Probabilités

Devoir 3

A rendre début juin

Exercice 1 : **Digicode oublié** *Annale ENS 2008*
Soit $(V_j, j \geq 1)$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$ indépendantes. On supposera que $V_0 = V_{-1} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on notera $X_n = (V_n, V_{n-1})$.

(1) (a) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov sur $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ dont on décrira les probabilités de transition.
 (b) La chaîne est-elle irréductible ? Est-elle récurrente positive ?
 (c) Quelle est la loi de X_n lorsque $n \geq 2$ fixé ? En déduire la loi stationnaire π de la chaine de Markov.
 (d) Justifier le fait que $T = \min\{n \geq 0 : X_n = (1,1)\}$ est presque sûrement fini et que $\mathbb{E}(T) < +\infty$.

(2) (a) Soit N_n le cardinal de l'ensemble $\{k \leq n : X_k = (1,1)\}$. Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n}{n}$?
 (b) On définit par récurrence $T_1 = T$ et pour tout $j \geq 1$,

$$T_{j+1} = \inf\{n > T_j : X_n = (1,1)\}.$$

 Que vaut N_{T_j} ? En déduire que $j/T_j \to p^2$ p.s. quand $j \to +\infty$.
 (c) Montrer que $(T_{j+1} - T_j, j \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d.
 (d) En déduire que $\mathbb{E}(T_{j+1} - T_j) = \frac{1}{p^2}$.
 (e) Que vaut T_2 lorsque $V_{1+T_1} = 1$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_2 - T_1 | V_{1+T_1} = 1)$.
 (f) Calculer alors $\mathbb{E}(T_2 - T_1 | V_{1+T_1} = 0)$.
 (g) Montrer que conditionnellement à $V_{1+T_1} = 0$, la loi de $T_2 - T_1 - 1$ est identique à celle de T. En conclure la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 2 : **Le problème des parapluies**
Je possède N parapluie, qui sont répartis entre ma maison et mon lieu de travail. Chaque jour, lorsque je vais au travail, il pleut avec probabilité $p \in (0,1)$, et lorsque je rentre, il pleut avec probabilité $q \in (0,1)$. J'emporte bien entendu un parapluie avec moi s'il pleut, et laisse les parapluies en place s'il ne pleut pas. Tous les événements de pluie sont supposés indépendants. Pour chaque jour $n \in \mathbb{N}$, je note X_n le nombre de parapluie présent à la maison au soir du jour n.

(1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, et déterminer sa matrice de transition.
(2) Montrer que (X_n) est récurrente positive. Calculer sa mesure invariante.
(3) Pour tout n, je note T_n le nombre de jours où j'ai été mouillé. Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n}$.

Exercice 3 : **Remplacement d'une machine** On considère une imprimante dont la durée de vie est une variable aléatoire $X \in \mathbb{Z}_+$. Cette imprimante peut être remplacée lorsqu'elle tombe en panne pour un coût de 2000 euros, ou être remplacée alors qu'elle fonctionne toujours pour un coût de 200 euros. Toutes les imprimantes ont des durées de vie indépendantes et identiquement distribuées.
On considère une entreprise qui choisit de remplacer son imprimante dès que son âge dépasse p, ou dès qu'elle tombe en panne. On note S_n le coût total payé par l'entreprise à l'instant n.

(1) Montrer que $(S_n, S_{n+1}, \ldots S_{n+T})$ est une chaîne de Markov.
(2) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.
(3) Déterminer la valeur optimale de p si X est uniforme sur $\{1, \ldots k\}$, si X est de loi géométrique de paramètre a.
(4) Proposer une résolution du cas général.

Exercice 4 : **Le parieur hésitant** On considère un parieur qui joue à pile ou face avec la banque. Il possède au début de la partie un unique euro. A chaque fois que la pièce tombe sur pile, avec probabilité $p \neq 1/2$, le joueur gagne 1 euro, si la pièce tombe sur face, il perd un euro. Le jeu s'arrête quand le joueur a atteint 0 ou n euros.

(1) Calculer la probabilité pour le joueur d'avoir gagné n euros à la fin de la partie, ainsi que l'espérance du temps passé à parier.

(2) On suppose maintenant que le joueur hésite. Il regarde la pièce à chaque étape, mais ne parie qu'après avoir vu la pièce tomber sur pile. Calculer à nouveau la probabilité pour le joueur de gagner n euros, et le temps passé à jouer.