INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

GRÉGOIRE DEYIRMENDJIAN

Introduction au domaine de recherche

Sous la direction d'Henri Berestycki et Nicolas Gaussel

20 octobre 2006

Avant propos

Ce document constitue une introduction aux mathématiques financières. Après avoir défini les notions fondamentales, une étude détaillée du modèle le plus utilisé est donnée : il s'agit du modèle de Black et Scholes. Dans une dernière partie, une extension du modèle de Black et Scholes est présentée : il s'agit du Modèle Mixte de Merton qui introduit dans la modélisation du cours de l'actif la possibilité de sauts instantanés. Cette modélisation se rapproche de la réalité observée, mais suscite des problèmes de couverture.

Les mathématiques financières : un guide du débutant

Introduction

En 1973, Fisher Black[1] et Myron Scholes[2] publient un article révolutionnaire intitulé "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". De nos jours, il reste l'un des articles scientifiques le plus largement cité dans le monde. En effet, en établissant la première formule universelle permettant de calculer le prix d'une option, Black et Scholes donnent naissance à une nouvelle théorie : le pricing de produits financiers.

Même s'il est souvent oublié dans la littérature, la formule de Black et Scholes doit beaucoup au mathématicien Merton[3] qui développa par la suite une théorie parallèle dont l'importance et l'intérêt ne cessent de croître : la théorie du portefeuille. Celle-ci vise à définir, pour un agent s'étant donné une fonction d'utilité, la stratégie optimale d'investissement dans un ou plusieurs actifs risqués et dans un actif non risqué.

Depuis peu, en raison de l'explosion des marchés financiers, une troisième théorie s'est jointe à celle du pricing et du portefeuille : le risque de crédit, qui vise à la création de produits financiers liés aux risques de défaut des entreprises.

Par souci de simplicité et d'initiation au mathématiques financières, ce document expose principalement la théorie du pricing d'option européenne[4] dans le cadre du modèle de Black et Scholes. Cette dernière est en effet fondamentale pour comprendre la théorie du portefeuille.

Cependant, les limites de la théorie du pricing dans le cadre du modèle de Black et Scholes apparurent très vite, Black et Scholes ayant omis d'introduire des facteurs tels que les coûts de transaction, ou les brusques sauts de prix d'actifs, que l'on observe sans cesse dans les salles de marché. Depuis 1973, nombre d'auteurs ont tenté d'étendre le modèle de Black et Scholes afin de se rapprocher le plus possible de la réalité. Cela a donné naissance à une littérature abondante pouvant décontenancer tout lecteur débutant en mathématiques financières. Une introduction à cette littérature sera donnée en exposant les principaux résultats du Modèle Mixte de Merton.

[1] Black Fisher (1938-1995).
[2] Scholes Myron (1941-).
[3] Merton Robert (1944-).
[4] La définition d'une option européenne sera donnée dans le paragraphe sur les produits dérivés.

L'objectif de ce papier est donc d'offrir un guide d'introduction aux mathématiques financières d'un point de vue probabiliste, permettant de s'attaquer ensuite à des notions plus complexes.

1. Les produits dérivés

Depuis 1973, le volume des transactions sur les marchés financiers a considérablement augmenté en raison notamment de la création de nouveaux produits financiers, appelés **produits dérivés** dans la mesure où ils sont issus de la valeur d'un autre actif financier, souvent appelé actif contingent ou encore actif **sous-jacent**. De manière naturelle, lorsque le produit financier a une caractéristique optionnelle, il est appelé **option**. Ce dernier donne le droit à son possesseur (mais pas l'obligation) de recevoir à une date future T (encore appelée échéance ou **maturité**) fixée dès l'instant initial un flux financier appelé **payoff** défini à l'instant initial. Si ce payoff ne dépend que de la valeur du sous-jacent à l'instant T, on parle d'**option européenne**. Un des exemples le plus fameux d'option est le **call européen**. Il permet d'acheter à échéance T une action, à un prix prédéterminé (appelé le **strike**, ou encore prix d'exercice). Dans le cas du call, l'actif sous-jacent est bien entendu l'action ; si le cours de l'action est décrit par un processus noté $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ et si le strike est noté K, le payoff du call européen est égal à $(S_T - K)_+$.

Dès lors plusieurs questions peuvent nous venir à l'esprit : Quel est le prix d'une option européenne ? Même si sa valeur à échéance dépend uniquement du prix du sous-jacent à maturité T (le prix du call à la date T est en effet alors égal à $(S_T - K)_+$), est-il néanmoins possible d'établir le prix de l'option à une date $t \in [0, T]$. Si cela est possible, le prix dépend-il uniquement de la valeur du sous-jacent à l'instant t, comme c'est le cas à maturité, ou bien dépend-il d'autres facteurs tels que les préférences de l'agent, ou son attitude face au risque ?

