Correspondances de Langlands locales classique et p-adique

Gabriel Dospinescu, sous la direction de Pierre Colmez

11 octobre 2009

1 Introduction

On essaie dans ce court texte d'illustrer les principaux résultats de la théorie de Hodge p-adique, ainsi que leur interaction avec la théorie des (φ, Γ)-modules, aboutissant à une correspondance de Langlands locale p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ fonctorielle. On finit par énoncer un résultat de Colmez reliant cette correspondance à celle classique.

Je tiens à remercier chaleureusement Pierre Colmez pour toute la patience avec laquelle il a répondu à mes questions et pour m'avoir fait découvrir un monde avec plus d'anneaux qu'aucun autre et un domaine mathématique d'une richesse (et difficulté...) inouïe.

2 Crash course sur les nombres p-adiques

Pour beaucoup de questions arithmétiques, il est très utile de ramener l'étude à une situation "locale en p", où l'arithmétique est souvent plus simple. Réduire mod p n'est pas suffisant pour les questions fines : il faut vraiment faire des "développements de Taylor en p" et avoir un analogue de l'analyse classique "en p". Le bon cadre pour faire ceci est fourni par les nombres p-adiques : pour les obtenir, on complète $\mathbb{Q}$ pour la norme p-adique, définie par $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, où $v_p(x) = k$ si on peut écrire $x = p^k a/b$ avec a, b des entiers premiers à p. On obtient un corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques qui joue un rôle primordial dans la théorie des nombres moderne. Comme pour $\mathbb{Q}$, on essaie de comprendre l'arithmétique des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ et on peut faire ceci simultanement pour toutes les extensions si on arrive à comprendre $G_{\mathbb{Q}_p} = Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (c'est plus simple à dire qu'à faire...), le groupe des automorphismes de corps de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui fixent $\mathbb{Q}_p$. On a fixé une fois pour toutes une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et toutes les extensions algébriques de $\mathbb{Q}_p$ sont vues dans cette clôture.

Avant de passer aux choses passionnantes que sont les représentations l (et surtout p)-adiques, introduisons quelques sous-groupes importants de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On munira $G_{\mathbb{Q}_p}$ de sa topologie canonique (limite inverse des topologies discrètes sur les $Gal(K/\mathbb{Q}_p)$ suivant les extensions galoisiennes finies K de $\mathbb{Q}_p$), pour laquelle il est compact. On peut montrer que la valuation p-adique s'étend en une valuation v_p sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que $v_p(g(x)) = v_p(x)$ si $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ et $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$. Si L est une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ on définit $O_L = \{x \in L | v_p(x) \geq 0\}$ (anneau des entiers de L), $m_L = \{x \in L | v_p(x) > 0\}$, $k_L = O_L/m_L$ (corps résiduel de L). On vérifie que $k_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \overline{\mathbb{F}_p}$. Comme $G_{\mathbb{Q}_p}$ agit par des isométries sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, tout $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ induit donc un élément de $Gal(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$. En fait, on vérifie que ceci fournit une surjection et on appelle son noyau le groupe d'inertie, noté $I_{\mathbb{Q}_p}$. Ses éléments sont donc les $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ tels que $g(x) = x$ si $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$. On a une définition analogue pour toute extension finie de $\mathbb{Q}_p$. C'est la partie la plus délicaté à comprendre, car $Gal(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ est topologiquement engendré par $x \to x^p$. Enfin, on définit le groupe de Weil de $\mathbb{Q}_p$, $W_{\mathbb{Q}_p}$, formé des $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ pour lesquels il existe $n = \deg(g)$ tel que $g(x) = x^{1/p^n}$ pour $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$. Ce groupe $W_{\mathbb{Q}_p}$ a une topologie telle que $I_{\mathbb{Q}_p}$ est ouvert dans $W_{\mathbb{Q}_p}$ (si on munit $I_{\mathbb{Q}_p}$ de la topologie induite par $G_{\mathbb{Q}_p}$), qui n'est pas celle induite par $G_{\mathbb{Q}_p}$.

