LE THÉORÈME TAUBÉRIEN DE WIENER

Ramona ANTON et Aurélien DJAMENT

juin 2001

Sujet proposé par Régis de la BRETÈCHE

On se propose, à partir d'un résultat général "abstrait" d'analyse de Fourier, le théorème de densité de Wiener (qui fait l'objet de la section 2), d'établir le théorème taubérien de Wiener, dont on déduit aisément d'autres théorèmes taubériens plus "concrets" (section 3). Combinés à des considérations élémentaires d'arithmétique (établis dans les sous-sections 1.2 et 4.2.1) et à quelques lemmes cruciaux (voir 1.3 et 4.2.2), ils entraînent aussitôt des résultats centraux de théorie des nombres : nous donnons à la section 4 l'exemple du théorème des nombres premiers et du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers en progression arithmétique.

Table des matières

1 Préliminaires arithmétiques

La fonction π, qui à x associe le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, s'avère peu maniable : nous présentons ici des fonctions auxilliaires, introduites par Chebyshev, dont le comportement asymptotique est plus facile à étudier que celui de π ($\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$, théorème des nombres premiers), qui fut conjecturé dès le dix-huitième siècle. Nous introduisons ensuite la fonction ζ de Riemann, qui fournit la clé de cette étude (cf. preuve du théorème d'Ingham).

Convention : les sommations ou produits indicés par p ne portent que sur les nombres p *premiers*.

1.1 Sommation d'Abel

Les différents procédés de sommation d'Abel, dont on trouvera une preuve dans [9], constituent un outil très commode en arithmétique.

Proposition 1 (formule classique de sommation d'Abel) : *Soient* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *des suites de nombres complexes ; on pose* $A_0 = 0$, $A_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ *pour* $n \geq 1$. *On a alors, pour tout* $N \geq 1$ *:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}). \tag{1}$$

Proposition 2 (formule de sommation d'Abel pour les intégrales de Stieltjes) : *Etant donnée une suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de nombres complexes, on pose* $A(t)= \sum_{n\leq t} a_n$ $(t > 0)$. *Alors, pour* $b \in C^1([1, x])$, *on a :*

$$\sum_{1\leq n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Corollaire (comparaison d'une somme et d'une intégrale) : *Soit* f *une fonction réelle et monotone sur l'intervalle* $[a, b]$, $a,b\in \mathbb{Z}$. *Alors il existe un réel* $\theta = \theta(a, b)$, $0 \leq \theta \leq 1$ *tel que :*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \theta(f(a) - f(b)).$$

1.2 Fonctions arithmétiques

On appelle *fonction arithmétique* une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs complexes. La fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si

$$\begin{cases} (i)\ f(1) = 1 \text{ (ce qui équivaut à } f \text{ non identiquement nulle si (ii) est vérifiée),} \\ (ii)\ f(mn) = f(m)f(n) \text{ pour } (m, n) = 1. \end{cases}$$

On dit que f est *complètement multiplicative* si la condition (ii) est satisfaite même pour $(m, n) \neq 1$.

1.2.1 La fonction μ de Möbius

Soit μ la fonction arithmétique définie par

$$\begin{cases} (i)\ \mu(1) & = 1, \\ (ii)\ \mu(n) & = (-1)^k \text{ si } n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k,\ p_i \text{ premiers distincts,} \\ & = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La fonction μ est multiplicative (conséquence immédiate de la définition). Cette fonction permet d'établir les théorèmes d'inversion ci-dessous grâce à la formule suivante :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1, \\ 0 \text{ si } n > 1. \end{cases}$$

En effet, les seuls diviseurs d de n tels que $\mu(d) \neq 0$ sont ceux sans facteur carré, donc, si $p_1 \ldots p_k$ sont les nombres premiers (distincts) divisant $n > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \sum_i \mu(p_i) + \sum_{i<j} \mu(p_i p_j) + \ldots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k) \\ &= 1 - C_k^1 + C_k^2 + \ldots + (-1)^k C_k^k = (1-1)^k = 0. \end{aligned}$$

Théorème 1 (Première formule d'inversion de Möbius) : *Soit* f *une fonction arithmétique et* g *définie par*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Alors on a

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Ce résultat est un cas particulier du théorème suivant :

Théorème 2 (Deuxième formule d'inversion de Möbius) : *Soit* $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{C}$, *posons*

$$g(x) = \sum_{n\leq x} f\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

pour $x \geq 1$. *Alors pour tout* $x \geq 1$

$$f(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n) g\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Démonstration : On a en effet

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x} \mu(n) g\Big(\frac{x}{n}\Big) &= \sum_{n\leq x} \mu(n) \sum_{k\leq \frac{x}{n}} f\Big(\frac{x}{nk}\Big) \\ &= \sum_{nk\leq x} \mu(n) f\Big(\frac{x}{nk}\Big) = \sum_{m\leq x} f\Big(\frac{x}{m}\Big) \sum_{d|m} \mu(d) \end{aligned}$$

et la formule précédente donne la conclusion.

1.2.2 La fonction φ d'Euler

La fonction φ associe à n le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. On rappelle la propriété suivante de φ :

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m.$$

Cette identité et la formule d'inversion de Möbius donnent

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Autrement dit, $\varphi = Id * \mu$, où * désigne la convolution de Dirichlet (définie par $(a*b)(n) = \sum_{k|n} a(k) b(\frac{n}{k})$).
Comme μ est une fonction multiplicative, on en déduit :

Proposition 3 : *La fonction* φ *d'Euler est multiplicative.*

1.2.3 La fonction Λ de von Mangoldt

On définit Λ par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^m,\ m > 0,\ p \text{ premier}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n) \tag{3}$$

En effet, si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$, où les p_i sont premiers distincts, on a
$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^r \sum_{a=1}^{a_i} \Lambda({p_i}^a) = \sum_{i=1}^r a_i \log(p_i) = \log(n)$.
Cette identité et la formule d'inversion de Möbius fournissent

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log\frac{n}{d} = \log(n) \left(\sum_{d|n} \mu(d)\right) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \\ &= -\sum_{d|n} \mu(d) \log(d). \end{aligned}$$

Ainsi $\Lambda = \mu * \log = -\mu \log * 1$.

1.2.4 Les fonctions ϑ et ψ de Chebyshev

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p, \text{ et } \psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p.$$

Remarques : -On a $\vartheta(x) = 0$ pour $x < 2$.
- Par définition de la fonction Λ de von Mangoldt, $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$.

On va établir des relations entre $\dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$, $\dfrac{\vartheta(x)}{x}$, $\dfrac{\psi(x)}{x}$.

Théorème 3 : *Soient*

$$\begin{aligned} l_1 &= \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{logx}} &, L_1 &= \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{logx}}, \\ l_2 &= \liminf_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} &, L_2 &= \limsup_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}, \\ l_3 &= \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} &, L_3 &= \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}. \end{aligned}$$

Alors $l_1 = l_2 = l_3$ et $L_1 = L_2 = L_3$.

