L'oscillateur harmonique non linéaire à conditions initiales aléatoires

Anne-Sophie de Suzzoni,
sous la direction de Nikolay Tzvetkov et Nicolas Burq

16 octobre 2009

On va s'intéresser à l'équation de Gross-Pitaevskii à potentiel harmonique, c'est-à-dire à une équation de Schrödinger non linéaire dont la non linéarité est en $|u|^2u$. Cette équation modélise l'évolution des condensats de Bose Einstein dans des gaz dilués. On va chercher à construire une mesure sur des espaces de fonctions invariante par le flot de Gross-Pitaevskii telle qu'il existe un ensemble de conditions initiales de mesure pleine pour lequel on a l'existence de solution globale.

Remarquons dès à présent qu'a priori, le flot n'est pas défini.

La théorie déterministe nous fournit un flot local grâce à un outil utile également dans la cas stochastique : l'inégalité de Strichartz. Cependant, on utilise de surcroît des arguments probabilistes pour définir le flot, même local, avec conditions initiales aléatoires.

On commencera par poser le problème et donner quelques intuitions sur les condensats de Bose-Einstein. Puis on essaiera d'obtenir le maximum d'information sur les solutions de l'équation de Schrödinger, avant de se concentrer sur l'étude déterministe puis la construction de mesure pour le cas stochastique.

Table des matières

1 Position du problème et condensats de Bose-Einstein **3**

1.1 Condensation de Bose-Einstein sans interaction entre bosons 4

1.2 Introduction des interactions 4

2 Equation de Schrödinger linéaire **5**

2.1 Interprétation physique 5

2.2 Fonctions de Hermite 5

2.3 Solution générale, inégalité de Strichartz 6

2.4 Formule de Mehler 7

3 Introduction de la non linéarité, cas déterministe **8**

4 Mesures de Gibbs et problème stochastique **9**

4.1 Invariance de l'équation linéaire sous la mesure μ 9

4.2 Cas défocalisant 13

4.3 Cas focalisant 13

4.3.1 Définition de l'approximation 14

4.3.2 Convergence de F_N et G_N. 14

4.3.3 Intégrabilité de G 16

1 Position du problème et condensats de Bose-Einstein

On cherche à étudier l'existence de solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - |x|^2 u = \kappa |u|^2 u \, , & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Il s'agit du problème de l'oscillateur harmonique (quantique) non-linéaire en dimension 1. L'opérateur Δ désigne le laplacien, égal à ∂_x^2 en dimension 1.

Le cas $\kappa = 1$ est appelé cas défocalisant (il correspond à des interactions répulsives), le cas $\kappa = -1$ est appelé cas focalisant.

Par la suite, nous allons considérer le problème déterministe ($u_0 \in L^2$) puis stochastique, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre pour condition initiale une fonction $u_0 \in L^2$ donnée, on prendra une répartition u_0^ω, $\omega \in \Omega$ à valeurs dans un espace Σ dont les éléments ne sont pas dans L^2 et donc requièrent un traitement différent du cas déterministe, sur lequel on dispose d'une mesure ρ invariante par le flot de l'équation (1). On aura alors l'existence presque partout de solutions globales.

Plus précisément, définissons quelques notions et donnons les résultats principaux (voir [9] et [4]).

Définition 1.1. Commençons par noter le hamiltonien $H = -\Delta + x^2$.

Définition 1.2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$, on note $\mathcal{W}^{s,p}$ l'ensemble des distributions u pour lesquelles $H^{s/2}u$ appartient à $L^p(\mathbb{R})$. On définit sur cet espace la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \|H^{s/2}u\|_{L^p}.$$

Pour $p = 2$, on pose $\mathcal{H}^s = \mathcal{W}^{s,2}$, espace de Sobolev normé par $\|u\|_{\mathcal{H}^s} = \|H^{s/2}u\|_{L^2}$.

Théorème 1.3. *Il existe une mesure ρ définie sur l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que :*

- *la mesure ρ soit absolument continue par rapport à une mesure gaussienne sur $\mathcal{H}^s$ pour tout $s < 0$,*
- $\rho(L^2(\mathbb{R})) = 0$,
- *$\mathcal{H}^s$ et L^p , $s < 0$, $p > 2$ soient de mesure pleine,*
- *le flot $\Phi(t)$ de (1) soit globalement défini presque partout et que ρ soit invariante par ce flot,*
- *on a une estimation de la norme $\mathcal{H}^s$ en fonction du temps, il existe une constante C telle que presque partout on ait une constante A vérifiant*

$$\|\Phi(t)u_0\|_{\mathcal{H}^s} \leq C log(A + t)^{1/2}$$

de plus,

$$\rho(\{u_0 \mid A(u_0) > \lambda\}) \leq Ce^{-C\lambda^2}.$$

Dans la suite, on ne démontrera pas ce théorème en entier mais on cherchera à construire la mesure ρ ainsi présentée. La construction de cette mesure se base sur la conservation de l'énergie. Or, dans le cas focalisant, la contribution à l'énergie du terme non linéaire est de signe opposé à celle du terme linéaire, ce qui pose des problèmes d'intégrabilité que nous traiterons.

L'origine physique de l'équation de Schrödinger non linéaire à potentiel harmonique provient de l'étude des condensats de Bose-Einstein piégés dans un potentiel extérieur harmonique.

1.1 Condensation de Bose-Einstein sans interaction entre bosons

Ce phénomène de condensation apparaît quand on piège un certain nombre de particules dont le comportement statistique est bosonique (des atomes de Rubidium, de Sodium ou de Lithium par exemple) dans un potentiel, et à basse température.

Le nombre moyen d'occupation d'un état ν (état propre du Hamiltonien à une particule) est donné, en statistique bosonique, par :

$$n_\nu = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/kT} - 1}$$

où ϵ_ν désigne l'énergie de l'état, μ le potentiel chimique, k la constante de Bolztman, et T la température. Le potentiel chimique est contraint, pour conserver un sens physique, d'être inférieur à ϵ_{min} la valeur minimale de l'énergie d'une particule.

Lorsque la température baisse, le potentiel chimique augmente sans pour autant dépasser ϵ_{min}, si bien que n_ν pour ν différent de l'état fondamental, tend vers 0, il ne peut plus y avoir de particules dans les états excités, on assiste à un phénomène de condensation de Bose-Einstein : toutes les particules sont dans l'état fondamental.

1.2 Introduction des interactions

Bien que l'état du système à N bosons ne peut pas évoluer, selon les règles de la mécanique quantique, de façon non linéaire, l'approximation de champ moyen permet d'introduire cette non-linéarité.