3 Monodromie l-adique et représentations de Weil-Deligne

On commence par le cas le plus "simple" des représentations l-adiques avec $l \neq p$. Ce sont des $\overline{\mathbb{Q}_l}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$(pour la topologie l-adique sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$). Qu'il en existe plein et la raison principale de les étudier, c'est un miracle de la cohomologie étale. Techniquement, le groupe de Weil $W_{\mathbb{Q}_p}$ joue le rôle important dans cette théorie. Le théorème suivant montre que pour extraire l'information de $I_{\mathbb{Q}_p}$, il faut étudier plus que les représentations l-adiques. Ce n'est pas un théorème difficile, mais hautement surprenant.

Théorème 3.0.1. *(de monodromie l-adique de Grothendieck) Toute représentation l-adique de $W_{\mathbb{Q}_p}$ ou de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est potentiellement semi-stable, ie il existe une extension finie de K de $\mathbb{Q}_p$ telle que I_K agit de manière unipotente.*

Quelques manipulations plus ou moins formelles (voir [BH00]) permettent alors d'associer à une représentation l-adique de $W_{\mathbb{Q}_p}$ une représentation de Weil-Deligne sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Puisqu'on va changer le corps des coefficients, glorifions la définition :

Définition 3.0.1. Soit L un corps de caractéristique 0. Une L-représentation de Weil-Deligne de $W_{\mathbb{Q}_p}$ est la donnée d'un L-espace vectoriel de dimension finie V, d'une représentation de $W_{\mathbb{Q}_p}$ sur V à noyau ouvert dans $W_{\mathbb{Q}_p}$ et d'un $N \in End_L(V)$ nilpotent tel que $\rho(g)N\rho(g)^{-1} = p^{-\deg(g)}N$ pour tout $g \in W_{\mathbb{Q}_p}$.

Voici le miracles de la correspondance de Langlands locale classique (pour laquelle une excellente référence est [BH00]) : partant de notre représentation l-adique de $W_{\mathbb{Q}_p}$ on pourra lui associer une représentation complexe de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, sans perdre d'information sur la représentation ! En plus, on connaît assez bien (mais c'est loin d'être une trivialité) ces représentations complexes de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Le passage de l-adique aux complexes passe par une conséquence un peu formelle du théorème de monodromie l-adique (on devrait mettre "classes d'isomorphismes des" avant "représentations" dans l'énoncé, mais ceci serait lourd).

Théorème 3.0.2. *Il existe une bijection canonique entre les représentations l-adiques de $W_{\mathbb{Q}_p}$ et les représentations de Weil-Deligne sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$, induisant une équivalence entre les représentations l-adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et les représentations de Weil-Deligne pour lesquelles les valeurs propres d'un Frobenius géométrique (ie g tel que $\deg(g) = 1$) sont des unités de $\mathbb{Z}_l$.*

Avant d'énoncer la correspondance de Langlands classique pour GL_2 il nous faut encore du vocabulaire. On ne donne qu'un énoncé très vague, car on ne veut pas entrer dans les détails techniques concernant les fonctions L et les facteurs epsilon associés à une représentation l-adique : le théorème est beaucoup plus précis, voir [BH00]. Une représentation de Weil-Deligne (ρ, V, N) est dite F-semisimple si (ρ, V) est semisimple (ie somme directe de représentations irréductibles).

Définition 3.0.2. Une représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un corps L de caractéristique 0 est la donnée d'un L-espace vectoriel V (presque toujours de dimension infinie !) avec une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Elle est dite lisse si V est l'union des espaces des invariants V^K sous les sous-groupes ouverts compacts K de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et admissible si de plus les V^K sont de dimension finie.