Démonstration : Pour tout $x \ge 1$

$$\vartheta(x) \le \psi(x) \le \sum_{p \le x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \sum_{p \le x} 1 = \log x \cdot \pi(x).$$

Donc on a $\vartheta(x) \le \psi(x) \le \log x \cdot \pi(x)$, ce qui implique $\frac{\vartheta(x)}{x} \le \frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\log x}{x} \cdot \pi(x)$ d'où $L_2 \le L_3 \le L_1$.
Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $x > 1$, $\vartheta(x) \ge \sum_{x^\alpha < p \le x} \log p$. Or $x^\alpha < p \le x$ implique $\alpha \log x < \log p$, donc $\vartheta(x) > \alpha \log x \sum_{x^\alpha < p \le x} 1 = \alpha \log x (\pi(x) - \pi(x^\alpha))$. Comme $\pi(x^\alpha) \le x^\alpha$, $\vartheta(x) > \alpha \log x(\pi(x) - x^\alpha)$. Ainsi :

$$\frac{\vartheta(x)}{x} > \alpha \frac{\log x}{x} \cdot \pi(x) - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}}. \tag{4}$$

Comme $0 < 1 - \alpha < 1$, $\frac{\log x}{x^{1-\alpha}} \to_{x \to +\infty} 0$. En faisant tendre x vers l'infini dans (4), on obtient $L_2 \ge \alpha L_1$. Comme ceci est vrai pour tout $\alpha \in]0,1[$, $L_2 \ge L_1$. Donc $L_1 = L_2 = L_3$.
Pour $l_1 = l_2 = l_3$ on procède de même.

Étude de la fonction ψ : Posons $F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi(\frac{x}{m})$: on va montrer que

$$F(x) = x \log x - x + b(x) \log x$$

où $b(x) = O(1)$ quand x tend vers l'infini.
Comme $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(x)$, ψ est une fonction positive (et croissante). Par suite F est une fonction croissante. La somme $\sum_{m=1}^{\infty} \psi(\frac{x}{m})$ est en fait finie parce que $\psi(x) = 0$ pour $x < 2$.

$$\text{Pour } n > 1,\ F(n) - F(n-1) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\psi\Big(\frac{n}{m}\Big) - \psi\Big(\frac{n-1}{m}\Big) \right).$$

Le terme général de la somme est nul, sauf pour $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, auquel cas il vaut $\Lambda(\frac{n}{m})$. Donc par (3)

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m|n} \Lambda\Big(\frac{n}{m}\Big) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

Ainsi $F(n) = \sum_{m=1}^{n} \log m = \log(n!)$.

Cela suggère la comparaison de $F(x)$ avec $J(x) = \int_1^x \log t dt = x \log x - x + 1$. On a, pour $n \le x \le n+1$,

$$J(x) < F(n) \le F(x) \le F(n+1) < J(n+2).$$

Donc $|F(x) - J(x)| < 2 \log(x+2)$, et

$$F(x) = x \log x - x + 1 + b(x) \log x = x \log x - x + b(x) \log x,$$

$b(x) = O(1)$ quand $x \to \infty$.

Conséquences : — On a $\psi(x) = O(x)$
(en effet $\sum_{n\leq x}(\psi(\frac{x}{n}) - \frac{x}{n} + \gamma + 1) = O(\log x)$, puis utiliser la deuxième formule d'inversion de Möbius)
—D'autre part

$$F(x) = \sum_{nm\leq x} \Lambda(m) = \sum_{m\leq x} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right], \text{ d'où}$$

$$\sum_{m\leq x} \frac{\Lambda(m)}{m} = O(x) \text{ (car } \sum_{m\leq x} \frac{\Lambda(m)}{m} \leq \frac{2}{x}F(x)).$$

1.3 La fonction ζ de Riemann

On va d'abord établir une identité essentielle.

Identité d'Euler : *Pour* $\Re s > 1$*, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}.$$

Cette identité découle du théorème suivant, appliqué avec $f(n) = \frac{1}{n^s}$.
Théorème 4 : *Soit* f *une fonction arithmétique multiplicative telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge absolument. Alors on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \ldots).$$

Si de plus f *est complètement multiplicative* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1-f(p))^{-1}$.
Démonstration : Soient $P(x) = \prod_{p\leq x}(1 + f(p) + f(p^2) + \ldots)$ et $A(x)$ l'ensemble des entiers $n \geq 1$ dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à x : comme P est un produit fini de séries absolument convergentes, si

$$P(x) = \sum_{n\in A(x)} f(n) \text{ et } S = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n),$$

$$|P(x) - S| \leq \sum_{n\in \complement A(x)} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)|.$$

Vu que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ converge, $\lim_{x\to\infty} P(x) = S$.
De plus le produit dans la définition de $P(x)$ converge absolument :

$$\sum_{p\leq x} |f(p) + f(p^2) + \ldots| \leq \sum_{p\leq x} (|f(p)| + |f(p^2)| + \ldots) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)| \leq \infty.$$

Si f est complètement multiplicative, $\prod_p(1 + f(p) + f(p^2) + \ldots) = \prod_p(1 + f(p) + f(p)^2 + \ldots) = \prod_p(1-f(p))^{-1}$.

Définition (Fonction ζ de Riemann) : On pose, pour $\Re s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \tag{5}$$

On note $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$.
L'identité d'Euler donne $\zeta(s) \neq 0$ (pour $\sigma > 1$).
La fonction ζ est très importante en théorie des nombres ; son prolongement analytique est étroitement lié aux nombres premiers.

Proposition 4 : *La fonction $\zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe pour $\sigma > 0$ avec un unique pôle, simple, en $s = 1$, de résidu 1.*[1]

Démonstration : Par la formule sommatoire d'Abel avec $b(x) = \frac{1}{x^s}$, $a_n = 1$ (donc $A(t) = [t]$),

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s \int_1^x \frac{[u]}{u^{s+1}} \mathrm{d}u.$$

Pour $\sigma > 1$, $\frac{[x]}{x^s} \to_{x \to +\infty} 0$, donc

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{[u]}{u^{s+1}} \mathrm{d}u, \tag{6}$$

puis en écrivant $[u] = u - \{u\}$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}} \mathrm{d}u. \tag{7}$$

Cette formule définit bien une fonction méromorphe pour $\sigma > 0$, avec un pôle simple en $s = 1$, de résidu 1.

La propriété fondamentale pour toutes les démonstrations analytiques du théorème des nombres premiers est :

Proposition 5 : *On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $\zeta(1 + it) \neq 0$.*

La preuve suivante est due à de La Vallée-Poussin.

Démonstration : Pour $\sigma > 1$ $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, donc

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^\infty m^{-1} p^{-ms}.$$

En considérant la partie réelle, on obtient

$$\log |\zeta(s)| = \sum_p \sum_{m=1}^\infty m^{-1} p^{-m\sigma} \cos(mt \log p).$$

Pour α réel, on a $0 \leq 2(1 + \cos \alpha)^2 = 3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha$, ce qui implique

$$\sum_p \sum_{m=1}^\infty m^{-1} p^{-m\sigma} (3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)) \geq 0$$

et donc

$$3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 0.$$

Donc pour $\sigma > 1$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$|\zeta(\sigma)|^3 \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1,$$

ce qui entraîne

$$|(\sigma - 1)\zeta(\sigma)|^3 |\frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1}|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\zeta(1 + it_0) = 0$: comme ζ est holomorphe au voisinage de $1 + it_0$, si dans cette inégalité (au point $t = t_0$), on fait tendre σ vers 1, alors le terme de gauche tend vers une limite finie tandis que celui de droite tend vers $+\infty$, ce qui est absurde, d'où la conclusion.

2 Le théorème de densité de Wiener

On note $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$.

[1] en fait, on peut prolonger ζ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ entier—cf. [9] ; un des avantages des méthodes taubériennes est de pouvoir prouver le théorème des nombres premiers sans utiliser ce prolongement optimal.

2.1 L'algèbre de Wiener sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{U}$

On note $L^1(\mathbb{Z})$ et $L^1(\mathbb{R})$ les espaces usuels, $\mathbb{Z}$ étant muni de la mesure de comptage et $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue[2]. On note $*$ la convolution, de sorte que, si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ (respectivement $L^1(\mathbb{Z})$), on a :

$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$ —qui est défini pour presque tout x (resp. $(f * g)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)g(n-k)$).

