Devoir 3, à rendre au plus tard le 14/12/2015

Marche aléatoire renforcée

Ce problème est constitué de trois parties. Les deux premières peuvent être traitées séparément. Pour traiter la troisième, on pourra admettre les résultats des deux premières parties.

Urne de Pólya. Soit $a, b > 0$, on définit le processus d'urne de Pólya $(Y_n, n \geq 0)$ par

$$Y_0 = a \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n) = \frac{Y_n}{a+b+n},$$

où $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots Y_n)$.

1. Montrer que $(Y_n/(a+b+n), n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
2. Montrer que $\frac{Y_n}{n}$ converge p.s. et dans L^p vers une variable aléatoire U (pour tout $p \geq 1$).
3. On fixe $k \geq 1$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\cdots(Y_n+k-1)}{(n+a+b)(n+a+b+1)\cdots(n+a+b+k-1)}.$$
Montrer que (Z_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(U^k)$.
4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée est développable en séries entières, en déduire qu'on a caractérisé la loi de U.
5. On rappelle que la loi β de paramètre a et b admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbf{1}_{\{u\in[0,1]\}}.$$
Calculer les moments entiers d'une variable aléatoire de loi β de paramètres a et b.
6. En déduire la loi de U.

On caractérise maintenant la loi de $(Y_n, n \geq 0)$ conditionnellement à U. On pose $X_n = Y_n - Y_{n-1}$.

7. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $(X_1, \dots, X_n) \overset{(d)}{=} \left(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}\right)$.
8. Montrer que pour tout $k \leq n$, on a $\mathbb{P}(Y_n = k+a+b) = \binom{n}{k}\mathbb{P}(Y_k = Y_n = k+a+b)$.
9. En déduire que pour tout $r \leq k \leq n$, on a
$$\mathbb{P}(Y_k = r+a+b | Y_n) = \binom{k}{r}\left(\frac{Y_n}{n+a+b}\right)^r \left(1 - \frac{Y_n}{n+a+b}\right)^{k-r}.$$
10. En conclure que conditionnellement à U, $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de Bernouilli de paramètre U.

Marche aléatoire en environnement aléatoire. Soient $(\omega_x^+)_{x\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a. i.i.d. sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ à valeurs dans $]0,1[$. On introduit :

$$\omega_x^- = 1-\omega_x^+, \quad \omega_x = (\omega_x^-, \omega_x^+).$$

$$\omega = (\dots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots), \quad \text{et} \quad \rho_x = \frac{\omega_x^-}{\omega_x^+}.$$

Conditionnellement à ω, on définit $((X_n)_{n\geq 0}, P_\omega)$ la chaîne de Markov issue de 0 qui vérifie :

$$P_\omega[X_{n+1} = x+1 | X_n = x] = \omega_x^+ \quad \text{et} \quad P_\omega[X_{n+1} = x-1 | X_n = x] = \omega_x^-.$$

On montre que
- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] < 0$, alors $P_\omega[\lim X_n = +\infty] = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.
- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] > 0$, alors $P_\omega[\lim X_n = -\infty] = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.
- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] = 0$, alors $P_\omega[\limsup X_n = +\infty, \liminf X_n = -\infty] = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.

1. Soit $a \leq b$ des entiers, on pose
$$\Pi_{a,b} = \prod_{a<x\leq b} \rho_x \text{ et } f(z) = \begin{cases} \sum_{0\leq x<z} \Pi_{0,x} & \text{si } z \geq 0 \\ -\sum_{z\leq x<0} \Pi_{x,0}^{-1} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$
Montrer que $f(X_n)$ est une martingale sous P_ω pour la filtration canonique.
2. Soient $M_- < 0 < M_+$, on pose $T_{M_\pm} = \inf\{n \geq 1 : X_n = M_\pm\}$, calculer $P_\omega[T_{M_+} < T_{M_-}]$.
3. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] < 0$, montrer que $P_\omega[\lim X_n = +\infty] = 1$ $\mathbb{P}$-p.s.
4. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] = 0$ et $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)] < \infty$. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. En déduire que $P_\omega[\limsup X_n = +\infty, \liminf X_n = -\infty] = 1$.
5. ($\star$) Même question lorsqu'on ne suppose pas $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)] < \infty$.

Marche aléatoire renforcée. On définit enfin le modèle de la marche aléatoire renforcée. On se donne une suite $(a_x, x \in \mathbb{Z}) \in (0,+\infty)$ de poids initiaux. Posons $X_0 = 0$ et $a_{x,x+1}(0) = a_x$. On écrit pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 0$:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\dots,X_n), \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n+1|\mathcal{F}_n) = 1-\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n-1|\mathcal{F}_n) = \frac{a_{x,x+1}(n)}{a_{x,x-1}(n)}$$
$$\text{et} \quad a_{x,x+1}(n+1) = a_{x,x+1}(n) + \mathbf{1}_{\{\{X_n,X_{n+1}\}=\{x,x+1\}\}}.$$

De façon informelle, à chaque arrête de $\mathbb{Z}$ est associée un poids. La marche évolue en sautant au plus proche voisin en fonction des poids des arrêtes voisines. A chaque fois qu'une arrête est traversée, son poids augmente de 1.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on note $T_x^0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}$ et $T_x^{n+1} = \inf\{n > T_x^n : X_n = x\}$. Montrer que $(a_{x,x+1}(T_x^n)/2, n \geq 0)$ correspond à une urne de Pólya dont on précisera les paramètres (attention, les cas $x > 0$, $x = 0$ et $x < 0$ sont différents les uns des autres).
2. En déduire une équivalence entre la marche aléatoire renforcée et la marche aléatoire en environnement aléatoire.
3. Soit $a > 0$, on suppose que $a_x = a$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Expliquer pourquoi la suite $(X_n, n \geq 0)$ est récurrente (on ne demande pas une démonstration complète).