En 1973, Black et Scholes établirent une formule du prix d'une option européenne reposant uniquement sur la valeur du sous-jacent à la date considérée. Depuis, l'essentiel des travaux en mathématiques financières a consisté à tester la robustesse et les limites de cette formule.

L'objectif de ce papier est dans un premier temps d'exposer le modèle de Black et Scholes, puis de donner une extension de ce modèle décrivant les possibles sauts de prix observables dans les salles de marchés, sauts induisant des discontinuités dans la trajectoire du sous-jacent, discontinuités que le modèle de Black et Scholes ne permet pas de décrire.

2. Le modèle de Black et Scholes

2.1. **Les idées clés.** La formule de Black et Scholes repose sur trois idées principales. Tout d'abord, Black et Scholes font l'hypothèse que le marché qu'ils décrivent est parfait, i.e. constitué d'agents ayant un accès illimité au crédit, dont les produits sont parfaitement divisibles[5] et dénués de tout coût de transaction. De plus, par souci de simplicité, les taux d'intérêt sont supposés constants. Cependant, ces hypothèses sont relativement standards en économie. Elles vont être complétées par des idées innovantes.

2.1.1. *Temps continu.* Alors qu'en pratique les observations des prix, et les cotations des actifs se font en temps discret, une des idées principales des Black et Scholes a été de travailler en **temps continu**. Ils obtiennent ainsi une Équation aux Dérives Partielles (ÉDP) régissant l'évolution du prix d'une option, qui est plus facilement utilisable qu'une équation discrète.

2.1.2. *Mouvement brownien.* La seconde idée clé a été de modéliser les accroissements relatifs du prix du sous-jacent par un **mouvement brownien**. En particulier cette idée permet de donner un sens, grâce au calcul stochastique et à la formule d'Itô, à la variation infinitésimale d'une fonction dépendant du prix du sous-jacent, ce qui est le cas du prix d'une option. Notons cependant que cette idée d'introduire un mouvement brownien en modélisation financière avait déjà été introduite par Louis Bachelier en 1900, mais ce dernier ayant modélisé le prix du sous-jacent (et non son accroissement relatif) par un mouvement brownien, pouvait obtenir des prix négatifs, ce qui n'est pas concevable.

2.1.3. *L'absence d'opportunité d'arbitrage.* La condition d'**absence d'opportunité d'arbitrage** stipule qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul. Une des conséquences de la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est que deux portefeuilles ayant la même valeur à une date future ont la même valeur à toute date intermédiaire. Autrement dit, deux stratégies donnant le même flux financier à l'horizon de gestion dans tous les états du monde ont la même valeur à toute date intermédiaire. Afin de donner un prix à une option de maturité T, l'idée principale de Black et Scholes a été d'exhiber une stratégie de gestion (i.e. un portefeuille) d'actifs **dynamique** et **autofinançante** (i.e. l'agent investit une somme initial dans un actif

[5] i.e. un agent peut détenir un nombre non entier d'actif.

risqué et un actif non risqué, et ne peut apporter ou retirer de capital au cours de la gestion lorsqu'il réalloue son portefeuille) basée sur des actifs financiers et dont la valeur à la date T est égale au payoff de l'option. En appliquant la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur du portefeuille dupliquant le payoff de l'option à une date ultérieure notée t est égale au prix de l'option à cette date.

2.2. **La démarche de Black et Scholes.** Considérons une option européenne de maturité T portant sur un sous-jacent dont le cours est symbolisé par un processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$. Le payoff de cette option à maturité est noté $h(S_T)$ où h est supposé suffisamment régulière $\mathcal{C}^2$ par morceaux par exemple. Considérons un portefeuille autofinançant décrit par un processus $(V_t)_{0\leq t\leq T}$ constitué d'un actif sans risque dont le taux d'intérêt est noté r et du sous-jacent dont le nombre de parts présentes dans le portefeuille est symbolisé par un processus noté $(\Delta_t)_{0\leq t\leq T}$. Supposons que la valeur de ce portefeuille ne dépende que de la valeur du sous-jacent à l'instant t. Notons $V_t := V(t, S_t)$ où la fonction V est supposée $\mathcal{C}^2$. Dans le modèle de Black et Scholes, le sous-jacent suit une dynamique décrite par l'Equation Différentielle Stochastique suivante :