L'étude précédente nous informe que, si l'on ne considère pas les interactions entre particules, elles se mettent toutes l'état fondamental. On suppose que les interactions ont une longueur caractéristique très petite devant la distance moyenne entre deux particules. Leurs effets sur la fonction d'onde du système sont alors considérés comme d'un ordre inférieur à la fonction d'onde du fondamental, et on fait l'approximation suivante : si $\Psi(r_1, \dots, r_N)$ désigne la fonction d'onde du système à N particules, on écrit $\Psi(r_1, \dots, r_N) = \phi(r_1) \dots \phi(r_N)$. On appelle cette approximation l'approximation de champ moyen. Le Hamiltonien du système s'écrit quant à lui $H = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V(r_i) + \sum_{i<j} W(r_i - r_j)$, où V est le potentiel extérieur et W le potentiel d'interaction entre particules. On en déduit l'énergie du système :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\int dr_1 \dots dr_N \Psi^\dagger(r_1, \dots, r_N) H \Psi(r_1, \dots, r_N)\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{N}{2}\int dr \phi^\dagger(r)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right)\phi(r) + \frac{N(N-1)}{4}\int dr dr' \phi^\dagger(r)\phi^\dagger(r')W(r-r')\phi(r)\phi(r')$$

Les interactions peuvent être décrites par $W(r - r') = W_0\delta(r - r')$. En posant $u = \sqrt{N}\phi$ et avec l'approximation pour $N \gg 1$, $\frac{N(N-1)}{2} = N^2/2$, on a :

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\left(\int dr\left(\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla u|^2 + V(r)|u|^2 + \frac{W_0}{2}|u|^4\right)\right).$$

Pour obtenir un condensat harmonique unidimensionnel, comme pour l'équation qui nous intéresse, les distances caractéristiques de variation selon z et y par exemple doivent être très grandes devant celle selon x. Cela correspond, si l'on choisit de prendre un potentiel extérieur harmonique $V = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2$, à des pulsations ω_y et ω_z très petites devant ω_x, d'où

$V \sim \frac{m}{2}\omega_x^2 x^2$. On se retrouve bien avec un problème unidimensionnel de minimisation de l'action avec pour énergie correspondante :

$$\mathcal{E}(u) = \int dx \frac{1}{2}(\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla u|^2(x) + \frac{m\omega_x^2}{2}x^2|u(x)|^2) + \frac{1}{4}W_0|u|^4(x)$$

En prenant toutes les constantes $\frac{\hbar^2}{2m} = \frac{m\omega_x^2}{2} = W_0 = 1$ et $\hbar = 1$, on obtient que u doit vérifier l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\partial_t u + \Delta u - x^2 u = |u(x)|^2 u.$$

Remarque 1.1. *Le cas focalisant correspondrait à $W_0 = -1$, autrement dit, à des interactions entre bosons infiniment attractives à courte distance.*

2 Equation de Schrödinger linéaire

Commençons par nous intéresser au problème linéaire. L'équation :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - |x|^2 u = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

se résout en diagonalisant l'opérateur $H = -\Delta + |x|^2$, les solutions étant des superpositions linéaires de ses fonctions propres.

Les fonctions propres de H sont appelées les fonctions de Hermite. Nous allons voir à quoi elles correspondent en physique et donner quelques estimations de leurs normes L^p.

2.1 Interprétation physique

On considère donc le hamiltonien $H' = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(-\Delta + |x|^2)$. La base de solutions de (2) devient les

$$e^{-iEt}\psi_E(x)$$

où ψ_E vérifie $H\psi_E = E\psi_E$.

Ce hamiltonien correspond au petites oscillations d'une particule plongée dans un potentiel dit harmonique, c'est-à-dire en x^2. Il se récrit sous la forme $H' = a^\dagger a + \frac{1}{2}$, où $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})$ est un opérateur dit d'annihilation et $a^\dagger$ son adjoint est un opérateur dit de création.

Si on appelle ϕ_0 le vecteur de norme 1 du noyau de a, tout vecteur propre de H se met sous la forme $\phi_n = (a^\dagger)^n\phi_0$ et vérifie $H\phi_n = (n+\frac{1}{2})\phi_n$. Autrement dit, chaque application de $a^\dagger$ correspond à augmenter l'énergie du système d'une quantité unitaire. Appliquer $a^\dagger$ revient à créer un photon, c'est pourquoi on parle d'opérateur de création.

2.2 Fonctions de Hermite

Diagonalisons H.

Définition 2.1. Soit $(h_n)_n \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ la famille de fonctions définie par :

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}} e^{-x^2/2} (\frac{d^n e^{z^2}}{dz^n})(x) \ . \tag{3}$$

Cette famille est une base orthonormée de diagonalisation de H. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$Hh_n = (2n+1)h_n \ .$$

Afin d'alléger les notations, on pose :

Définition 2.2. λ_n la racine carrée de la n-ème valeur propre de H, ie

$$\begin{cases} \lambda_n = \sqrt{2n+1} \\ Hh_n = \lambda_n^2 h_n \end{cases} \tag{4}$$

Donnons également quelques estimations de norme utiles pour la suite des fonctions de Hermite.

Proposition 2.3. *Pour tout $p \geq 4$, il existe une constante $C(p)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|h_n\|_{L^p} \leq C(p)\lambda_n^{-\frac{1}{6}}$$

ainsi que pour tout n et $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\|h_n h_m\|_{L^2} \leq Cln(max(\lambda_n, \lambda_m))^{1/2}(max(\lambda_n, \lambda_m))^{-\frac{1}{2}}.$$

2.3 Solution générale, inégalité de Strichartz

La solution générale de

$$\begin{cases} i\partial_t u + Hu = 0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

se met sous la forme $e^{itH}u_0$, où e^{itH} est un opérateur sur les distributions. Plus précisément, nous allons voir que cet opérateur est continu sur certains espaces de fonctions.

Définition 2.4. Soit p et $q \in [1, \infty]$. On dit que le couple (p, q) est admissible si

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$

et $p \geq 4$.

Proposition 2.5. *Pour tous couples admissibles (p, q) et $(\widetilde{p}, \widetilde{q})$, il existe une constante C telle que si u vérifie :*

$$\begin{cases} i\partial_t u + Hu = f \\ u(0,.) = u_0 \end{cases},$$

alors

$$\|u\|_{L^p_t, L^q_x} \leq C(\|u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^{\widetilde{p}'}_t, L^{\widetilde{q}'}_x})$$

où $\widetilde{p}'$ et $\widetilde{q}'$ sont les conjugués de $\widetilde{p}$ et $\widetilde{q}$ respectivement, c'est-à-dire qu'ils vérifient $\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{p}'} = 1$.

2.4 Formule de Mehler

Afin de comprendre d'où vient l'inégalité de Strichartz, nous allons voir quelques propriétés de continuité de l'opérateur $S(t) = e^{itH}$. Tout d'abord, les valeurs propres de H étant toutes entières, l'opérateur S est 2π périodique, on peut donc, pour une étude locale, se limiter aux temps $0 \leq t < 2\pi$. De plus, si u est solution de l'equation :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = f_1 + f_2 & f_1 \in L_t^1([0,2\pi], L_x^2),\ f_2 \in L_t^{4/3}, L_x^2 \\ u(0,x) = u_0(x) & u_0 \in L_x^2 \end{cases} \tag{5}$$

alors u se met sous la forme $u(t,x) = S(t)u_0 + \int_{s=0}^t S(t-s)(f_1+f_2)(s)ds$.

Intéressons-nous au terme $S(t)u_0$.