La *transformée de Fourier* $\hat{f}$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$ (resp. $f \in L^1(\mathbb{Z})$) est la fonction continue[3] définie sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{U}$) par :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t \text{ (resp. } \hat{f}(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)u^n \text{).}$$

Rappelons le résultat classique suivant (pour une démonstration, voir par exemple [8]) :

Proposition 1 : 1) *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\hat{f}}(-x)$ (formule d'inversion de Fourier).*
2) *Soit $f \in L^1(\mathbb{U})$ et, pour $n \in \mathbb{Z}, a(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{iu})e^{-inu}\mathrm{d}u$. Si $a \in L^1(\mathbb{Z})$ on a $f = \hat{a}$.*

En particulier, la transformation de Fourier est une application linéaire *injective* ; une application élémentaire du théorème de Fubini montre qu'elle transforme la convolution en la multiplication usuelle. L'image de $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^1(\mathbb{Z})$), $\mathbb{C}$-algèbre topologique pour l'addition usuelle et la convolution[4] par cette application est appelée *algèbre de Wiener sur* $\mathbb{R}$ *(resp. sur* $\mathbb{U}$*)*, on la notera $W(\mathbb{R})$ (resp. $W(\mathbb{U})$) : munie de l'addition et de la multiplication usuelles, c'est une $\mathbb{C}$-algèbre associative et commutative, *sans élément unité (resp.* avec *élément unité).*

Le théorème de densité de Wiener sur $L^1(\mathbb{R})$ dont la démonstration est l'objectif de cette section possède un analogue sur $L^1(\mathbb{Z})$, nous présenterons en parallèle la preuve des deux résultats car le cas de $L^1(\mathbb{Z})$, facilité par l'existence d'un élément unité dans $W(\mathbb{U})$ (et la compacité de $\mathbb{U}$), éclaire le cas de $L^1(\mathbb{R})$, similaire mais plus délicat.

Enfin, on transporte la topologie de $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^1(\mathbb{Z})$) à $W(\mathbb{R})$ (resp. $W(\mathbb{U})$) en y définissant une norme par :

$||\hat{f}||_{W(\mathbb{R})} = ||f||_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t$ (resp. $||\hat{f}||_{W(\mathbb{U})} = ||f||_{L^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$) (ceci a un sens car $f \longmapsto \hat{f}$ est injective). La transformation de Fourier devient ainsi une isométrie.

2.2 Quelques lemmes

Pour $a > 0$ (resp. $0 < a < \pi$), on note $\lambda_a \in L^1(\mathbb{R})$ (resp. $\delta_a \in L^1(\mathbb{U})$) la fonction donnée par : $\lambda_a(x) = \frac{1}{a}\max(0, 1 - \frac{|x|}{a})$ (resp. $\delta_a(e^{ix}) = \frac{1}{a}\max(0, 1 - \frac{|x|}{a})$ si $x \in]-\pi, \pi]$). On pose aussi $k(t) = (\frac{\sin t}{t})^2$ si $t \neq 0$, $k(0) = 1$.

Lemme 1 : 1) $\lambda_a \in W(\mathbb{R})$. *Plus précisément,* $\lambda_a = \widehat{l_a}$ *où* $l_a(x) = \frac{1}{2\pi}k(\frac{ax}{2})$.
2) $\delta_a \in W(\mathbb{U})$. *Plus précisément,* $\delta_a = \widehat{d_a}$ *où* $d_a(n) = \frac{1}{2\pi}k(\frac{an}{2})$.

Démonstration : 1) Comme λ_a est paire, pour $x \neq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda_a}(x) &= \frac{2}{a}\int_0^a \Big(1 - \frac{t}{a}\Big)\cos(xt)\mathrm{d}t = \frac{2}{a^2x}\int_0^a \sin(xt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{(ax)^2}(1 - \cos(ax)) = k\Big(\frac{ax}{2}\Big).\end{aligned}$$

On conclut grâce à la formule d'inversion de Fourier (proposition 1-1)).
2) Analogue.

On désigne par $W_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments de $W(\mathbb{R})$ *à support compact.* Ainsi $\lambda_a \in W_0(\mathbb{R})$.

Lemme 2 : $W_0(\mathbb{R})$ *est dense dans* $W(\mathbb{R})$.

Démonstration : Soient $f \in W(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f = \hat{g}$: pour tout $a > 0$, $a\lambda_a f = \widehat{al_a * g} \in W_0(\mathbb{R})$; il suffit donc d'établir

$$\lim_{a\to+\infty} ||g - al_a * g||_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \ .$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} al_a = a\lambda_a(0) = 1 \ ,$$

[2]comme d'habitude, on ne fera souvent pas de différence entre une fonction et sa classe d'équivalence dans $L^1(\mathbb{R})$.
[3]la continuité est une conséquence facile du théorème de convergence dominée.
[4]ce qui signifie que ces opérations sont continues.

$$g(x) - (al_a * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} al_a(t)(g(x) - g(x-t))\mathrm{d}t$$

pour (presque) tout x ; si

$$\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(x-t)|\mathrm{d}x \ ,$$

le théorème de Fubini donne

$$||g - al_a * g||_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}} al_a(t)\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} l_1(u)\alpha\Big(\frac{u}{a}\Big)\mathrm{d}u$$

(car $l_a(t) = l_1(at)$). Or, comme α est continue[5], pour tout u,

$$\lim_{a\to+\infty} l_1(u)\alpha\Big(\frac{u}{a}\Big) = 0\,;$$

puisque α est bornée (par $2||g||_{L^1(\mathbb{R})}$) et l_1 dans $L^1(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée permet de conclure.

Lemme 3 (partitions de l'unité dans l'algèbre de Wiener) : *Soit $(U_n)_{1\leq n\leq k}$ un recouvrement fini d'un compact K de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{U}$) par des ouverts de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{U}$). Il existe des éléments D_n ($1 \leq n \leq k$) de $W(\mathbb{R})$ (resp. $W(\mathbb{U})$) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ tels que $D_n = 0$ hors de U_n et $\sum_{n=1}^k D_n = 1$ sur K.*

Démonstration : On traite par exemple le cas $K \subset \mathbb{R}$. Il existe des compacts

$$C_n \ (1 \leq n \leq k) \text{ tels que } C_n \subset U_n \text{ et que } \bigcup_{n=1}^{k} C_n \text{ soit un voisinage de } K$$

(si A est un voisinage compact de K inclus dans $\bigcup_{n=1}^k U_n$, poser $C_n = \{x \in A | d(x, \complement U_n) \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k d(x, \complement U_i)\}$, où $d(x,P)$ désigne la distance de x à une partie P de $\mathbb{R}$) et des fonctions χ_n mesurables sur $\mathbb{R}$ ($1 \leq n \leq k$) à valeurs dans $[0,1]$ telles que

$$\chi_n = 0 \text{ hors de } C_n \text{ et } \sum_{n=1}^{k} \chi_n = 1 \text{ sur un voisinage de } K$$

(prendre pour χ_n la fonction caractéristique de $C_n \cap \complement(\bigcup_{i<n} C_i)$).

$$\text{Posons } D_n = \chi_n * \lambda_a, \text{ où } a > 0 : D_n \in W(\mathbb{R}) \text{ car } \widehat{D_n} = \widehat{\chi_n}\widehat{\lambda_a} \in L^1(\mathbb{R})$$

($\widehat{\chi_n}$ est bornée par la mesure de C_n et $\widehat{\lambda_a} \in L^1(\mathbb{R})$ par le lemme 1), il suffit alors d'appliquer la proposition 1-1). Pour tout $1 \leq n \leq k$, les D_n sont nulles hors de $C_n + [-a, a]$, donc de U_n pour a assez petit ; de $\sum_{n=1}^k \chi_n = 1$ au voisinage de K on déduit de même $\sum_{n=1}^k D_n = 1$ sur K pour a assez petit, ce qui achève la démonstration.