Théorème 3.0.3. *(Lacquet-Langlands, Kutzko, Vigneras) Il existe une bijection naturelle entre les représentations de Weil-Deligne de $W_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$, de dimension 2 et F-semisimples et les représentations irréductibles, lisses, admissibles de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$.*

Un point crucial est que ce théorème reste vrai pour $l = p$. En effet, il n'y a plus que la topologie discrète sur les espaces des coefficients, donc la théorie est algébrique de chaque côté du théorème : en choisissant des isomorphismes entre $\overline{\mathbb{Q}_l}$ (ou $\overline{\mathbb{Q}_p}$) et $\mathbb{C}$, on obtient le même énoncé où on regarde des représentations de Weil-Deligne de $W_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{C}$ et des représentations de $Gl_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{C}$. C'est d'ailleurs l'origine des conjectures de Langlands, qui visent à étendre grâce à un gigantesque programme les résultats de la théorie du corps de classes (qui décrit essentiellement les représentations de $W_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 1) en dimension plus grande et pour tous les groupes réductifs.

Conclusion : à une représentation l-adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$ on peut associer une représentation irréductible lisse admissible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{C}$. Si de plus un Frobenius agit de manière semisimple (on conjecture-et on est loin d'avoir démontré-que c'est le cas pour les représentations venant de la géométrie), on ne perd pas d'information.

4 Représentations p-adiques : un monde d'anneaux

La théorie des représentations p-adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ (ie espaces vectoriels de dimension finie sur des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, munis d'une action continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$ pour la topologie p-adique) est infiniment plus compliquée que l'analogue l-adique : l'analogue évident du théorème de Grothendieck est totalement faux et l'image de $I_{\mathbb{Q}_p}$ peut être énorme. Ceci fait qu'il existe une foule de représentations p-adiques, dont la classification semble hors de propos. L'idée magique de Fontaine est d'isoler dans ce monde barbare les représentations "venant de la géométrie",ie de la cohomologie étale des schémas, en construisant d'énormes anneaux de périodes $B \in \{B_{dR}, B_{cris}, B_{st}\}$ (pour les constructions très compliquées et purement artisanales voir [Fon82], [Fon941], [Col083]) munis de plein de structures (Frobenius, filtrations, opérateurs de monodromie, action de $G_{\mathbb{Q}_p}$) et en étudiant les représentations B–admissibles, ie celles telles que $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est isomorphe à $B^{\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)}$. Par exemple, B_{dR} doit être vu (et ça l'est grâce aux théorèmes de Faltings, Tsuji, etc ; voir plus bas) comme la plus petite $\mathbb{Q}_p$-algèbre contenant les périodes des schémas propres lisses sur $\mathbb{Q}_p$, B_{cris} a des propriétés analogues (correspondant au cas de bonne réduction, respectivement de réduction semi-stable). Les catégories des représentations ainsi obtenues, appelées représentations de de Rham, cristallines, semi-stables sont stables par sous-quotients, produit tensoriel ou dualité et on a des foncteurs tout aussi compatibles $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ vers des catégories d'algèbre (semi-) linéaire très concrètes. Par construction, cristalline implique semi-stable, qui implique de de Rham et toutes ces inclusions sont strictes (mais voir la partie suivante pour un miracle !).

Décrivons les objets semi-linéaires dans le cas semi-stable (on en aura besoin dans la suite) : l'anneau B_{st} vient muni d'un opérateur Frobenius φ, d'une filtration, d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ commutant à celle de φ et d'un opérateur de monodromie N tel que $N \circ \varphi = p\varphi \circ N$. Ainsi, $D_{st}(V) = (B_{st} \otimes V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est aussi muni de ces structures. En parcourant les représentations semi-stables à coefficients dans L (extension finie de $\mathbb{Q}_p$), on obtient ainsi une famille de L-espaces vectoriels muni de ces structures. On n'obtient pas tous ces espaces, mais seulement ceux qui sont admissibles (une notion un peu technique motivée par un fameux théorème de Mazur-Ogus en cohomologie cristalline, voir [Fon942]) et par un théorème très délicat dû à Colmez et Fontaine [CF00] on a vraiment une équivalence entre les représentations semi-stables et ces modules admissibles. L'avantage est que, comme dans le cas l-adique, on peut étudier les représentations semi-stables en étudiant ces modules, ce qui est techniquement très utile car ces modules sont souvent très simples à manipuler ou à construire. Mais il est très délicat d'extraire l'information arithmétique de ces modules !