Proposition 2.6. *Pour tout* $0 \leq t < 2\pi$*, on a :*

$$\|S(t)u_0\|_{L_t^\infty, L_x^2} + \|S(t)u_0\|_{L_t^4, L_x^\infty} \leq C\|u_0\|_{L_x^2}.$$

Remarquons qu'en ayant majoré les normes L_t^∞, L_x^2 et L_t^4, L_x^∞, on obtient les majorations pour tous les couples admissibles par interpolation. En effet, $(\infty, 2)$ et $(4, \infty)$ sont les couples admissibles "extrémaux", et on a pour tout (p,q) admissible : comme $p \geq 4$, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{4} + \frac{1-\theta}{\infty}$ et pour tout g :

$$\|g(t,.)\|_{L_x^p} \leq C\|g(t,.)\|_{L^4}^\theta \|g(t,.)\|_{L^\infty}^{1-\theta}$$

et donc

$$\|g\|_{L_t^q, L_x^p} \leq C\|g\|_{L_t^\infty, L_x^4}^\theta \|g\|_{L_t^{q(1-\theta)}, L_x^\infty}^{1-\theta}$$

Or, (p,q) est admissible, donc $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2q}$ et donc $q(1-\theta) = 2$. D'où,

$$\|g\|_{L_t^q, L_x^p} \leq C\|g\|_{L_t^\infty, L_x^4}^\theta \|g\|_{L_t^2, L_x^\infty}^{1-\theta} \leq C\|u_0\|_{L^2}.$$

Preuve.

La première inégalité ($\|S(t)u_0\|_{L_t^\infty, L_x^2} \leq C\|u_0\|_{L_x^2}$) est conséquence de la conservation de la norme L^2. La deuxième correspond à la continuité de S de L_x^2 dans L_t^4, L_x^∞.

Or, L_x^1 est dense dans le dual de L_x^∞ et donc $L_t^{4/3}, L_x^1$ est dense dans $L_t^{4/3}, L_x^{\infty'}$ dual de L_t^4, L_x^∞. On est donc ramené à étudier la continuité de S^* de $L_t^{4/3}, L_x^1$ dans L_x^2 (égal à son dual).

Soit $f \in L_t^{4/3}, L_x^1$, on a

$$\|S^* f\|_{L^2}^2 = (SS^* f, f).$$

Si SS^* est continue de $L_t^{4/3}, L^1$ dans L_t^4, L_x^∞, on a bien le résultat escompté. Voyons quelle forme prend l'opérateur SS^*. Soit χ, C^∞ à support compact.

$$(S^* f, \chi) = (f, S\chi) = \int ds (f, S(s)\chi) = \int ds (S(-s)f(s), \chi) = (\int ds S(-s)f(s), \chi)$$

donc $SS^* f = S(t)\int ds S(-s)f(s) = \int ds S(t-s)f(s)$.

Donnons la formule du noyau intégrable pour $S(t)$.

Lemme 2.7. Formule de Mehler *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2_x$. $S(t)f$ se met sous la forme $S(t)f(x) = \int K(x,y,t)f(y)dy$ avec*

$$K(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi|\sin(2t)|}} e^{\frac{i}{\sin(2t)}(\frac{x^2+y^2}{2}\cos(2t)-xy)}.$$

Preuve du lemme. Afin de se convaincre que K est le noyau intégrable de $S(t)$, dérivons formellement K et vérifions que $(i\partial_t + \partial_x^2 - x^2)K = 0$.

$$\begin{array}{lcl}
\partial_t K & = & -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}K + i(\frac{x^2+y^2}{2}\frac{-2}{\sin^2(2t)} + xy\frac{2\cos(2t)}{\sin^2(2t)})K \\
 & = & (-\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)} - i\frac{x^2+y^2}{\sin^2(2t)} + 2ixy\frac{\cos(2t)}{\sin^2(2t)})K \\
\partial_x K & = & (ix\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)} - i\frac{y}{\sin(2t)})K \\
\partial_x^2 K & = & \left[-(x\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)} - \frac{y}{\sin(2t)})^2 + i\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\right]K \\
 & = & \left[-x^2\frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(2t)} + 2xy\frac{\cos(2t)}{\sin^2(2t)} - \frac{y^2}{\sin^2(2t)} + i\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\right]K \\
\partial_x^2 K - x^2 K & = & \left(-\frac{x^2+y^2}{\sin^2(2t)} + 2xy\frac{\cos(2t)}{\sin^2(2t)} + i\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\right)K \\
 & = & -i\left(-i\frac{x^2+y^2}{\sin^2(2t)} + 2ixy\frac{\cos(2t)}{\sin^2(2t)} - \frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\right)K
\end{array}$$

Finalement, $i\partial_t K + \partial_x^2 K - x^2 K = 0$. Il reste à voir que $K(x,y,t)$ tend vers $\delta(x-y)$ quand t tend vers 0.

Retour à la preuve de la proposition.

On doit montrer que SS^* est continue de $L_t^{4/3}, L^1$ dans L_t^4, L_x^∞. Soit $f \in L_t^{4/3}, L^1$. Avec la formule du noyau intégrable, on obtient :

$$SS^*f(x,t) = \int_{s=0}^{2\pi} dsS(t-s)f(s) = \int_{s=0}^{2\pi} ds \int dyK(x,y,t-s)f(s,y)$$

donc $\|SS^*f(.,t)\|_{L_x^\infty} \le \int dsdy\frac{1}{\sqrt{4\pi|\sin(t-s)|}}|f(s,y)|$, $\|SS^*f(.,t)\|_{L_x^\infty} \le C\int ds\frac{1}{\sqrt{|t-s|}}\|f(s,.)\|_{L_x^1}$.

Pour compléter la démonstration, il nous reste à énoncer un lemme.

Lemme 2.8. Sobolev-Hardy-Littlewood *Soit $2 < p \le \infty$. L'opérateur $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} ds\frac{1}{|.-s|^{2/p}}u(s)$ est continu de $L^{p'}$ dans L^p.*

On déduit de ce lemme appliqué avec $p = 4$ que pour toute $u \in L_s^{4/3}$, $\|\int_{s=0}^{2\pi} ds\frac{1}{|t-s|^{1/2}}u(s)\|_{L_t^4} \le C\|1_{0<s<2\pi}u(s)\|_{L_s^{4/3}} \le C\|u\|_{L_s^{4/3}}$. Or, $f \in L_s^{4/3}, L_x^1$ donc $s \mapsto \|f(.,s)\|_{L_x^1} \in L_s^{4/3}$. On en déduit :

$$\|SS^*f\|_{L_t^4,L_x^\infty} \le C\|f\|_{L_t^4,L_x^1}$$

donc SS^* est bien continue de L_t^4, L_x^1 dans L_t^4, L_x^∞.

3 Introduction de la non linéarité, cas déterministe

L'inégalité de Strichartz sert en particulier à démontrer le théorème d'existence globale suivant :

Théorème 3.1. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un temps T dépendant uniquement d'une majoration de la norme $\|u_0\|_{L^2}$ tel qu'il existe une unique solution $u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R})) \cap L^4_{loc}([0,T], L^\infty(\mathbb{R}))$ de :*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - x^2 u = \pm|u|^2 u \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

vérifiant (conservation de la masse) $\|u(t,.)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$.

De plus, on a l'existence globale de solution.

En effet, il résulte d'un théorème du point fixe appliqué à

$$J : u \mapsto S(t)u_0 + \int_0^t ds S(t-s)(|u|^2 u)$$

et on peut majorer les normes $\| \ . \ \|_{C([0,T],L^2(\mathbb{R}))}$ et $\| \ . \ \|_{L^4_{loc}([0,T],L^\infty(\mathbb{R}))}$ de $J(u)$ en fonction de celles de u grâce à l'inégalité de Strichartz.