2.3 L'action des fonctions analytiques

Nous établissons maintenant deux résultats fondamentaux dus à Wiener.

Proposition 2 : *Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ (resp. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) telle que tout élément de $\mathbb{U}$ (resp. $\mathbb{R}$) possède un voisinage sur lequel f coïncide avec un élément de $W(\mathbb{U})$ (resp. $W(\mathbb{R})$). Alors $f \in W(\mathbb{U})$ (resp. pour tout compact K de $\mathbb{R}$, f coïncide sur K avec un élément de $W(\mathbb{R})$).*

Démonstration : Comme $\mathbb{U}$ (resp. K) est compact, il existe un recouvrement *fini* $(U_n)_{1\leq n\leq k}$ de $\mathbb{U}$ (resp. K) par des ouverts de $\mathbb{U}$ (resp. $\mathbb{R}$) et des éléments g_n ($1 \leq n \leq k$) de $W(\mathbb{U})$ (resp. $W(\mathbb{R})$) tels que $f = g_n$ sur U_n. D'après le lemme 3, on dispose d'éléments D_n ($1 \leq n \leq k$) de $W(\mathbb{U})$ (resp. $W(\mathbb{R})$) nuls hors de U_n, avec $\sum_{n=1}^k D_n = 1$ (resp. $\sum_{n=1}^k D_n = 1$ *sur* K). Pour tout n, $D_n g_n = D_n f$ car $g_n(x) = f(x)$ si $x \in U_n$ et $D_n(x) = 0$ sinon. Ainsi, $f = \sum_{n=1}^k D_n g_n$ appartient à $W(\mathbb{U})$ (resp. f coïncide sur K avec l'élément $\sum_{n=1}^k D_n g_n$ de $W(\mathbb{R})$), ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 3 : *Soient ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\phi : \omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique et $f \in W(\mathbb{U})$ (resp. $f \in W(\mathbb{R})$) à valeurs dans ω. Alors $\phi \circ f \in W(\mathbb{U})$ (resp. pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\phi \circ f$ coïncide sur K avec un élément de $W(\mathbb{R})$).*

[5] pour g continue à support compact, cela découle du théorème de convergence dominée ; le cas général s'en déduit par densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$.

Remarque : Seul le cas où $\phi(z) = 1/z$ sera utile par la suite[6].

Lemme : *Soit $f \in W(\mathbb{U})$ (resp. $f \in W(\mathbb{R})$). Pour tout $x \in \mathbb{U}$ (resp. $x \in \mathbb{R}$) et tout $r > 0$, il existe $g \in W(\mathbb{U})$ (resp. $g \in W(\mathbb{R})$) coïncidant avec $f - f(x)$ au voisinage de x et telle que $||g||_{W(\mathbb{U})} < r$ (resp. $||g||_{W(\mathbb{R})} < r$).*

Démonstration du lemme : Comme $W(\mathbb{U})$ (resp. $W(\mathbb{R})$) est invariant par translation, on peut supposer $x = 1$ (resp. $x = 0$). Posons, pour $a > 0$,

$$t_a = 4a\delta_{2a} - a\delta_a \text{ (resp. } t_a = 4a\lambda_{2a} - a\lambda_a\text{) et}$$

$$g_a = ft_a - f(1)t_a \text{ (resp. } g_a = ft_a - f(0)t_a\text{) :}$$

$g_a \in W(\mathbb{U})$ (resp. $g_a \in W(\mathbb{R})$) et g_a coïncide avec $f - f(1)$ (resp. $f - f(0)$) au voisinage de 1 (resp. 0). Il suffit donc de prouver

$$\lim_{a\to 0} ||g_a||_{W(\mathbb{U})} = 0 \text{ (resp. } \lim_{a\to 0} ||g_a||_{W(\mathbb{R})} = 0\text{).} \tag{8}$$

Si $p_a = 4ad_{2a} - ad_a$ (resp. $p_a = 4al_{2a} - al_a$), par le lemme 1, $g_a = \widehat{p_a}$, et $p_a(u) = ap_1(au)$. (8) équivaut alors à

$$\lim_{a\to 0} ||h * p_a - \hat{h}(1)p_a||_{L^1(\mathbb{Z})} = 0 \text{ (resp. } \lim_{a\to 0} ||h * p_a - \hat{h}(0)p_a||_{L^1(\mathbb{R})} = 0\text{)}$$

si $h \in L^1(\mathbb{Z})$ (resp. $h \in L^1(\mathbb{R})$) vérifie $\hat{h} = f$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $t \in \mathbb{R}$)

$$(h * p_a - \hat{h}(1)p_a)(n) = a \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)(p_1(an - ak) - p_1(an))$$

$$\text{(resp. } (h * p_a - \hat{h}(0)p_a)(t) = a \int_{\mathbb{R}} h(u)(p_1(at - au) - p_1(at))\mathrm{d}u\text{), donc}$$

$$||h * p_a - \hat{h}(1)p_a||_{L^1(\mathbb{Z})} \le a \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |p_1(an - ak) - p_1(an)|$$

$$\text{(resp. } ||h * p_a - \hat{h}(0)p_a||_{L^1(\mathbb{R})} \le a \int_{\mathbb{R}} |h(u)| \int_{\mathbb{R}} |p_1(at - au) - p_1(at)| \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}u\text{).}$$

Le théorème de convergence dominée montre donc qu'il suffit de prouver que

$$a \sum_{n\in\mathbb{Z}} |p_1(an - ak) - p_1(an)| \text{ (resp. } a \int_{\mathbb{R}} |p_1(at - au) - p_1(at)| \ \mathrm{d}t\text{)} \tag{9}$$

est borné indépendamment de $a > 0$, et de $k \in \mathbb{Z}$ (resp. $u \in \mathbb{R}$) ; et que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (resp. $u \in \mathbb{R}$),

$$\lim_{a\to 0} \ a \sum_{n\in\mathbb{Z}} |p_1(an - ak) - p_1(an)| = 0 \tag{10}$$

$$\text{(resp. } \lim_{a\to 0} \ a \int_{\mathbb{R}} |p_1(at - au) - p_1(at)| \ \mathrm{d}t = 0\text{).}$$

La fin de la preuve diffère légèrement selon les deux cas suivants.
—Dans le cas de $L^1(\mathbb{R})$, on écrit

$$a \int_{\mathbb{R}} |p_1(at - au) - p_1(at)| \ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |p_1(t - au) - p_1(t)| \ \mathrm{d}t \ ,$$

et l'on termine comme dans le lemme 2.
—Dans le cas de $L^1(\mathbb{Z})$, on majore $a\sum_{n\in\mathbb{Z}} |p_1(an - ak) - p_1(an)|$ par $a\sum_{n\in\mathbb{Z}} (|p_1(an - ak)| + |p_1(an)|) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} |p_a(n)|$ puis par $2a\sum_{n\in\mathbb{Z}} (4d_{2a}(n) + d_a(n)) = 6$ (on utilise le lemme 1 et la positivité des d_a), d'où (9). À $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on a, pour $0 < a < \frac{1}{k}$ et $T \ge 2$

$$\begin{aligned} a \sum_{|n|\ge T/a} |p_1(an - ak) - p_1(an)| &\le 2a \sum_{|n|\ge (T-1)/a} |p_1(an)| \\ &\le Ka \sum_{|n|\ge (T-1)/a} \left(\frac{1}{an}\right)^2 \le \frac{C}{T-1} \end{aligned}$$

[6] dans ce cas, la théorie des algèbres de Banach (*avec* unité) fournit une démonstration particulièrement rapide et élégante pour $W(\mathbb{U})$—cf. par exemple [8]—mais il semble difficile de généraliser cette méthode à $W(\mathbb{R})$.

pour des constantes K et C convenables (vu la forme de d_1 donc de p_1—cf. lemme 1). D'autre part, puisque la dérivée de p_1 est bornée, il existe une constante C' telle que

$$a \sum_{|n|<T/a} |p_1(an - ak) - p_1(an)| \leq 2C'akT \ .$$

En prenant dans les deux inégalités précédentes $T = a^{-1/2}$ par exemple, on obtient (10).