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right)$$

où le processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ désigne un mouvement brownien standard, i.e. ses accroissements sont indépendants et en particulier $dW_t = \mathcal{N}(0, dt)$. Les paramètres μ et σ sont respectivement la **tendance** et la **volatilité** du processus par unité de temps. L'application de la formule d'Itô à la fonction V donne

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial s}\sigma S_t dW_t$$

D'autre part, la condition d'autofinancement donne

$$dV_t = (V_t - \Delta_t S_t) r dt + \Delta_t dS_t = (V_t - \Delta_t S_t) r dt + \Delta_t S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right)$$

Par conséquent pour tout $t \in [0, T[$, posons

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial s}(t, S_t)$$

S'il existe une solution sur $]0, T[\times]0, \infty[$ à l'ÉDP

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV + \frac{\partial V}{\partial s} sr = 0 \tag{1}$$

avec la condition terminale

$$V(s, T) = h(s)$$

alors, par absence d'opportunité d'arbitrage, le prix de l'option à toute date comprise entre les dates 0 et T est donné par le processus $(V_t)_{0\leq t\leq T}$. La solution de cette EDP, si elle existe donne la formule de Black et Scholes.

Exemple. Dans le cadre du modèle de Black et Scholes, l'équation (1) munie de la condition terminale $h(s) := (s-K)_+$ a une solution. Le prix d'un call à l'instant initial, noté $C(S_0, K, T, r, \sigma)$ est donné par

$$C(S_0, K, T, r, \sigma) = S_0\mathcal{N}(d_1) - e^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où $\mathcal{N}(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La formule de Black et Scholes repose donc sur des éléments d'analyse stochastique, en particulier l'intégrale stochastique et le calcul d'Itô.

2.3. **Mesure risque-neutre.** L'absence d'opportunité d'arbitrage est une hypothèse clé du modèle de Black et Scholes. Au début des années 80, Harrison et Kreps (1979) et Harrison et Pliska (1980) proposent un élégante interprétation des résultats de Black et Scholes.

Ces auteurs montrent en effet qu'à chaque date, le prix d'un actif est égal à l'espérance actualisé du payoff terminal, sous une mesure de probabilité appelée probabilité risque neutre, dont la définition est donnée par :

Définition 2.1. *Une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ est dite risque neutre si*

(1) *Les mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes,*

(2) *Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus $(D_tS_t)_{0\leq t\leq T}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale.*

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, l'existence d'une probabilité risque neutre est acquise, mais pas son unicité. Le fait qu'il puisse exister plusieurs probabilités risques neutres nous conduit à la possibilité d'avoir plusieurs prix différents pour une même option. Dans ce cas, on dit que le marché est incomplet. Mais lorsqu'il n'existe qu'une unique probabilité risque neutre, le marché est dit complet. Dans le modèle de Black et Scholes le marché est complet en raison de l'utilisation du mouvement brownien et du théorème suivant :

Théorème 1. ***Théorème de Girsanov.*** *Soit* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *un mouvement brownien sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, et soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*, la filtration engendrée par ce mouvement brownien. Soit* $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$*, un processus adapté. Pour tout* $0 \leq t \leq T$*, posons*

$$Z_t := \exp\left(-\int_0^t \theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_u^2 du\right)$$

$$W_t^* := W_t + \int_0^t \theta_u du$$

Supposons que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_u^2 Z_u^2\right] < \infty$$

Soit $Z := Z_T$*. Soit* $\mathbb{Q}$ *la probabilité admettant* Z *comme densité par rapport à la mesure de probabilté* $\mathbb{P}$*. Sous la probabilité* $\mathbb{Q}$*, le processus* $(W_t^*)_{0\leq t\leq T}$ *est un mouvement brownien.*

2.4. **Le pricing par probabilité risque-neutre.** Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, un mouvement brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, la filtration engendrée par ce mouvement brownien. Considérons une option européenne de maturité T et de strike K portant sur un sous-jacent dont le cours est symbolisé par un processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$. Le payoff de cette option à maturité est noté $h(S_T)$ où h est supposé suffisamment régulière $\mathcal{C}^2$ par morceaux par exemple. La dynamique du processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ est donnée par

$$dS_t = S_t(\alpha_t dt + \sigma_t dW_t)$$

Le processus de tendance $(\alpha_t)_{0\leq t\leq T}$ et de volatilité $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ sont supposés adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Supposons que pour tout $0 \leq t \leq T$, σ_t est presque sûrement non nul. Le processus des prix de l'actif est donné par un mouvement brownien géométrique, et il est équivalent d'écrire pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \left(\alpha_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds\right)$$