4 Mesures de Gibbs et problème stochastique

4.1 Invariance de l'équation linéaire sous la mesure μ

A partir de maintenant, nous nous plaçons dans le cas stochastique. On va chercher à définir une mesure ρ invariante par le flot de (1) si un tel flot existe.

La première étape consiste à construire une mesure μ invariante par le flot de l'équation de Schrödinger linéaire.

Soit E_N l'espace vectoriel complexe engendré par l'ensemble $\{h_n \mid n = 0 \dots N\}$, et Π_N le projecteur associé à E_N, ie :

$$\Pi_N(\sum c_n h_n) = \sum_{n=0}^{N} c_n h_n.$$

Soit également χ_0 une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ à support compact telle que :

$$\chi_0 \begin{cases} = 0 & \text{en dehors de } [-1,1] \\ = 1 & \text{sur } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \in [0,1] & \end{cases}$$

On pose alors S_N l'opérateur tel que

$$S_N(\sum c_n h_n) = \sum \chi_0(\frac{n}{N}) c_n h_n.$$

On a $\Pi_N S_N = S_N \Pi_N = S_N$ et $S_N^* = S_N$.

Définition 4.1. Pour tout $N \geq 1$, on note μ_N la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ définie par :

$$d\mu_N = d_N \Pi_{n=0}^N e^{-\frac{\lambda_n^2}{2}(a_n^2+b_n^2)} da_n db_n$$

où da_n, db_n sont des mesures de Lebesgue et d_N un facteur de normalisation, ie

$$\frac{1}{d_N} = \Pi_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\lambda_n^2}{2}(a_n^2+b_n^2)} da_n db_n = (2\pi)^{N+1} \Pi_{n=0}^N \frac{1}{2n+1}.$$

La mesure μ_N définit une mesure sur E_N, notée également μ_N, à travers l'application

$$\Theta_N : (a_n, b_n)_{n=0}^N \mapsto \sum_{n=0}^N (a_n + ib_n)h_n.$$

Proposition 4.2. *Soit Ω, P un espace de probabilité et g_n pour $n = 0$ à N des gaussiennes complexes centrées de variance 1 indépendantes sur Ω, la mesure image P' de P à travers l'application*

$$\omega \mapsto \sum_{n=0}^N \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n(\omega)h_n = \phi_N(\omega)$$

est égale à μ_N.

Preuve. On a $\phi_N(\omega) = \Theta_N((\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n(\omega))_{n=0}^N)$.

Or, les g_n étant des gaussiennes complexes, centrées et indépendantes et de variance 1, $(\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n)_{n=0}^N$ est une gaussienne de dimension complexe $N + 1$ de matrice de covariance

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0^2/2 & & \\ (0) & \ddots & (0) \\ & & \lambda_N^2/2 \end{pmatrix}$$

autrement dit, la loi de $(\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n)_{n=0}^N$ est $d_N \prod_{n=0}^N \frac{\lambda_n^2}{2\pi} e^{-\frac{\lambda_n^2}{2}|a_n+ib_n|^2} da_n db_n = d\mu_N$.
On a bien $P' = \mu_N$.

Soit $\sigma > 0$. La suite ϕ_N est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}))$.

En effet, soit n et p deux entiers positifs, on a :

$$\|\phi_{n+p} - \phi_n\|_{L^2,\mathcal{H}^{-\sigma}} = \|\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \frac{2}{\lambda_k^{2(1+\sigma)}} |g_n|^2}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \frac{2}{(2n+1)^{1+\sigma}}}$$

or, $\frac{2}{(2n+1)^{1+\sigma}}$ est le terme général d'une série convergente, donc la suite ϕ_N est bien une suite de Cauchy. Elle converge dans $L^2_\omega, \mathcal{H}^{-\sigma}_x$ vers une limite $\phi = \sum_{n=0}^\infty \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n h_n$.

On dispose alors d'une mesure μ sur $\mathcal{H}^{-\sigma}$ définie via l'application :

$$\omega \mapsto \phi(\omega, .).$$

Proposition 4.3. *Soit $p \geq 4$, pour presque tout ω, $\phi(\omega, .)$ appartient à L^p.*

Preuve. Montrons que $\mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|S_N u\|_{\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R})} > \lambda) \leq Ce^{-c\lambda^2}$.

Lemme 4.4. *Pour tout $(c_n) \in l^2$,*

$$\|\sum g_n c_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C\sqrt{q}(\sum |c_n|^2)^{1/2}.$$

Preuve du lemme.

$$\|\sum g_n c_n\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_{y=0}^{\infty} q y^{q-1} P(|\sum g_n c_n| > y)$$

Majorons $P(|\sum g_n c_n| > y)$.

Commençons par séparer $\sum g_n c_n$ en parties réelle et imaginaire. On pose $g_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_n + i w_n)$, où v_n et w_n sont des gaussiennes réelles centrées indépendantes de variances 1 et $c_n = a_n + i b_n$ avec (a_n) et $(b_n) \in l^2$. On a

$$|\sum g_n c_n| = |\frac{1}{\sqrt{2}} \sum (v_n a_n - w_n b_n) + i(v_n b_n + w_n a_n)|.$$

Par inégalité triangulaire, si $|\sum g_n c_n| > y$ alors ou bien $|\sum v_n a_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}$, ou bien $|\sum v_n b_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}$, ou bien $|\sum w_n a_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}$, ou enfin $|\sum w_n b_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}$.

$$P(|\sum g_n c_n| > y) \leq P(|\sum v_n a_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}) + P(|\sum w_n a_n|$$

$$> \frac{\sqrt{2}y}{4}) + P(|\sum v_n b_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}) + P(|\sum w_n b_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4})$$

On est donc ramené à majorer $P(|\sum v_n a_n| > \frac{\sqrt{2}y}{4}) = P(\sum v_n a_n > \frac{\sqrt{2}y}{4}) + P(-\sum v_n a_n > \frac{\sqrt{2}y}{4})$. Posons $y' = \frac{\sqrt{2}y}{4}$.

$P(\sum v_n a_n > y') = P(e^{t\sum a_n v_n|} > e^{ty'})$ pour tout $t > 0$. Or,

$$e^{ty'} P(e^{t\sum a_n v_n} > e^{ty'}) \leq E(e^{t\sum a_n v_n})$$

Par indépendance des v_n,

$$e^{ty'} P(e^{t\sum a_n v_n} > e^{ty'}) \leq \prod_n E(e^{t a_n v_n})$$

et comme les v_n sont des gaussiennes,

$$e^{ty'} P(e^{t\sum a_n v_n} > e^{ty'}) \leq \prod_n e^{t^2|a_n|^2/2} \leq \prod_n e^{t^2|c_n|^2/2}$$

On a donc :

$$P(e^{t\sum a_n v_n|} > e^{ty'}) \leq e^{t^2\sum|c_n|^2/2 - ty'}$$

Pour $t = \frac{y'}{\sum|c_n|^2}$, on obtient :

$$P(\sum a_n v_n > y') \leq e^{-\frac{y'^2}{2\sum|c_n|^2}}.$$

En remplaçant les a_n par des $-a_n$, on a $P(-\sum a_n v_n > y') \leq e^{-\frac{y'^2}{2\sum|c_n|^2}}$, ce qui en sommant les différents termes nous donne $P(|\sum c_n g_n > y) \leq 8e^{-\frac{y^2}{16\sum|c_n|^2}}$.