Démonstration de la proposition 3 : Soit $t \in \mathbb{U}$ (resp. $t \in \mathbb{R}$) : il existe $r > 0$ et une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, pour $|z - f(t)| < r$, $\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(z - f(t))^n$. D'après le lemme, il existe $g \in W(\mathbb{U})$ (resp. $g \in W(\mathbb{R})$) coïncidant avec $f - f(t)$ au voisinage de t telle que $||g||_{W(\mathbb{U})} < r$ (resp. $||g||_{W(\mathbb{R})} < r$). La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g^n$ (resp. $c_0\alpha + \sum_{n\geq 1} c_n g^n$, où α est un élément de $W(\mathbb{R})$ égal à 1 au voisinage de t) converge dans $W(\mathbb{U})$ (resp. $W(\mathbb{R})$) parce que cet espace est, comme L^1, complet ; sa somme coïncide au voisinage de t avec $\phi \circ f$. La conclusion découle donc de la proposition 2.

2.4 Sous-espaces de L^1 invariants par translation

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{Z}$) et toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (resp. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$), on note $\tau_a f$ la fonction définie par $\tau_a f(x) = f(x - a)$. L'opérateur τ_a induit sur $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^1(\mathbb{Z})$) une isométrie. Un sous-espace E de $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^1(\mathbb{Z})$) est dit *invariant par translation* si $f \in E$ entraîne $\tau_a f \in E$ pour tout a.

Lemme 4 : *Soit E un sous-espace de $L^1(\mathbb{Z})$ (resp. $L^1(\mathbb{R})$) invariant par translation. Alors l'adhérence $\overline{E}$ de E est un idéal.*

Démonstration : Dans le cas de $L^1(\mathbb{Z})$, soient $a \in E$ et $b \in L^1(\mathbb{Z})$ à support fini S : $a * b = \sum_{k\in S} b(k)\tau_k a$ appartient à E ; on déduit le résultat de la densité des suites à support fini dans $L^1(\mathbb{Z})$ (et de la continuité de la convolution).
Dans le cas de $L^1(\mathbb{R})$, comme dans le cas précédent, il suffit de montrer que si $f \in E$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ est à support compact—disons inclus dans $[-K, K]$, alors $f * g \in \overline{E}$. Posons, pour $a > 0$,

$$\phi_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}, |na|\leq K} \Big(\int_{na}^{(n+1)a} g \Big) \tau_{na} f \ (\in E) :$$

nous allons établir que

$$\lim_{a\to 0} ||\phi_a - (f * g)||_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \ . \tag{11}$$

$$\phi_a(x) - (f * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, |na|\leq K} \int_{na}^{(n+1)a} g(u)(f(x - na) - f(x - u))\mathrm{d}u \ ,$$

d'où par le théorème de Fubini

$$||\phi_a - (f * g)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}, |na|\leq K} \int_{na}^{(n+1)a} |g(u)| \ ||\tau_{na} f - \tau_u f||_{L^1(\mathbb{R})}\mathrm{d}u \ ,$$

donc $||\phi_a - (f * g)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||g||_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{|t|\leq a} ||f - \tau_t f||_{L^1(\mathbb{R})}$. Par un argument déjà invoqué dans la preuve du lemme 2, on en déduit (11) puis le résultat.

Nous pouvons à présent établir facilement le théorème de densité de Wiener.

Proposition 4 : *Soit E un sous-espace de $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^1(\mathbb{Z})$) invariant par translation. Si pour tout $u \in \mathbb{R}$ (resp. $u \in \mathbb{U}$) il existe $f \in E$ tel que $\hat{f}(u) \neq 0$, alors E est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^1(\mathbb{Z})$).*

Remarques : 1) Comme $f \longmapsto \hat{f}(u)$ est une forme linéaire continue non nulle, la réciproque est exacte.
2) Seul le cas où il existe $f \in E$ telle que $\hat{f}(u) \neq 0$ pour tout u (auquel on se ramène essentiellement dans la démonstration) nous sera utile pour prouver le théorème taubérien de Wiener.

Démonstration : Pour tout $u \in \mathbb{R}$ (resp. $u \in \mathbb{U}$) il existe $f_u \in E$ telle que $\Re\widehat{f_u}(u) > 0$: $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{U}$) est recouvert par les ouverts $\{x|\Re\widehat{f_u}(x) > 0\}$, donc on peut trouver un recouvrement fini $(U_n)_{1\leq n\leq k}$ de tout compact K de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{U}$) par des ouverts de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{U}$) et des éléments $(f_n)_{1\leq n\leq k}$ de E tels que $\Re\widehat{f_n} > 0$ sur U_n. D'après le lemme 3, il existe des éléments D_n de $W(\mathbb{R})$ (resp. $W(\mathbb{U})$), à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, avec $D_n = 0$ hors de U_n et $\sum_{n=1}^{k} D_n = 1$ sur K (resp. sur $\mathbb{U}$) : si $\phi = \sum_{n=1}^{k} D_n\widehat{f_n}$, ϕ ne s'annule pas sur K (resp. $\mathbb{U}$) et ϕ est dans l'image par la transformation de Fourier de $\overline{E}$ d'après le lemme 4.
Dans le cas de $\mathbb{U}$, on a $1/\phi \in W(\mathbb{U})$ par la proposition 3, et le lemme 4 permet de conclure.
Dans le cas de $\mathbb{R}$, pour tout $h \in W_0(\mathbb{R})$ à support dans K, par la proposition 3 il existe $g \in W(\mathbb{U})$ telle que $g = 1/\phi$ sur K, donc $h = hg\phi$ est dans l'image de l'adhérence de E par la transformation de Fourier (par le lemme 4 à nouveau), et l'on conclut par le lemme 2, la transformation de Fourier étant un isomorphisme d'algèbres.

3 Application à des théorèmes taubériens

3.1 Le théorème de Wiener

Théorème taubérien de Wiener : *Soient $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $\forall u \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(u) \neq 0$ et*

$$\lim_{x\to+\infty}(f * \Phi)(x) = a\hat{f}(0).$$

Alors, pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{x\to+\infty}(g * \Phi)(x) = a\hat{g}(0).$$

Démonstration : On remarque d'abord que $\lim_{x\to+\infty}(f * \Phi)(x) = a\hat{f}(0)$ est équivalent à $\lim_{x\to+\infty}(f * (\Phi - a))(x) = 0$.
On note $h(x) = \Phi(x) - a$ et $E = \{g \in L^1(\mathbb{R}) | \lim_{x\to+\infty}(g * h)(x) = 0\}$.
E est clairement un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{R})$.
E est fermé dans L^1 : si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(g_n \in E)$ converge vers g dans L^1, alors

$$|(g * h)(x) - (g_n * h)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (g_n(y) - g(y))h(x - y)dy \right| \leq ||g - g_n||_1 ||h||_\infty.$$

Cela implique $g_n * h \to_{n\to\infty} g * h$ uniformément, donc $\lim_{x\to+\infty} g * h(x) = 0$.
De plus, E est invariant par translation : pour $g \in E$,

$$(\tau_x g * h)(y) = \int_{\mathbb{R}} g(u - x)h(y - u)du = \int_{\mathbb{R}} g(u)h(y - x - u)du = (g * h)(y - x).$$

Donc $\lim_{y\to+\infty}(\tau_x g * h)(y) = \lim_{y\to+\infty}(g * h)(y - x) = 0$.
Comme $f \in E$ par hypothèse, les conditions de la proposition 4, section 2.4 sont satisfaites et donc $E = \overline{E} = L^1(\mathbb{R})$.

