Devoir 2, à rendre au plus tard le 15/11/2015

On s'intéresse au modèle du Parking de Page, dans lequel des voitures de longueur 2 se garent, les unes après les autres sur des paires de places adjacentes, jusqu'à ce qu'aucune autre voiture ne puisse se garer. On s'intéresse à la densité de voitures présentes dans le parking lorsque celui-ci arrive à saturation.

1 Sur le parking fini

Pour $n \geq 2$, on considère une suite de configurations de parking $(x^t, t \geq 0) = ((x_i^t, 1 \leq i \leq n), t \geq 0)$ dans $\{0,1\}^n$, selon la construction suivante. Le parking commence vide $x^0 = (0, \ldots, 0)$. Étant donné x^t, on tire une variable aléatoire i uniformément sur $\{1, \ldots, n\}$, et si la place est libre, une voiture se gare sur $(i, i+1)$: autrement dit, si $x_i^t = x_{i+1}^t = 0$ alors $x_i^{t+1} = x_{i+1}^{t+1} = 1$, les autres coordonnées restant inchangées.

0. Illustrer ce processus.
1. Montrer qu'il existe un instant aléatoire T_n fini presque sûrement à partir duquel aucune nouvelle place n'est possible. On pose alors $X_n = x^{T_n} \in \{0,1\}^n$ et $M_n = \sum_{j=1}^n X_n(j)$ le nombre total de places occupées.
2. Montrer que $n/2 \leq M_n \leq n$ presque sûrement.
3. Montrer que M_n est égal en loi à 2 plus la somme de deux versions indépendantes de M_{I-1} et M_{n-I-1}, où I est une variable aléatoire indépendante, tirée selon une loi uniforme sur $\{1, \ldots n-1\}$.
4. On pose $a_n = n - \mathbb{E}(M_n)$ le nombre moyen de sites vides. En posant $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, montrer que pour $n \geq 2$ on a $a_n = \frac{2}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{j-1}$.
5. On pose $f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^{j-1}$, montrer que $f'(z) = \frac{2zf(z)}{1-z}$.
6. En déduire que $f(z) = \frac{e^{-2z}}{(1-z)^2}$, et, par identification du développement en séries entières que
$$a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} (n-j+1) \frac{(-2)^j}{j!}.$$
7. En conclure $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = e^{-2}$.

2 Processus défini sur $\mathbb{Z}$

On considère $(\xi_j, j \in \mathbb{Z})$ des variables aléatoires i.i.d. de loi dont la fonction de répartition F est continue et vérifie $F(0) = 0$. On définit ensuite $X_\infty \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ comme suit. On pose tout d'abord $X_\infty(i) = X_\infty(i+1) = 1$ pour tout point i tel que ξ_i est un minimum local [1]. Entre deux minimum locaux consécutifs i et j, on considère $(\xi_{i+1}, \ldots \xi_{j-1})$. À l'instant ξ_k, une voiture tente de se garer sur la place de parking $(k, k+1)$, si cette place est disponible, auquel cas $X_\infty(k) = X_\infty(k+1) = 1$. Si après que toutes les voitures aient tenté de se garer, la place est vide au point k alors $X_\infty(k) = 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T_k = \inf\{j \geq k : \xi_j < \min(\xi_{j-1}, \xi_{j+1})\} < +\infty$ presque sûrement.

1. En d'autres termes, $\xi_i < \min(\xi_{i-1}, \xi_{i+1})$.

2. Montrer que si $\xi_{k-1} < \xi_k < \xi_{k+1}$ alors $X_\infty(k) = 1$.
3. En déduire que si $X_\infty(k) = 0$, alors ξ_k est un maximum local

On dit qu'il y a une montée de longueur ℓ à gauche de i si

$$\xi_i > \xi_{i-1} > \xi_{i-2} > \cdots > \xi_{i-\ell+1} > \xi_{i-\ell} \quad \text{et} \quad \xi_{i-\ell-1} > \xi_{i-\ell}.$$

De la même façon, il y a une descente de longueur ℓ à droite de i si

$$\xi_i > \xi_{i+1} > \xi_{i+2} > \cdots > \xi_{i+\ell-1} \quad \text{et} \quad \xi_{i+\ell} > \xi_{i+\ell-1}.$$

4. Montrer que $X_\infty(i) = 0$ si et seulement si il y a une montée de longueur paire à gauche et une descente de longueur paire à droite du point i.
5. Montrer que la probabilité d'avoir une montée de longueur ℓ à gauche du i est $\frac{\ell}{(\ell+1)!}$.
6. En déduire que $\mathbb{P}(X_\infty(0) = 0) = e^{-2}$.

3 Évolution de la densité au cours du temps

Pour $t \geq 0$, on note X_∞^t l'état du parking à l'instant t. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $X_\infty(k) = 1$, on pose $\tau_k = \min(\xi_{k-1}, \xi_k)$ l'instant auquel la voiture garée en k est arrivée. On a alors

$$X_\infty^t(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_\infty(k) = 1 \text{ et } \tau_k \leq t \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\tau_0 \leq t$ si et seulement si
   — il y a une montée impaire à gauche en 0 et $\xi_{-1} \leq t$,
   — ou il y a une descente impaire à droite en 0 et $\xi_0 \leq t$.
2. On pose $f(t) = \mathbb{P}\left(\xi_0 \leq t, \text{ descente impaire à droite de } 0\right)$. En déduire que

$$\mathbb{P}(\tau_i \leq t) = f(t)(2 - f(t)).$$

3. Montrer que, pour tout $0 \leq r < t$ on a

$$\mathbb{P}(t \geq \xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_{k-1} > r, \xi_k > r) = \frac{(F(t) - F(r))^k (1 - F(r))}{k!}.$$

4. En déduire que $f(t) = 1 - e^{-F(t)}$, et que $\mathbb{P}(X_\infty^t(0) = 1) = 1 - e^{-2F(t)}$.