On en déduit :

$$\|\sum g_n c_n\|^q_{L^q(\Omega)} \leq 8\int_{y=0}^{\infty} q y^{q-1} e^{-\frac{y^2}{16\sum|c_n|^2}}$$

Par changement de variable, $x = \frac{y}{\sqrt{8\sum|c_n|^2}}$,

$$\|\sum g_n c_n\|^q_{L^q(\Omega)} \leq 8\int_{x=0}^{\infty} q(\sqrt{8\sum|c_n|^2})^q e^{-x^2/2} x^{q-1} dx$$

$$\leq 8q(\sqrt{8\sum|c_n|^2})^q \int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{q-1} dx$$

puis par intégration par parties, on a pour $q \geq 3$:

$$\int e^{-x^2} x^{q-1} dx = \left[-e^{-x^2} x^{q-2}\right]_0^{\infty} + \int (q-2) x^{q-3} e^{-x^2} dx \leq q\int (q-2) x^{q-3} e^{-x^2} dx$$

En posant $C = \max\{\frac{q\int e^{-x^2} x^{q-1} dx}{q^{q/2}} \mid q \in [1,3]\}$, on obtient :

$$\|\sum g_n c_n\|^q_{L^q(\Omega)} \leq C q^{q/2} (\sqrt{\sum|c_n|^2})^q$$

$$\|\sum g_n c_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C\sqrt{q\sum|c_n|^2}.$$

On en déduit une majoration de $\|f\|_{L^q_\omega, L^p_x}$, où $f = \sum \chi(\frac{n}{N})\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^{1-s}} g_n h_n$, pour $q \geq p$.

On a, comme $q \geq p$:

$$\|f\|_{L^q_\omega, L^p_x} \leq \|f\|_{L^p_x, L^q_\omega}$$

Or, d'après le lemme précédent,

$$\|f\|_{L^q_\omega} \leq C\sqrt{q\sum \chi(\frac{n}{N})^2 \frac{2}{\lambda_n^{2(1-s)}} |h_n|^2}$$

$$\|f\|_{L^q_\omega, L^p_x} \leq C\sqrt{q\sum \frac{2}{(2n+1)^{1-s}} \|h_n\|^2_{L^p}}$$

$$\leq C\sqrt{q\sum \frac{2}{(2n+1)^{1-s+1/6}}} \leq C'\sqrt{q}.$$

Tant que $s < 1/6$, $\frac{1}{(2n+1)^{1+1/6-s}}$ est le terme général d'une série convergente.

Or, on a

$$P(\|f\|_{L^p} > \Lambda) = P(\|f\|^q_{L^p} > \Lambda^q) \leq \|f\|^q_{L^q_\omega, L^p_x}/\Lambda^q$$

$$P(\|f\|_{L^p} > \Lambda) \leq C q^{q/2}/\Lambda^q$$

En choisissant $q = \max(p, \frac{\Lambda^2}{e})$ et $c < \frac{e}{2}$, on obtient

$$P(\|f\|_{L^p} > \Lambda) \leq C e^{-c\Lambda^2}$$

Par passage à la limite, comme les constantes sont indépendantes de N, on a :

$$P(\|\phi\|_{\mathcal{W}^{s,p}} > \Lambda) \leq Ce^{-c\Lambda^2}$$

autrement dit, pour presque tout ω, ϕ appartient à $\mathcal{W}^{s,p}$ et donc dans le cas particulier, $s = 0$, à L^p.

4.2 Cas défocalisant

Rappelons la forme de l'énergie conservée pour le cas défocalisant. On avait :

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\overline{u}(x)Hu(x) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} dx\,|u(x)|^4. \tag{6}$$

Posons

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_l + \frac{\|u\|_{L^4}^4}{4}$$

Or, $d\mu_N(u = \sum(a_n + ib_n)h_n = d_N e^{-\frac{1}{2}\sum(a_n^2+b_n^2)\lambda_n^2}\prod da_n db_n$.
Autrement dit, $d\mu_N(u) = d_N e^{-\mathcal{E}_l(u)} da_n db_n$. On s'imagine μ de la forme :

$$d\mu(u) = de^{-\mathcal{E}_l(u)}\prod da_n db_n.$$

$\mathcal{E}_l$ est l'énergie invariante par le flot de l'équation de Schrödinger linéaire. Pour avoir une mesure invariante par le flot de l'équation de Schrödinger non linéaire, il faut remplacer $\mathcal{E}_l$ par $\mathcal{E}$. C'est-à-dire avoir une mesure “de la forme” :

$$d\rho(u) = de^{-\mathcal{E}(u)}\prod da_n db_n.$$

On pose donc

Définition 4.5. On appelle mesure de Gibbs dans le cas défocalisant la mesure ρ sur $\mathcal{H}^{-\sigma}$ par :

$$d\rho(u) = e^{-\frac{\|u\|_{L^4}^4}{4}} d\mu(u).$$

On définit également sur E_N,

$$d\widetilde{\rho_N}(u) = e^{-\frac{\|S_N u\|_{L^4}^4}{4}} d\mu_N(u).$$

Cette mesure tend vers ρ quand N tend vers ∞.

Remarque 4.1. *Comme $P(\|\phi\|_{L^4_x} > \Lambda) \leq Ce^{-c\Lambda^2}$, la mesure ρ est une mesure finie.*

4.3 Cas focalisant

On voudrait pouvoir poser comme mesure de Gibbs, par analogie avec le cas défocalisant :

$$d\rho(u) = e^{\frac{1}{4}\|u\|_{L^4}^4} d\mu(u)$$

malheureusement, il faut s'assurer de l'intégrabilité de $u \mapsto e^{\frac{1}{4}\|u\|_{L^4}^{r+1}}$.

Cet objet n'étant pas intégrable, on va approcher dimensionellement la mesure de Gibbs.

4.3.1 Définition de l'approximation

Définition 4.6. On pose

$$d\rho_N = \chi(\|\Pi_N u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \alpha_N) e^{\frac{1}{4}\|S_N u\|^4_{L^4}} d\mu_N(u),$$

où χ est une fonction positive continue à support compact, et $\alpha_N = E(\|\phi_N(\omega, .)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$.

Calculons α_N.

$$\begin{aligned}
\alpha_N &= E(\|\sum_{n=0}^{N} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n(\omega) h_n\|^2_{L_2}) \\
&= E(\sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\lambda_n^2} |g_n(\omega)|^2) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{2n+1} E(|g_n(\omega)|^2) \\
\alpha_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'il existe une constante C telle que pour tout N, $\alpha_N \leq C \log N$.

Définition 4.7. Posons

$$F_N(u) = \|\Pi_N u\|^2_{L_2} - \alpha_N \text{ et } G_N(u) = \chi(F_N(u)) e^{\frac{1}{4}\|S_N u\|^4_{L^4}}\ .$$

4.3.2 Convergence de F_N et G_N.

Montrons que $G_N(u)$ converge presque sûrement vers un réel $G(u)$ et que G est μ-mesurable.