Définition $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ *est dite à oscilation lente à l'infini si $\forall \epsilon > 0$, il existe $R < \infty$ et $\delta > 0$ tel que $|x| > R$, $|y| > R$ et $|x - y| < \delta$.*
On peut définir Φ à oscilation lente à $+\infty$ en remplaçant la condition $|x| > R$, $|y| > R$ par $x > R$, $y > R$.
Théorème taubérien de Wiener (forme de Pitt)*Sous les mêmes hypothéses et avec de plus la condition Φ a oscilation lente à l'infini, on a $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = a$.*
preuveSoit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $f \geq 0$, $\hat{f}(0) = 1$ et $supp(f) \subset]-\delta, \delta[$.

$$\Phi(x) - (f * \Phi)(x) = \int_{|y|<\delta} (\Phi(x) - \Phi(x - y))f(y)dy.$$

Pour x tel que $|x| > R$ on a $|\Phi(x) - \Phi(x - y)| < \epsilon$ et donc

$$\Phi(x) - (f * \Phi)(x) \leq \int_{|y|<\delta} |\Phi(x) - \Phi(x - y)|f(y)dy < \epsilon \int_{|y|<\delta} f(y)dy = \epsilon.$$

Le théorème de Wiener nous fournisse $\lim_{x\to\infty}(f * \Phi)(x) = a$ et on conclut.

3.2 Le théorème d'Ingham

Théorme tauberien d'Ingham*Soit g: $]0, \infty[\to \mathbb{R}$, croissante et telle que $g(x) = 0$ si $x < 1$. Si $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{x}{n})$ pour $-\infty < x < \infty$ et $G(x) = ax \log x + bx + x\epsilon(x)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, alors*

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}g(x) = a.$$

preuve : On demontre d'abord que $x^{-1}g(x)$ est bornée.
$0 \leq g(x) - g(\frac{x}{2}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g(\frac{x}{n}) = G(x) - 2G(\frac{x}{2}) = x(a \log 2 + \epsilon(x) - \epsilon(\frac{x}{2}))$. Donc il existe $A > 0$ tel que $g(x) - g(\frac{x}{2}) \leq Ax$.

$$g(x) = g(x) - g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x}{2}) - g(\frac{x}{4}) + \cdots$$

et donc

$$g(x) < A(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \cdots) = 2Ax.$$

On obtient $x^{-1}g(x) < 2A$.
On fait un changement de variable exponentiel $x \to e^x$ de $]-\infty,\infty[$ vers $]0,\infty[$ et on renote les fonctions comme suite ($x \in \mathbb{R}$) :

$$h(x) = g(e^x), H(x) = G(e^x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(x - \log n).$$

On sait $h(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = e^x(ax + b + \epsilon_1(x))$, avec $\epsilon_1(x) \to 0$, quand $x \to \infty$. Si on note $\Phi(x) = e^{-x}h(x) = e^{-x}g(e^x)$, alors on a $\Phi(x) < 2A$.
Pour appliquer le téorème de Wiener on veut trouver $K \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{K}(t) \neq 0$ en utilisant $\zeta(1+it) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
La formule (..) donne

$$\frac{\zeta(1+it)}{1+it} = \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+2}} =_{u=e^x} = \int_0^{\infty} \frac{[e^x]}{e^{x(1+it)}} = \int_0^{\infty} [e^x]e^{-x}e^{ixt}dx.$$

Si on note $k(x) = [e^x]e^x$, alors $\frac{\zeta(1+it)}{1+it} = \int_0^{\infty} k(x)e^{-ixt}dx$. Pour estimer

$$(\Phi * k)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y-x}h(x-y)[e^y]e^{-y}dy = e^{-x}\int_{-\infty}^{\infty} h(x-y)[e^y]dy,$$

on doit etudier la convolution $(h * u)(x)$, $u(x) = [e^x]$.
Soit v la fonction caractéristique de $[0,\infty[$ et μ la mesure de comptage sur l'ensemble $\{\log n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $u = v * \mu$ et $H = h * \mu$. Donc

$$(h * u)(x) = (h * v * \mu)(x) = (H * v)(x) = \int_0^x H(y)dy.$$

On a $(\Phi * k)(x) = e^{-x}\int_0^x e^y(ay + b + \epsilon_1(y))dy = ax + (b-a) + e^{-x}(a - b + \int_0^x e^y\epsilon_1(y)) = ax + (b-a) + \epsilon_2(x)$, avec $\epsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.
Si on prend λ irrationnel, positif et $K(x) = 2k(x) - k(x-1) - k(x-\lambda)$, on montre que satisfait les propriété annoncées :
$K \in L^1(\mathbb{R})$, car $1 - e^{-x} < k(x) \leq 1$ et alors $-2e^{-x} \leq K(x) \leq e^{-x}(e + e^{\lambda})$, ce qui implique $K(x) \leq Me^{-x}$, $\forall x$.
La formule (..) implique $\int_{\infty}^{\infty} K(x)e^{-ixt}dx = (2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t})\frac{\zeta(1+it)}{1+it}$ et donc $\widehat{K}(t) \neq 0$ pour $t \neq 0$. ζ a un pôle simple en $s = 1$ de residue 1 et donc la terme de droit tend vers $1 + \lambda$ quand $t \to 0$. Donc $\widehat{K}(0) = 1 + \lambda \neq 0$.
$(\Phi * K)(x) = 2(\Phi * k)(x) - (\Phi * k)(x-1) - (\Phi * k)(x-\lambda) = a(1+\lambda) + 2\epsilon_2(x) - \epsilon_2(x-1) - \epsilon_2(x-\lambda)$. Donc

$$\lim_{x\to\infty}(\Phi * K)(x) = a(1+\lambda) = a\widehat{K}(0)$$

Le théorème de Wiener implique

$$\lim_{x\to\infty}(f * \Phi)(x) = a\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy, \ \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

On voudrais appliquer le théorème de Wiener (forme de Pitt) pour conclure, mais on s'appérçoit que les hypothèses ne suffissent pas pour que Φ soit à oscillation lente à l'infini.
On sait $e^x\Phi(x) = g(e^x)$, donc Φ croissante. Donc pour $x - \epsilon \leq y \leq x$ on a $\Phi(y) \leq e^{\epsilon}\Phi(x)$ et pour $x \leq y \leq x + \epsilon$ on a $e^{-\epsilon}\Phi(x) \leq \Phi(y)$.
Si on prend f_1 et f_2 fonctions positives d'intégrale 1 et avec les supports inclusent en $[0,\epsilon]$, respectivement $[-\epsilon, 0]$ (f_1 et $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$) on obtient

$$e^{-\epsilon}(f_1 * \Phi)(x) \leq \Phi(x) \leq e^{\epsilon}(f_2 * \Phi)(x)$$

et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient

$$e^{-\epsilon}a \leq \liminf_{x\to\infty}\Phi(x) \leq limsup_{x\to\infty}\Phi(x) \leq e^{\epsilon}a$$

et ça $\forall\epsilon > 0$. Donc $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = a$.

