport à la mesure de Haar, et bi-invariante par $K$ qui détermine l'asymptotique des itérées de $\mu$, de sorte qu'on peut effectivement appliquer la formule de Plancherel à cette partie, et obtenir le résultat.

**Proposition 2.19.** *Soit $\mu$ une probabilité irréductible très étalée sur $G$, et $(a_n)$ une suite de réels positifs telle que $lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \sigma(\mu)$. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ et $g \in C_c^+(G//K)$ tels que $g(Id) \neq 0$, $\mathbf{S}g$ est $d\gamma$ intégrable, et vérifiant :*

$$\exists \alpha > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \textit{pour toutes mesures bornées } \nu_1 \textit{ et } \nu_2 \textit{ sur } G,$$

$$\left| a_n \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \langle T_{\nu_1}^\lambda T_{\mu^n}^\lambda T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle d\gamma(\lambda) \right| \leq \alpha \|T_{\nu_1}^0\| \|T_{\nu_2}^0\|.$$

*Si de plus $m_\mu$ est une mesure de Radon telle que $m_\mu * \mu = \sigma(\mu) m_\mu$, et si, pour toutes mesures bornées $\nu_1$ et $\nu_2$ sur $G$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \langle T^\lambda_{\nu_1} T^\lambda_{\mu^n} T^\lambda_{\nu_2}.1, T^\lambda_g.1\rangle d\gamma(\lambda) = m_\mu(\check{\nu}_1 * \mu^n * \check{\nu}_2),$$

*alors $(a_n\mu^n)$ converge vaguement vers $m_\mu$.*

Il reste à vérifier que cette proposition s'applique à $SL_2(\mathbb{R}$. Pour cela =, on effectue un calcul très analogue à celui fait dans la section 2.1 (changement de variable $\lambda \to \lambda/\sqrt{n}$, etc.). On obtient alors l'expression de la suite $(a_n)$, et la description de $m_\mu$ :

**Théorème 2.20.** *Soit $\mu$ une probabilité irréductible très étalée sur $G$, avec un moment d'ordre 2. Alors,*

1. *Pour tout compact $C$ de $G$, il existe $c > 0$ tel que, pour toutes mesures positives bornées $\nu_1$ et $\nu_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(\nu_1 * \mu^n * \nu_2)(C) \leq \frac{c}{n^{3/2}} \sigma(\mu)^n \|T^0_{\nu_1}\| \|T^0_{\nu_2}\|$$

2. *Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute fonction $f \in C_c(G)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\mu)^{-n} n^{3/2} \int_G f d\mu^n = k \int_G f dm_\mu,$$

*où $m_\mu$ est la mesure sur $G$ de densité $d(g) = \langle T^0_{g^{-1}}\varphi_0, \varphi_1\rangle$ par rapport à la mesure de Haar, $\varphi_0$ et $\varphi_1$ étant des vecteurs propres associés à $\sigma(\mu)$ pour $T^0_\mu$ et $(T^0_\mu)^*$, respectivement.*

# 3 Problème ouvert : $SL_2(\mathbb{R})$ mesures apériodiques avec moment fini

Si on n'impose pas de condition sur les moments de $\mu$, l'hypothèse $\mu$ très étalée est nécessaire à la validité du théorème, comme le montre un contre-exemple dû à P.Bougerol [1].

Mais dans le cas réel, on a un théorème central limite local sans hypothèse d'absolue continuité, pourvu que $\mu$ soit apériodique, et admette un moment d'ordre deux.

On aimerait avoir aussi un tel résultat dans le cas de $SL_2(\mathbb{R})$, mais la preuve donnée précédemment ne fonctionne pas. En effet, si $\mu$ n'est pas très étalée, $T^\lambda_\mu$ n'a aucune raison d'être quasi-compact (donc on perd toutes les informations sur son spectre), et le lemme 2.16 n'est plus valide. Il faut donc changer la quasi-totalité de la preuve.

# Bibliographie


1. P. Bougerol, *Théorème central limite local sur certains groupes de Lie* (*Annales scientifiques de l'E.N.S. 4ème série*, tome 14, nř4 (1981), p. 403-432.)
2. S. Lang, $SL_2(\mathbb{R})$, Addison Wesley, Reading, 1975.
3. N. Dunford et T. Schwarz, *Linear Operators*, part. I, Interscience, New York, 1953.
4. H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.