Lemme 4.8. *F_N est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathcal{H}^{-\sigma}, d\mu)$. On note $F(u)$ sa limite, $F_N(u)$ converge vers $F(u)$ dans le sens où*

$$\forall \epsilon > 0,\ \mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid |F_N(u) - F(u)| > \epsilon) \to 0 \textit{ quand } N \to \infty.$$

Preuve. Soit $N > M$ deux entiers, on a :

$$\|F_N(u) - F_M(u)\|^2_{L^2_\omega} = \int_\Omega |(\|\Pi_N \phi\|_{L^2} - \alpha_N) - (\|\Pi_M \phi\|_{L^2} - \alpha_M)|^2 dP$$

Or,

$$(\|\Pi_N \phi\|_{L^2} - \alpha_N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\lambda_n} |g_n(\omega)|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\lambda_n^2} = \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{2n+1} (|g_n(\omega|^2 - 1)$$

donc

$$\|F_N(u) - F_M(u)\|^2_{L^2_\omega} = \int_\Omega |\sum_{n=M+1}^{N} \frac{2}{2n+1} (|g_n(\omega)|^2 - 1)|^2 dP$$

$$= \int_\Omega \sum_{n,m=M+1}^{N} \frac{4}{(2n+1)(2m+1)}(|g_n(\omega)|^2-1)(|g_m(\omega)|^2-1)dP$$

$$= \sum_{n,m=M+1}^{N} \frac{4}{(2n+1)(2m+1)} \int_\Omega (|g_n(\omega)|^2-1)(|g_m(\omega)|^2-1)dP.$$

Mais si $n \neq m$, g_n et g_m sont indépendantes donc

$$\int_\Omega (|g_n(\omega)|^2-1)(|g_m(\omega)|^2-1)dP = (\int_\Omega (|g_n(\omega)|^2-1)dP)(\int_\Omega (|g_m(\omega)|^2-1)dP) = 0$$

d'où

$$\|F_N(u) - F_M(u)\|^2_{L^2_\omega} = \sum_{n=M+1}^{N} \frac{4}{(2n+1)^2} \int_\Omega (|g_n(\omega)|^2-1)^2 dP$$

et comme les g_n sont des gaussiennes normalisées, il existe C tel que $\int_\Omega (|g_n(\omega)|^2-1)^2 dP \leq C$.

Comme $\frac{4}{(2n+1)^2}$ est le terme général d'une série convergente, la suite F_N est bien une suite de Cauchy pour $L^2(\mathcal{H}^{-\sigma}, d\mu)$. Elle converge vers une limite F.

Enfin

$$\mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid |F_N(u) - F(u)| > \epsilon) \leq \|F_N - F\|^2_{L^2}/\epsilon^2$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 4.9. *Il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $N > M \in \mathbb{N}$ et $y > 0$, on ait*

$$\mu(B_{M,N} := \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid |F_N(u) - F_M(u)| > y\}) \leq Ce^{-c(M+1)^{\frac{1}{2}} y}.$$

Preuve. Posons $B^+_{M,N} := \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid F_N(u) - F_M(u) > y\}$. Pour tout $t > 0$,

$$\mu(B^+_{M,N}) = P(\sum_{n=M+1}^{N} \frac{2}{2n+1}(|g_n(\omega)|^2 - 1) > y) = P(e^{t(\sum_{n=M+1}^{N} \frac{2}{2n+1}(|g_n(\omega)|^2-1))} > e^{ty})$$

$$\mu(B^+_{M,N}) \leq e^{-ty} E(e^{t(\sum_{n=M+1}^{N} \frac{2}{2n+1}(|g_n(\omega)|^2-1))}) = e^{-ty} \Pi_{n=M+1}^{N} E(e^{t\frac{2}{2n+1}(|g_n(\omega)|^2-1)})$$

$$\mu(B^+_{M,N}) \leq e^{-ty} \Pi_{n=M+1}^{N} e^{-t\frac{2}{2n+1}}(1 - \frac{2t}{2n+1})^{-1}$$

Pour tout $z \in [0, \frac{1}{2}]$, $j(z) := e^{z+z^2}(1-z) \geq j(0) \geq 1$ donc pour tout $t \in [0, \frac{\lambda_M^2}{4}]$, $(t\frac{2}{2n+1} \in [0, \frac{1}{2}])$ on a $e^{-t\frac{2}{2n+1}}(1 - \frac{2t}{2n+1})^{-1} \leq e^{\frac{4t^2}{(2n+1)^2}}$ donc

$$\mu(B^+_{M,N}) \leq e^{-ty + \sum_{n=M+1}^{N} \frac{4t^2}{(2n+1)^2}} \leq e^{-ty + C\frac{t^2}{M+1}}$$

pour $t = c(M+1)^{1/2}$ avec c suffisamment petit pour que pour tout M, $c \leq \frac{2M+3}{4\sqrt{M+1}}$,

$$\mu(B^+_{M,N}) \leq Ce^{-\widetilde{c}(M+1)^{1/2} y}$$

Posons $B^-_{M,N} := \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid F_N(u) - F_M(u) < -y\}$ et montrons que $\mu(B^-_{M,N} \leq Ce^{-c(M+1)^{1/2}y}$.

Pour tout $t > 0$, $\mu(B^-_{M,N}) \leq e^{-ty} \prod_{n=M+1}^N E(e^{t\frac{2}{2n+1}(1-|g_n|^2)})$. Or,

$$E(e^{t\frac{2}{2n+1}(1-|g_n|^2)}) = e^{\frac{2t}{2n+1}}(1+\frac{2t}{2n+1})^{-1}$$

Posons $z = \frac{2t}{2n+1}$. La fonction $x \mapsto v(x) = e^{x^2-x}(1+x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $v(z) \geq v(0) = 1$. On en déduit $\frac{e^z}{1+z} \leq e^{z^2}$ et donc

$$\mu(B^-_{M,N}) \leq e^{-ty} \prod_{n=M+1}^{N} e^{\frac{4t^2}{(2n+1)^2}} \leq e^{-ty+\frac{t^2}{M+1}}$$

pour $t = \sqrt{M+1}$, $\mu(B^-_{M,N}) \leq Ce^{-c(M+1)^{1/2}y}$. Et donc finalement, $\mu(B_{M,N}) \leq Ce^{-c(M+1)^{1/2}}$.

Comme $F_N(u)$ converge vers $F(u)$ en mesure et $\|S_N u\|_{L^4}$ vers $\|u\|_{L^4}$ μ presque sûrement pour $u \in \mathcal{H}^{-\sigma}$, $G_N(u)$ converge vers $G(u) = \chi(F(u))e^{\frac{1}{4}\|u\|_{L^4}}$ presque sûrement et G est mesurable. Il reste à montrer la μ-intégrabilité de G pour définir ρ.

4.3.3 Intégrabilité de G

Montrons que $\|G\|_{L^p_{d\mu}}$ est finie.

Pour cela, majorons $\|G_N\|_{L^p}$ par une constante indépendante de N. On a tout d'abord besoin du lemme suivant, dont on a déjà montré une partie (cf (4.4)).