3.3 Le théorème de Hardy-Littlewood-Karamata

Lemme 1 : *Soient $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+)$, $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\int_0^{\infty} \frac{|\alpha(t)|}{t}\mathrm{d}t$ converge et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)t^{i\xi-1}\mathrm{d}t \neq 0\ .$$

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x\to 0} \int_0^\infty \alpha\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{\phi(t)}{t}\mathrm{d}t = a\int_0^\infty \frac{\alpha(t)}{t}\mathrm{d}t \ .$$

Alors pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{t}\mathrm{d}t$ converge,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^\infty f\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{\phi(t)}{t}\mathrm{d}t = a\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \ .$$

Démonstration : Si l' on effectue le changement de variable $t = e^u$ dans les intégrales précédentes, on constate qu'il s'agit d'une simple réécriture du théorème taubérien de Wiener (par exemple, si $\tilde{\alpha}(u) = \alpha(e^u)$ et $\tilde{\phi}(u) = \phi(e^u)$, $\int_0^\infty \alpha(\frac{x}{t})\frac{\phi(t)}{t}\mathrm{d}t = (\tilde{\alpha} * \tilde{\phi})(\log x)$).

Rappelons que la fonction Γ est définie pour $\Re z > 0$ par $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$.

Lemme 2 : *Si $\Re z > 0$, $\Gamma(z) \neq 0$.*

Cela découle de la formule $\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^\infty (1+\frac{z}{n})^{-1}e^{z/n}$ (γ désignant la constante d'Euler). Pour une preuve, voir par exemple [2].

Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata : *Soit $F(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet telle qu'il existe K, K', ω strictement positifs et $a \in \mathbb{C}$ vérifiant*

$$\Big|\sum_{n\le x}\frac{a_n}{n}\Big| \le K(\log x)^\omega \ , \ |a_n| \le K'(\log n)^\omega \text{ et} \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 1, x>1} (x-1)^\omega F(x) = a \ .$$

$$\textit{Alors on a } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\log x)^\omega}\sum_{n\le x}\frac{a_n}{n} = \frac{a}{\Gamma(\omega+1)} \ .$$

Démonstration : Posons, pour $t \ge 1$, $A(t) = \sum_{n\le t}\frac{a_n}{n}$. Pour $x > 0$, une sommation d'Abel (section 1, proposition 2) fournit :

$$F(1+x) = x\int_1^\infty \frac{A(t)}{t^{1+x}}\mathrm{d}t = x\int_0^\infty A(e^{1/u})\frac{e^{-x/u}}{u^2}\mathrm{d}u \text{ (poser } t = e^{1/u}\text{).}$$

Si $\phi(u) = u^\omega A(e^{1/u})$, $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ (par (12)) et $x^\omega F(1+x) = \int_0^\infty \frac{\phi(u)}{u}\alpha(\frac{x}{u})\mathrm{d}u$ où $\alpha(t) = t^{\omega+1}e^{-t}$, de sorte que $\int_0^\infty \frac{|\alpha(t)|}{t}dt$ est fini et que $\int_0^\infty \alpha(t)t^{i\xi-1}\mathrm{d}t = \Gamma(1+\omega+i\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (lemme 2) : on peut appliquer le lemme 1. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, si $f_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon t}$ pour $\frac{1}{1+\epsilon} \le t \le 1$, 0 sinon,

$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty f_\epsilon\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{\phi(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\epsilon x}\int_x^{(1+\epsilon)x}\phi = \frac{a}{\Gamma(\omega+1)} \tag{13}$$

$$\text{(car } \int_0^\infty \frac{\alpha(t)}{t}\mathrm{d}t = \Gamma(\omega+1) \text{ et } \int_0^\infty \frac{f_\epsilon(t)}{t}\mathrm{d}t = 1\text{).}$$

Or pour $0 \le u < v$,

$$|\phi(u) - \phi(v)| \le (v^\omega - u^\omega)A(e^{1/v}) + u^\omega \sum_{e^{1/v}<n\le e^{1/u}}\frac{a_n}{n} \le \frac{C}{u}(v-u)$$

au voisinage de 0 pour une constante C convenable (à cause de (12) et de l'estimation $\sum_{A<n\le B}\frac{(\log n)^\omega}{n} = O((\log B)^{\omega+1} - (\log A)^{\omega+1})$, qu'on peut prouver par sommation d'Abel par exemple), d'où

$$\Big|\Big(\frac{1}{\epsilon x}\int_x^{(1+\epsilon)x}\phi\Big) - \phi(x)\Big| \le \frac{C}{\epsilon x}\int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{1}{x}(u-x)\mathrm{d}u = \frac{C\epsilon}{2} \ .$$

En faisant tendre ϵ vers 0 dans (13), on obtient alors $\lim\limits_0 \phi = \frac{a}{\Gamma(\omega+1)}$, d'où la conclusion.

Notons qu'une preuve tout à fait analogue permettrait d'établir l'équivalent de ce théorème pour les séries entières, le théorème de Hardy-Littlewood, dont on trouvera une démonstration complètement différente (indépendante du théorème de Wiener) dans [9].

4 Applications arithmétiques

4.1 Le théorème des nombres premiers

Les résultats précédents permettent d'obtenir le théorème des nombres premiers de façon immédiate.

Théorème : *On a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Démonstration : Le théorème 3 de la section 1 montre qu'il suffit d'établir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Au vu de l'étude asymptotique de $F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi(\frac{x}{m})$ (section 1.2.4), on peut appliquer le théorème d'Ingham (section 3.2) pour $g = \psi$, qui fournit la conclusion.

4.2 Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet

4.2.1 Caractères d'un groupe abélien fini

Définition : *Soit G un groupe commutatif fini*[7]*. On appelle* caractère *de G tout morphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.*[8]

$\widehat{G}$ est naturellement muni d'une structure de groupe abélien pour la multiplication ponctuelle, on note χ_0 son élément neutre.

Proposition 1 : *Pour tout groupe abélien fini G, $\widehat{G}$ est isomorphe à G.*
Lemme 1 : *Si G est cyclique d'ordre n, G et $\widehat{G}$ sont isomorphes.*
Démonstration : Soit a un générateur de G. Pour tout $\chi \in \widehat{G}$, $\chi(a)^n = 1$, donc $\chi(a)$ appartient au groupe cyclique d'ordre n des racines n-ièmes de l'unité. Réciproquement, pour toute racine n-ième de l'unité ξ, il existe un unique $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi(a) = \xi$, d'où la conclusion.
Lemme 2 : *Si G_1 et G_2 sont deux groupes abéliens finis, $\widehat{G_1 \times G_2}$ et $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$ sont isomorphes.*
Démonstration : L'application
$\widehat{G_1 \times G_2} \to \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$, $\chi \longmapsto (a \longmapsto \chi(a,1), b \longmapsto \chi(1,b))$ est l'isomorphisme cherché (de réciproque
$(\chi_1, \chi_2) \longmapsto ((a,b) \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(b))$).
Démonstration de la proposition : Comme tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques, le résultat découle des deux lemmes.

Proposition 2 : *Soient G un groupe abélien fini et $g \in G$, $g \neq 1$. Il existe $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$.*
Démonstration : Cela résulte de la description de $\widehat{G}$ donnée dans la preuve précédente : en décomposant G en produit de groupes cycliques, nous sommes ramenés au cas trivial où G lui-même est cyclique[9].

