Probabilités

Devoir n° 1, à rendre le 28/02/2014

On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur $2n$, on note les résultats des $2n$ lancers $X_1, \dots, X_{2n} \in \{-1, +1\}$, et on s'intéresse à la marche aléatoire associée,

$$\forall k \in \{1 \dots 2n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k \,.$$

Le problème se compose de deux parties indépendantes.

Première partie. On note T_{2n} le temps passé par la marche aléatoire du côté positif. Précisément,

$$T_{2n} \;=\; \mathrm{card}\{\, k : 0 \le k < 2n, \max(S_k, S_{k+1}) > 0 \,\} \,.$$

1. Faire un dessin. Que pensez-vous de la parité de T_{2n}?

2. Montrer que la loi de T_{2n} est symétrique par rapport à n, i.e.,

$$\forall k \in \{0 \cdots n\} \qquad P(T_{2n} = 2k) \;=\; P(T_{2n} = 2n - 2k) \,.$$

3. Evaluer $P(T_{2n} = 0)$.

4. Soit k tel que $1 \le k \le n-1$. On considère une trajectoire de la marche aléatoire telle que $\{\, T_{2n} = 2k \,\}$. Montrer qu'il y a eu un retour en 0 à un instant $2r$ tel que $0 < 2r < 2n$, et en discutant ce qu'a pu faire la marche entre 0 et $2r$, établir la formule

$$2^{2n} P(T_{2n} = 2k) \;=\; \sum_{1 \le r \le k} \frac{2^{2n-1}}{2r-1} P(S_{2r} = 0)\, P(T_{2n-2r} = 2k - 2r)$$
$$+ \sum_{1 \le r \le n-k} \frac{2^{2n-1}}{2r-1} P(S_{2r} = 0)\, P(T_{2n-2r} = 2k) \,.$$

5. Montrer finalement que la loi de T_{2n}, le temps de séjour de la marche du côté positif entre 0 et $2n$, est la loi de l'arcsinus discrète, i.e.,

$$\forall k \in \{\, 0 \cdots n \} \qquad P(T_{2n} = 2k) \;=\; 2^{-2n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \,.$$

(Indication: on pourra raisonner par récurrence).

6. Application numérique: 2 joueurs jouent 20 fois de suite à pile ou face. Calculez la probabilité pour que l'un des joueurs mène tout le temps au cours du jeu, puis que le joueur le plus chanceux mène 16 fois ou plus au cours du jeu, et enfin la probabilité pour que chaque joueur mène 10 fois.

7. Nous nous intéressons maintenant à la loi de T_{2n} lorsque la marche revient en 0 à l'instant $2n$. Calculer $P(T_{2n} = 0, S_{2n} = 0)$ et $P(T_{2n} = 2n, S_{2n} = 0)$.

8. En procédant comme précédemment, établir que

$$P(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) \;=\; \frac{1}{n+1} P(S_{2n} = 0)\,.$$

9. Comparez les résultats obtenus en 6. et en 9. Que concluez–vous sur la loi conditionnelle de T_{2n} sachant que $S_{2n} = 0$?

Seconde partie. Soient a, b, c trois entiers positifs.

1. Calculer $P(S_1 > -b, \ldots, S_{n-1} > -b, S_n = a)$.

2. On suppose $b > a > 0$. Calculer $P(S_1 < b, \ldots, S_{n-1} < b, S_n = a)$.

3. On suppose $a > c > 0$ et $b > 0$. Calculer la probabilité de l'événement suivant: la marche aléatoire touche le niveau a, après la première visite de a elle ne touche pas $-b$, et finalement elle atteint c au temps n. Il s'agit donc de calculer

$$P(\exists k \in \{1 \ldots n\}\; S_1 < a, \ldots, S_{k-1} < a, S_k = a, S_{k+1} > -b, \ldots, S_{n-1} > -b, S_n = c)\,.$$

4. On suppose $a > c > 0$ et $b > 0$. On convient que $\min \emptyset = +\infty$ et on pose

$$T_1 = \min\{\, k \le n : S_k = a\}\,, \quad U_1 = \min\{\, k,\, T_1 < k \le n : S_k = -b\}\,, \quad \cdots$$
$$T_i = \min\{\, k,\, U_{i-1} < k \le n : S_k = a\}\,, \quad S_i = \min\{\, k,\, T_i < k \le n : S_k = -b\}\,, \quad \cdots\,.$$

On note $N(n, x) = C_n^{(n+x)/2}$. A l'aide du principe de réflexion, montrer que

$$P(T_k < \infty, U_k = \infty, S_n = c) \;=\; 2^{-n}(N(n, 2(k-1)(a+b)+2a-c) - N(n, 2k(a+b)+c))\,.$$

5. On pose $L = \max\{\, k \le n : S_k = a \text{ ou } S_k = -b\}$ (avec la convention usuelle $\max \emptyset = -\infty$). Calculer la probabilité pour que la dernière visite de la marche en a ou en $-b$ avant l'instant n ait lieu en a et que $S_n = c$, i.e.,

$$P(L > -\infty,\; S_L = a,\; S_n = c)\,.$$

Donner alors sans la calcul un expression de $P(L > -\infty,\; S_L = b,\; S_n = c)\,.$

6. On suppose $0 < c < a$, $b > 0$. Proposer finalement une formule pour

$$P(-b < S_1 < a, \ldots, -b < S_{n-1} < a, S_n = c)\,.$$