Lemme 4.10. *Soit $\sigma > 0$, $p \geq 4$ et $0 \leq s < \frac{1}{6}$. Il existe $\beta(s) > 0$ et des constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $\lambda \geq 1$ et tout couple d'entiers $N \geq N_0 \geq 1$,*

$$\mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|S_N u - S_{N_0} u\|_{W^{s,p}} > \lambda) \leq Ce^{-cN_0^{\beta(s)}\lambda^2} \tag{7}$$

En particulier, pour $N_0 = 1$, on obtient la propriété : il existe C, c tels que pour tout $\lambda \geq 1$ et $N \geq 1$

$$\mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|S_N u\|_{W^{s,p}} > \lambda) \leq Ce^{-c\lambda^2}.$$

Preuve.

$$\mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|S_N u - S_{N_0} u\|_{W^{s,p}} > \lambda) = P(\|\sum_n (\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0}))\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n(\omega)h_n(x)\|_{W^{s,p}_x} > \lambda)$$

$$= P(\|\sum_n (\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0}))\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^{1-s}} g_n(\omega)h_n(x)\|_{L^p_x} > \lambda)$$

Posons $f(\omega, x) = \sum_n (\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0}))\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^{1-s}} g_n(\omega)h_n(x)$.

Soit $q \geq p$. Par inégalité de convexité,

$$\|f\|_{L^q_\omega, L^p_x} \leq \|f\|_{L^p_x, L^q_\omega}.$$

Or, on a vu que

$$\|\sum_n c_n g_n\|_{L^q_\omega} \leq C_1\sqrt{q}(\sum |c_n|^2)^{1/2}$$

donc

$$\|f\|_{L^q_\omega} \leq C_1\sqrt{q}(\sum_n |\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0})|^2 \frac{2}{\lambda_n^{2(1-s)}}|h_n(x)|^2)^{1/2}$$

On en déduit par une inégalité triangulaire que

$$\|f\|_{L^p_x, L^q_\omega} \leq C_1\sqrt{q}(\sum_n |\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0})|^2 \frac{2}{\lambda_n^{2(1-s)}}\| \,|h_n|^2\|_{L^{p/2}})^{1/2}$$

Comme $\| \,|h_n|^2\|_{L^{p/2}} = \|h_n\|^2_{L^p} \leq C_2\lambda_n^{-1/3}$, on a

$$\sum_n |\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0})|^2 \frac{2}{\lambda_n^{2(1-s)}}\| \,|h_n|^2\|_{L^{p/2}} \leq C_2 \sum_n |\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0})|^2 \frac{2}{(2n+1)^{(1-s+1/6)}}$$

s étant strictement inférieur à $1/6$, il existe $\gamma(s) > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0 \geq 1$,

$$\sum_n |\chi_0(\frac{n}{N}) - \chi_0(\frac{n}{N_0})|^2 \frac{2}{(2n+1)^{(1-s+1/6)}} \leq C_3 N_0^{-\gamma(s)}.$$

Finalement,

$$\|f\|_{L^q_\omega, L^p_x} \leq C_4\sqrt{q}N_0^{-\gamma(s)}.$$

On a alors

$$P(\|f\|_{L^p_x} > \lambda) = P(\|f\|^q_{L^p_x} > \lambda^q) \leq \lambda^{-q}\|f\|^q_{L^q_\omega, L^p_x}$$

$$P(\|f\|_{L^p_x} > \lambda) \leq (\frac{C_4}{\lambda N_0^{\gamma(s)}}\sqrt{q})^q$$

Posons $\beta(s) = 2\gamma(s)$. Pour tout $\lambda \geq 2p/C_4$, le réel $q = \frac{\lambda^2 N_0^{\beta}(s)}{4C_4^2}$ est supérieur à p, on en déduit que pour tout $\lambda \geq 2p/C_4$ et $N \geq N_0 \geq 1$,

$$P(\|f\|_{L^p_x} > \lambda) \leq e^{-cN_0^{\beta(s)}\lambda^2}$$

avec $c = \frac{log 2}{4C_4^2}$.

Finalement, il existe C tel que pour tout $\lambda \geq 1$, et $N \geq N_0 \geq 1$,

$$\mu(u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|S_N u - S_{N_0}u\|_{W^{s,p}} > \lambda) \leq Ce^{-cN_0^{\beta(s)}\lambda^2}.$$

Ce lemme nous permet de majorer la mesure de l'ensemble $A_{y,N} := \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid G_N(u) > y\}$.

Lemme 4.11. *Soit $A_{\lambda,N} = \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid G_N(u) > \lambda\}$. Pour tout $L > 0$, il existe une constante C_L indépendante de N telle que $\mu(A_{\lambda,N}) \leq C_L\lambda^{-L}$.*

Preuve.

Posons $N_0 := (log\lambda)^l$ avec $l > \max(2, \frac{1}{\beta(0)} + 1)$.

Premier cas : $N \leq N_0$. L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg nous donne pour tout $u \in A_{\lambda,N}$,

$$\int dx|S_N u|^4 = \|S_N u\|^4_{L^4_x} \leq C'_1 \|S_N u\|^{4-\theta}_{L^2_x} \|S_N u\|^{\theta}_{\mathcal{W}^{s,p}}$$

avec $\theta < 2$.

De plus, $\|S_N u\|_{L^2} \leq \|\Pi_N u\|_{L^2}$. Or, pour tout $u \in A_{\lambda,N}$, on a $\chi(\|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) > 0$, donc

$$\|\Pi_N u\|_{L^2} \leq C'_2 \sqrt{\alpha_N} \leq C'_3 (logN)^{1/2} \leq C'_4 (log(log\lambda))^{1/2}.$$

Par ailleurs, pour tout $u \in A_{\lambda,N}$, $\int dx|S_N u|^4 > C'_5(log\lambda)$. En combinant, toutes ces inégalités, on obtient :

$$\|S_N u\|^{\theta}_{W^{s,p}} \geq C'_6 \frac{log\lambda}{(log\ log\lambda)^{2-\theta/2}}.$$

Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in A_{\lambda,N}$,

$$\|S_N u\|_{\mathcal{W}^{s,p}} > C'_7 (log\lambda)^{1/2+\delta}$$

On en déduit que $\mu(A_{\lambda,N}) \leq \mu(\|S_N u\|_{\mathcal{W}^{s,p}} > C'_7(log\lambda)^{1/2+\delta})$. Par le lemme précédent,

$$\mu(A_{\lambda,N}) \leq C'_8 e^{-c(log\lambda)^{2(1/2+\delta)}} \leq \widetilde{C}_L \lambda^{-L}.$$

Deuxième cas : $N > N_0$.

Posons $B_{\lambda,N} = \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid |(\|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) - (\|\Pi_{N_0} u\|^2_{L^2} - \alpha_{N_0})| > 1\}$. D'après le lemme (4.9),

$$\mu(B_{\lambda,N}) \leq C'_1 e^{-c(N_0+1)^{1/2}} \leq C'_1 e^{-c(log\lambda)^{l/2}}$$

Comme $l > 2$, on a $\mu(B_{\lambda,N}) \leq C'_2 \lambda^{-L}$.