Proposition 3 : *Soit G un groupe commutatif d'ordre fini n.*
1) Pour tout $g \in G$, $\frac{1}{n}\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g)$ vaut 1 si $g = 1$, 0 sinon.
2) Pour tout $\chi \in \widehat{G}$, $\frac{1}{n}\sum_{g\in G} \chi(g)$ vaut 1 si $\chi = \chi_0$, 0 sinon.
Démonstration : 1) Pour $g = 1$, le résultat découle de ce que $\widehat{G}$ est d'ordre n (par la proposition 1). Si $g \neq 1$, soit $\xi \in \widehat{G}$ tel que $\xi(g) \neq 1$ (proposition 2) :

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} (\chi\xi)(g) = \xi(g) \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g)$$

donc $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g) = 0$.
2) Le cas $\chi = \chi_0$ est trivial ; si $\chi \neq \chi_0$, soit $h \in G$ tel que $\chi(h) \neq 1$: $\sum_{g\in G} \chi(g) = \sum_{g\in G} \chi(hg) = \chi(h) \sum_{g\in G} \chi(g)$ donc $\sum_{g\in G} \chi(g) = 0$.[10]

[7] dans ce paragraphe les groupes seront notés multiplicativement et leur élément neutre 1.
[8] le cadre général de l'étude des caractères est celui des groupes abéliens localement compacts, qui englobe également la théorie de Fourier.
[9] on peut aussi utiliser l'injectivité du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
[10] l'analogie entre les deux parties de la proposition devient encore plus évidente grâce à un résultat de bidualité (qu'on déduit facilement de la proposition 2) : l'application $G \to \widehat{\widehat{G}}$, $g \longmapsto (\chi \longmapsto \chi(g))$ est un isomorphisme.

4.2.2 Caractères et fonctions L de Dirichlet

Soit $n > 1$ un entier. Etant donné un caractère χ du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit une application $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par $\phi(k) = \chi([k])$, où $[k]$ désigne la classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, si k et n sont premiers entre eux, 0 sinon. On note encore χ_0 l'application ainsi déduite du caractère unité. Nous désignerons par $C(n)$ l'ensemble de ces applications ϕ, appelées *caractères de Dirichlet modulo n*; ce sont des fonctions complètement multiplicatives.

Pour tout $\chi \in C(n)$, on note $L(\chi, .\,)$ et on appelle *fonction L de Dirichlet associée à χ* la série de Dirichlet associée :

$$L(\chi, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi(k) k^{-s} \quad ;$$

la série est absolument convergente pour $\Re s > 1$ (car $|\chi(k)| \leq 1$) ; la section 1.3 montre qu'on a alors[11]

$$L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \quad ; \tag{14}$$

en particulier $L(\chi, s) \neq 0$ (toujours pour $\Re s > 1$) ; et (d'après (5))

$$L(\chi_0, s) = \zeta(s) \prod_{p|n} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big). \tag{15}$$

Pour $\chi \in C(n)$, $\chi \neq \chi_0$, la proposition 3-2) entraîne, par n-périodicité de χ, que $\sum_{k=1}^{m} \chi(k)$ est borné en m, donc une sommation d'Abel (section 1, proposition 1) montre que la série $L(\chi, s)$ converge aussi pour $\Re s > 0$.

Proposition 4 : *Soit $\chi \in C(n)$, $\chi \neq \chi_0$. Alors $L(\chi, 1) \neq 0$*

Nous admettrons ce résultat classique, qui repose essentiellement sur le développement eulérien (14). Pour une démonstration, voir par exemple [3].

4.2.3 Nombres premiers en progression arithmétique

Proposition 5 : *Soient n,m des entiers premiers entre eux, avec $n > 1$. Pour $\Re s > 1$, on a :*

$$\sum_{k \geq 1\ ,\ k \equiv m \mod n} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = -\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi \in C(n)} \chi(m)^{-1} \frac{L'}{L}(\chi, s)\ . \tag{16}$$

Démonstration : Par dérivation logarithmique de (14) (légitime car le produit converge uniformément sur tout compact de $\{s \in \mathbb{C} | \Re s > 1\}$), il vient :

$$\begin{aligned} -\frac{L'}{L}(\chi, s) &= \sum_p \frac{\chi(p)\log(p)}{p^s - \chi(p)} = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p^k)\log(p)}{p^{ks}} \\ &= \sum_{r=p^k, k\geq 1} \frac{\chi(r)}{r^s} \log(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)\Lambda(k)}{k^s}. \end{aligned}$$

(ces calculs sont légitimes car la série double qui intervient est absolument convergente). Ainsi

$$-\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi \in C(n)} \chi(m)^{-1} \frac{L'}{L}(\chi, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi \in C(n)} \chi(m)^{-1}\chi(k)\ .$$

Pour conclure, il reste à remarquer que pour k premier à n

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi \in C(n)} \chi(m)^{-1}\chi(k) = \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi \in \widehat{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*}} \chi([k][m]^{-1})$$

(où $[t]$ désigne la classe de t dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) vaut 1 si $k \equiv m$ mod n et 0 sinon d'après la proposition 3 ; pour k non premier à n la somme est évidemment nulle, d'où le résultat.

[11] rappelons que l'indice p désigne toujours un nombre premier.

Nous pouvons désormais prouver un résultat qui implique le théorème de Dirichlet sur l'infinitude des nombres premiers dans une progression arithmétique non triviale (i.e. de la forme $\{k \in \mathbb{N} | k \equiv m \mod n\}$ avec m et n premiers entre eux).

Proposition 6 : *Soient n,m des entiers premiers entre eux, avec $n > 1$. On a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{k \leq x \ , \ k \equiv m \mod n} \frac{\Lambda(k)}{k} = \frac{1}{\varphi(n)}, \tag{17}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log(\log x)} \sum_{p \leq x, p \equiv m \mod n} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(n)}. \tag{18}$$

Démonstration : Il suffit de prouver (17), dont (18) se déduit aisément par sommation d'Abel (cf. section 1). Pour s *réel*, $s > 1$,

$$\sum_{k \geq 1 \ , \ k \equiv m \mod n} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = \frac{1}{\varphi(n)} \frac{1}{s-1} + B(s) \ , \tag{19}$$

où B est une fonction bornée au voisinage de 1. En effet, (15) et (16), joints à (7), montrent qu'il suffit de voir que pour $\chi \in C(n)$, $\chi \neq \chi_0$, $L(\chi, .)$ est bornée au voisinage de 1, ce qui résulte de ce que $L(\chi, .)$ est analytique sur $\{s \in \mathbb{C} | \Re s > 0\}$ (cf. sous-section 4.2.2) et de la proposition 4. (19), les relations $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = O(\log x)$ (cf. 1.2.4) et $0 \leq \Lambda(n) \leq \log n$ permettent d'appliquer le théorème de Hardy-Littlewood-Karamata qui donne la conclusion.

Conclusion

Nous avons vu que les méthodes taubériennes fondées sur le théorème de Wiener fournissent des réponses qualitatives efficaces à de nombreux problèmes arithmétiques de par leur grande généralité ; cependant celle-ci interdit d'espérer ainsi trouver des améliorations quantitatives (sur les termes d'erreur[12]) aussi bonnes que les techniques d'analyse complexe. Elles mettent également remarquablement en exergue le rôle crucial joué par la non-annulation de la fonction ζ ou des fonctions L sur certains domaines, qui suffit à elle seule à en déduire le théorème des nombres premiers ou le théorème de Dirichlet.

Références

[1] K. Chandrasekharan, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1968.

[2] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1980.

[3] W. Ellison et M. Mendès-France, *Les nombres premiers*, Hermann, 1975.

[4] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford University Press, 1949.

[5] A.E. Ingham, *The distribution of prime numbers*, Cambridge Mathematical Library, 1990.

[6] J-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, 1994.

[7] W. Rudin, *Analyse Fonctionnelle*, Ediscience international, 1995.

[8] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.

[9] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, deuxième édition, Cours spécialisé, no. 1, Société Mathématique de France (1995).

[10] N. Tosel, *Le critère de densité de Wiener*, Revue des Mathématiques de l'Enseignement Supérieur, novembre-décembre 1998.

[11] D.V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, 1946.

[12] pour des exemples de méthodes taubériennes (mais indépendantes du théorème de Wiener) aboutissant à une amélioration du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers, voir par exemple [9].