Devoir 1, à rendre au plus tard le 25/10/2015

Considérons un jeu de pile ou face équilibré de longueur $2n$. On note les résultats des $2n$ lancers indépendants $X_1, \ldots X_{2n} \in \{-1, +1\}$, et on s'intéresse à la marche aléatoire associée

$$\forall k \in \{1, \ldots, 2n\}, \qquad S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j.$$

Le problème se compose de deux parties indépendantes.

1 La loi de l'arcsinus

Notons T_{2n} le temps passé par la marche aléatoire du côté positif, c'est-à-dire

$$T_{2n} = \text{Card}\left\{k \in \{0, \ldots, 2n-1\} : \max(S_k, S_{k+1}) > 0\right\}.$$

1. Faire un dessin. Que pensez-vous de la parité de T_{2n} ?
2. Montrer que la loi de T_{2n} est symétrique par rapport à n, i.e.,

$$\forall k \in \{0 \cdots n\}, \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2n - 2k).$$

3. Evaluer $\mathbb{P}(T_{2n} = 0)$.
4. Soit k tel que $1 \leq k \leq n-1$. On considère une trajectoire de la marche aléatoire vérifiant $\{T_{2n} = 2k\}$. Montrer qu'il existe un entier $r \in (0, n)$ tel que la trajectoire est retournée en 0 pour la première fois à l'instant $2r$. En discutant des comportements possibles de la marche aléatoire entre les instants 0 et $2r$, établir la formule

$$\mathbb{P}\left(T_{2n} = 2k\right) = \sum_{r=1}^{k} \frac{2^{2n-1}}{2r-1} \mathbb{P}(S_{2r} = 0) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k - 2r) + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{2^{2n-1}}{2r-1} \mathbb{P}(S_{2r} = 0) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 0).$$

5. En déduire que la loi de T_{2n} le temps de séjour de la marche du côté positif entre 0 et $2n$ est la loi de l'arcsinus discrète, donnée par

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = 2^{-2n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}.$$

6. Montrer que T_{2n}/n converge en loi, quand n tends vers $+\infty$ vers une loi dont on déterminera la densité.
7. Application numérique : 2 joueurs jouent 20 fois de suite à pile ou face. Calculez la probabilité pour que l'un des joueurs mène tout le temps au cours du jeu, puis qu'un des joueurs mène 16 fois ou plus au cours du jeu, et enfin la probabilité pour que chaque joueur mène 10 fois.

8. Nous nous intéressons maintenant à la loi de T_{2n} lorsque la marche revient en 0 à l'instant $2n$. Calculer $\mathbb{P}(T_{2n} = 0, S_{2n} = 0)$ et $\mathbb{P}(T_{2n} = 2n, S_{2n} = 0)$.
9. En procédant comme précédemment, établir que

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) = \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

Déterminer la loi conditionnelle de T_{2n} sachant que $S_{2n} = 0$.

2 Marche aléatoire bornée

Soient a, b, c trois entiers positifs, on s'intéresse à la la loi de la marche aléatoire restant dans l'intervalle $[-b, a]$ à tout instant.

1. Calculer $\mathbb{P}(S_1 > -b, \ldots, S_{n-1} > -b, S_n = c)$.
2. On suppose $a > c > 0$. Calculer $\mathbb{P}(S_1 < a, \ldots, S_{n-1} < a, S_n = c)$.
3. On suppose $a > c > 0$ et $b > 0$. Faire un dessin, puis calculer la probabilité de l'événement suivant : la marche aléatoire touche le niveau a, puis après la première visite de a elle ne touche pas $-b$, et atteint c au temps n. Il s'agit de calculer

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{1, \ldots, n\} : S_1 < a, \ldots, S_{k-1} < a, S_k = a, S_{k+1} > -b, \ldots, S_{n-1} > -b, S_n = c).$$

4. On suppose $a > c > 0$ et $b > 0$. On utilise la convention $\min \emptyset = +\infty$. On pose

$$T_1 = \min\{k \in \{1, \ldots n\} : S_k = a\} \quad \text{et} \quad U_1 = \min\{k \in \{T_1, \ldots n\} : S_k = -b\},$$

et, pour i plus grand que 2 :

$$T_i = \min\{k \in \{U_{i-1}, \ldots, n\} : S_k = a\} \quad \text{et} \quad U_i = \min\{k \in \{T_i, \ldots, n\} : S_k = -b\}.$$

On note $N(n, x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}}$. À l'aide du principe de réflexion, montrer que pour tout entier k,

$$\mathbb{P}(T_k < \infty, U_k = \infty, S_n = c) = 2^{-n}\left(N(n, 2(k-1)(a+b) + 2a - c) - N(n, 2k(a+b) + c)\right).$$

5. On pose $L = \max\{k \in \{1, \ldots n\} : S_k = a \text{ ou } S_k = -b\}$ (avec la convention $\max \emptyset = -\infty$). Calculer la probabilité pour que la dernière visite de la marche en a ou en $-b$ avant l'instant n ait lieu en a et que $S_n = c$, i.e.,

$$\mathbb{P}(L > -\infty,\ S_L = a, S_n = c).$$

Donner alors sans la calcul un expression de $\mathbb{P}(L > -\infty, S_L = -b, S_n = c)$.

6. On suppose $0 < c < a$, $b > 0$. Proposer finalement une formule pour

$$\mathbb{P}(-b < S_1 < a, \ldots, -b < S_{n-1} < a, S_n = c).$$