Supposons que le taux sans risque est donné par un processus de taux d'intérêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, noté $(R_t)_{0\leq t\leq T}$. Pour tout $0 \leq t \leq T$, posons

$$D_t = e^{-\int_0^t R_t dt} \qquad \text{et} \qquad \theta_t = \frac{\alpha_t - R_t}{\sigma_t}$$

D'après la formule d'Itô,

$$d(D_t S_t) = \sigma_t D_t S_t(\theta_t dt + dW_t)$$

A l'aide de la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ utilisée dans le théorème de Girsanov (les notations ont été préservées), il vient

$$d(D_tS_t) = \sigma_t D_t S_t dW_t^*$$

et sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus $(D_tS_t)_{0\leq t\leq T}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale. Considérons à présent un agent possédant une richesse initiale notée V_0. Supposons qu'il choisisse une stratégie autofinançante dans l'actif sans risque et dans le sous-jacent. Le nombre de parts du sous-jacent est décrit par un processus noté $(\Delta_t)_{0\leq t\leq T}$. Soit $(V_t)_{0\leq t\leq T}$, le processus représentant la valeur du portefeuille résultant de cette stratégie. D'après la formule d'Itô, on peut écrire

$$d(D_tV_t) = \Delta_t\sigma_t D_t S_t dW_t^*$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, connaître le prix de l'option revient à connaître la valeur du portefeuille initiale V_0 et le processus d'allocation en sous-jacent $(\Delta_t)_{0\leq t\leq T}$, tel que l'on ait l'égalité

$$h(S_T) = V_T \quad \text{p.s.} \tag{2}$$

Supposons que notre agent connaisse la valeur du portefeuille initiale V_0 et le processus d'allocation en sous-jacent $(\Delta_t)_{0\leq t\leq T}$ telle que l'égalité (2) soit vraie. Le processus $(D_tV_t)_{0\leq t\leq T}$ étant une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$, on a

$$D_tV_t = \mathbb{E}[D_TV_T] = \mathbb{E}[D_Th(S_T)|\,\mathcal{F}_t]$$

Par conséquent, en notant $(P_t)_{0\leq t\leq T}$, le processus du prix de l'option, on en déduit donc que pour $0 \leq t \leq T$,

$$P_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T R_s ds}h(S_T)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \tag{3}$$

Exemple. Dans le cas d'un call, il est possible de mener à bout le calcul de la quantité $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T R_s ds}h(S_T)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$ pour $0 \leq t \leq T$, et de retomber sur la formule de Black et Scholes.

2.5. **Théorème de représentation et marché complet.** Afin de justifier la formule (3), il convient d'exposer les raisons pour lesquelles il existe une valeur portefeuille initiale V_0 et le processus d'allocation en sous-jacent $(\Delta_t)_{0\leq t\leq T}$ telle que l'égalité (2) soit vraie. Pour ce faire énonçons le théorème de représentation suivant :

Théorème 2. ***Théorème de représentation.*** *Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, la filtration engendrée par ce mouvement brownien. Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$, une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale. Alors il existe un processus adapté $(\Gamma_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_u dW_u$$

Par conséquent, le processus $(D_t V_t)_{0\leq t\leq T}$ étant une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$, en appliquant le théorème de représentation 2, il existe un processus adapté $(\Gamma_t^*)_{0\leq t\leq T}$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$

$$D_t V_t = V_0 + \int_0^t \Gamma_u^* dW_u^*$$

En choisissant

$$V_0 = P_0 \qquad \text{et, pour tout } 0 \leq t \leq T, \qquad \Delta_t = \frac{\Gamma_t^*}{\sigma_t D_t S_t}$$

l'égalité (2) est alors vraie.

3. Extension de la formule de Black et Scholes

Même si la formule de Black et Scholes est robuste, elle présente des limites. Par exemple, le paramètre de volatilité est supposé constant alors qu'en pratique, l'observation des prix sur les marchés financiers nous montre qu'il dépend de la maturité considérée et du strike. Une autre limite est celle de la continuité des trajectoires. Il est commun d'observer sur les marchés financiers de brusques sauts d'actifs. Afin de traduire cette réalité, Merton (1976) a introduit un processus de sauts dans la dynamique du sous-jacent. Cependant, la discontinuité des trajectoires a introduit un risque irréductible : le marché est alors incomplet et il est alors impossible de répliquer exactement l'option.

Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, un mouvement brownien sur un espace de probabilité noté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(N_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de Poisson d'intensité λ sous la probabilité $\mathbb{P}$, et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, la filtration engendrée par les processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(N_t)_{0\leq t\leq T}$. Considérons un call européen de maturité T et de strike K portant sur un sous-jacent dont le cours est symbolisé par un processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$. Le taux sans risque est noté r. La dynamique du processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$

est donnée par[6]

$$dS_t = S_{t-}((\alpha - x\lambda)dt + \sigma dW_t + xdN_t)$$

où $-1 < x \leq 0$ et $(\alpha, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times R_+^*$.

D'après le résultat sur les Équations Différentielles Stochastiques de Doléans-Dade, pour tout $0 \leq t \leq T$, le processus des prix de l'actif est donné par

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + (\alpha - x\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right)(1+x)^{N_t}$$

Pour $(\theta, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et pour $0 \leq t \leq T$, posons

$$Z_t^\theta := \exp\left(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

$$Z_t^\mu := \exp\left((\lambda - \mu)\, t\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N_t}$$

$$Z_t^{\theta,\mu} := Z_t^\theta Z_t^\mu$$

$$\mathcal{D} := \{Z_T^{\theta,\mu} : (\theta,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\}$$

Soit $\mathcal{M}$, l'ensemble des probabilités risque-neutres. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donné par

$$\mathcal{M} = \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P} \;\; \forall A \in \mathcal{F} \;\text{ et }\; Z_T \in \mathcal{D}\}$$

Soit $\mathbb{Q}$, une probabilité risque-neutre caractérisée par le processus $(Z_t^{\theta,\mu})_{0 \leq t \leq T}$. Soit $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$, le processus du prix du call sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$. Pour $0 \leq t \leq T$, on a

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Le processus $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ étant markovien, il est légitime de poser, pour $0 \leq t \leq T$,

$$V_t := V(t, S_t)$$

Supposons la fonction V suffisamment régulière afin de pouvoir appliquer la formule d'Itô avec sauts. La fonction V vérifie alors sur $]0, T[\times]0, \infty[$ l'équation intégro-différentielle suivante :

$$-rV + V + (r - \mu x)s\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \mu(V(t,(1+x)s) - V(t,s)) = 0$$

sous la condition terminale

$$c(T, x) = (x - K)_+ \quad \forall x \geq 0$$

[6]Le processus $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ étant un processus càdlàg, i.e. continu à droite et ayant une limite à gauche, $S_{t-} := \lim_{s \to t, s < t} S_s$.

Dans la pratique, cette équation se résout à l'aide de méthode numériques très utiles en mathématiques financières.

4. Conclusion

Les mathématiques financières reposent sur deux domaines des mathématiques : les probabilités avec la théorie des processus et plus particulièrement du mouvement brownien et la théorie des Équations aux Dérivées Partielles.

Références

[1] Nadine Bellamy, *Wealth optimization in an incomplete market driven by a jump-diffusion process*, The Journal of Mathematical Economics **35** (2001), 259–287.

[2] R. Cont and P. Tankov, *Financial modelling with jump processes*, Chapman and Hall, 2004.

[3] Monique Jeanblanc, *Processus à sauts et application à la finance.*, Lectures given at the ENSAE ; forthcoming book with Yor and Chesney, 2004.

[4] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Methods of mathematical finance*, Springer, 2ème édition, 1999.

[5] Ioannis J.P. Lehoczky Karatzas and Steven E. Shreve, *Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market*, SIAM Journal on Control and Optimization **29** (1991), no. 1, 702–730.

[6] Harry Markowitz, *Portfolio selection : Efficient diversification of an investment*, Journal of Finance **7** (1959), 77–91.

[7] Robert Merton, *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model*, Journal of Economic Theory **3** (1971), 373–413.

[8] Xing Jin Peter Carr and Dilip Madan, *Optimal investment in derivative securities*, Finance and Stochastics (2001), volume 5, issue1, 33–59.

[9] Huyên Pham, *Contrôle optimal stochastique et applications en finance*, forthcoming ed., Springer, 2003.

[10] Philip Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, Application of Mathematics, 21, Second Edition, 1995.

[11] Paul Samuelson, *Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming*, Review of Economics and Statistics **51** (1969), 239–246.

[12] Walter Schachermayer, *Optimal investment in incomplete financial markets*, Mathematical Finance : Bachelier Congress 2000 (St.R. Pliska H. Geman, D. Madan and T. Vorst, eds.), Springer, 2001, pp. 427–462.

[13] William F. Sharpe, *Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance **19** (1964), 425–442.