Il reste à estimer $\mu(A_{\lambda,N} - B_{\lambda,N})$. Soit $u \in A_{\lambda,N} - B_{\lambda,N}$. Comme $u \in B^c_{\lambda,N}$, on a :

$$|(\|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) - (\|\Pi_{N_0} u\|^2_{L^2} - \alpha_{N_0})| \leq 1.$$

On en déduit que

$$\|\Pi_{N_0} u\|^2_{L^2} = (\|\Pi_{N_0} u\|^2_{L^2} - \alpha_{N_0}) - (\|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) + (\|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) + \alpha_{N_0} \leq (1 + \|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) + \alpha_{N_0}$$

De plus, $u \in A_{\lambda,N}$ donc $\chi(\|\Pi_N u\|^2_{L^2} - \alpha_N) > 0$ donc il existe une constante C'_3 telle que

$$\|\Pi_{N_0} u\|^2_{L^2} \leq C'_3 + \alpha_{N_0} \leq C'_4 log\ log\ \lambda$$

et $\|S_N u\|_{L^4} \geq c(log\ \lambda)^{1/4}$. Par inégalité triangulaire, si $u \in A_{\lambda,N}$, ou bien $\|S_{N_0} u\|_{L^4} \geq \frac{c}{4}(log\lambda)^{1/4}$, ou bien $\|S_N u - S_{N_0} u\|_{L^4} > \frac{c}{4}(log\ \lambda)^{1/4}$.

Posons $D_{\lambda,N} = \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|\Pi_{N_0} u\|^2_{L^2} \leq C'_4 log\ log\ \lambda$ et $\|S_{N_0} u\|_{L^4} \geq \frac{c}{4}(log\lambda)^{1/4}\}$ et $E_{\lambda,N} = \{u \in \mathcal{H}^{-\sigma} \mid \|S_N u - S_{N_0} u\|_{L^4} > \frac{c}{4}(log\ \lambda)^{1/4}\}$.

D'après les remarques précédentes, $A_{\lambda,N} \setminus B_{\lambda,N} \subseteq D_{\lambda,N} \cup E_{\lambda,N}$ et donc

$$\mu(A_{\lambda,N} \setminus B_{\lambda,N}) \leq \mu(D_{\lambda,N} \cup E_{\lambda,N}) \leq \mu(D_{\lambda,N}) + \mu(E_{\lambda,N}).$$

Majorons $\mu(D_{\lambda,N})$. Comme dans le cas $N \leq N_0$, on utilise l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg pour avoir l'existence de s, p et $\theta < 2$ tels que

$$\|S_{N_0}u\|^{\theta}_{\mathcal{W}^{s,p}} \geq C'_5(log\ log\ \lambda)^{\theta/2-2}(log\ \lambda)$$

$$\|S_{N_0}u\|_{\mathcal{W}^{s,p}} \geq C'_6(\log\ \lambda)^{1/2+\delta}$$

On en déduit que

$$\mu(D_{\lambda,N}) \leq C'_7 e^{-c(log\ \lambda)^{1+2\delta}} \leq \overline{C}_L \lambda^{-L}.$$

Majorons $\mu(E_{\lambda,N})$. D'après le lemme précédent,

$$\mu(E_{\lambda,N}) \leq C'_8 e^{-cN_0^{\beta(0)}(\log\ \lambda)^{1/2}} = C'_8 e^{-c(log\ \lambda)^{l\beta(0)+1/2}}$$

Or, $l > 1 + 1/\beta(0)$ donc $l\beta(0) + 1/2 > 1 + \beta(0) + 1/2$ et donc pour tout L il existe $C"_L$ tel que

$$\mu(E_{\lambda,N}) \leq C"_L \lambda^{-L}.$$

Finalement,

$$\mu(A_{\lambda,N}) \leq \mu(B_{\lambda,N}) + \mu(D_{\lambda,N}) + \mu(E_{\lambda,N}) \leq C_L \lambda^{-L}.$$

Proposition 4.12. *Soit $1 \leq p < \infty$. Il existe une constante C indépendante de N telle que pour tout N, $\|G_N\|_{L^p_{d\mu}} \leq C$.*

Preuve. Soit $L > p$, il existe C'_L tel que :

$$\|G_N\|^p_{L^p_{d\mu}} = \int_0^\infty d\lambda p \lambda^{p-1} \mu(G_N(u) > \lambda) \leq C'_L \int_1^\infty p\lambda^{-(L-p+1)} = C^p.$$

Proposition 4.13. *G appartient à $L^p(d\mu)$.*

Preuve. G_N converge vers G au sens de la mesure μ, donc il existe une sous-suite $(G_{N_k})_k$ telle que G_{N_k} converge vers G μ presque sûrement. On en déduit que

$$\int_{\mathcal{H}^{-\sigma}} |G_(u)|^p d\mu \leq \liminf \int_{\mathcal{H}^{-\sigma}} |G_{N_k}(u)|^p d\mu \leq C^p.$$

Finalement, la suite de mesures ρ_N définies par $d\rho_N(u) = G_N(u)d\mu_N(u)$ admet une sous-suite convergente. Sa limite ρ est une mesure finie sur $\mathcal{H}^{-\sigma}$.

Conclusion

On a donc construit une mesure candidate à l'invariance par le flot global de l'équation de Schrödinger non linéaire. Il reste cependant à vérifier que ce flot existe.

Pour cela, on approxime SNL par les équations :

$$\begin{cases} i\partial_t u - Hu = \kappa S_N(|S_N u|^2\ S_N u) \\ u(t=0,\ .\ ) = S_N u_0 \end{cases} \tag{8}$$

pour lesquelles ρ_N est une mesure invariante par le flot.

On montre alors qu'il existe un espace de mesure pleine pour ρ_N de conditions initiales pour lequel un tel flot (local) existe, on montre par la suite qu'il existe un espace de mesure pleine sur lequel le flot de (8) est défini globalement. Ce qui nous amène au résultat escompté.

Références

[1] J. Bourgain, *Periodic non linear scrödinger equation and invariant measures*, (Comm. Math. Phys. 166(1) :1-26, (1994)).

[2] Nicolas Burq, *Notes de cours sur l'oscillateur harmonique et les mesures de gibbs à l'institut Henri Poincaré*, (2009).

[3] Nicolas Burq et Nikolay Tzvetkov, *Random data cauchy theory for supercritical wave equations I : local existence theory*, (Invent. Math. 173, No. 3, 449–475 (2008)).

[4] Nicolas Burq Laurent Thomann et Nikolay Tzvetkov, *Large time dynamics for the 1D NLS*, (2009, preprint).

[5] Alan C Newel Jerome V Moloney, *Non linear optics*, Addison-Wesley Publishing Company, ISBN 0-201-51014-6, 1992.

[6] L. Landau E. Lifschitz, *Mécanique quantique, cours de physique théorique tome III*, Edition Mir, 1967.

[7] C.J. Pethick H. Smith, *Bose-einstein condensation in dilute gases*, Cambridge University Press, 2002.

[8] Willi-Hans Steeb, *Hilbert spaces, generalized functions and quantum mechanics*, BI-Wiss-Verl ISBN 3-411-15011-4, 1991.

[9] Nicolas Burq, *The non linear harmonic oscillator with random initial data*, (2009, à l'occasion du canpde crash-course, Edinburgh).

[10] Nicolas Burq Nikolay Tzvetkov, *Random data cauchy theory for supercritical wave equations II : A global existence result*, (Invent. Math. 173, No. 3, 477–496 (2008)).