Donnons maintenant quelques exemples de représentations p-adiques. La plus simple (à part celle triviale), mais dont l'étude de la cohomologie d'Iwasawa est d'une richesse incroyable est la représentation $\mathbb{Q}_p(1)$. C'est la limite inverse des $\mu_{p^n}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, un $\mathbb{Q}_p$ espace vectoriel de dimension 1 ayant une base e telle que $g(e) = \chi(g)e$ (où $\chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_p{}^*$ est le caractère cyclotomique p-adique, défini par $g(\zeta) = \zeta^{\chi(g)}$ pour tout $\zeta \in \cup_{n\geq 1}\mu_{p^n}(\overline{\mathbb{Q}_p})$). C'est l'exemple le plus simple de représentation cristalline. De manière très générale, si X est un $\mathbb{Q}_p$-schéma propre lisse, ses groupes de cohomologie étale $H^i_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ sont une source inépuisable de représentations p-adiques. Un des résultats les plus profonds de la théorie des représentations p-adiques, dû à un nombre impressionnant de mathématiciens (Faltings, Fontaine-Messing, Hyodo-Kato, Tsuji, voir [Ts99] pour une véritable montagne de mathématiques) fut de montrer que ces représentations sont de de Rham, voire cristallines dans le cas de bonne réduction et d'en calculer le D_{dR}.

Il faut bien noter que ces représentations venant de la géométrie ne forment qu'une petite partie (mais certainement la plus intéressante) de la classe des représentations p-adiques. Donnons un exemple troublant de représentation p-adique : en utilisant la théorie du corps de classes local on peut montrer qu'il existe une représentation p-adique V qui vit dans une suite exacte non scindée $0 \to \mathbb{Q}_p \to V \to \mathbb{Q}_p(1) \to 0$ (le lecteur érudit aura noté que l'extension est dans le sens opposé à celle de la représentation associée à une courbe de Tate). Des théorèmes profonds de Tate [Ta66] montrent que si on étend les scalaires à $\mathbb{C}_p$ (complété pour v_p de $\overline{\mathbb{Q}_p}$), cette suite se scinde (on dit que V est de Hodge-Tate). C'est par contre très difficile de montrer qu'aucun tel V n'est de de Rham : la façon la plus simple (!) est d'utiliser l'exponentielle de Bloch-Kato et la loi de réciprocité explicite de Kato, qui sont tout sauf des trivialités. La morale est que $\mathbb{C}_p$ (qui fut utilisé dans les travaux de Tate culminant en une décomposition de Hodge du module de Tate d'une variété abélienne [Ta66]) n'est pas un anneau assez fin pour trier les représentations p-adiques. Une autre raison, encore plus profonde, est fournie par un théorème très difficile dû à Sen, confirmant une conjecture de Serre : si on essaie d'étudier les représentations $\mathbb{C}_p$-admissibles, on n'obtient que celles potentiellement non ramifiées ! Voir [Ber02] pour un lien magique entre ce théorème et la théorie des équations différentielles p-adiques.

5 Monodromie p-adique et recette de Fontaine

On peut maintenant énoncer l'analogue p-adique du théorème de monodromie l-adique de Grothendieck. C'est un des plus beaux (et difficiles) résultats de la théorie, montrant bien (s'il le fallait encore !) que les constructions de Fontaine sont vraiment la clé de la théorie des représentations p-adiques. Voir [Ber02] pour la preuve, ainsi que l'excellent [Col03] ; une autre preuve se trouve dans [Col083].

Théorème 5.0.4. *(Berger) Toute représentation de de Rham de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est potentiellement semi-stable, ie il existe $K/\mathbb{Q}_p$ finie telle que sa restriction à G_K soit semi-stable.*

La démonstration initiale (on en dipose maintenant d'au moins trois, toutes très difficiles) est un véritable tour de force et utilise intensivement la théorie des (φ, Γ)-modules (dont on parlera dans la suite) pour attacher à une représentation une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius et déduire le théorème d'un profond résultat d'André, Christol-Mebhout, Kedlaya concernant ces équations.

En utilisant ce théorème, voici une recette due à Fontaine, qui associe à une représentation (ρ, V) de de Rham une représentation de Weil-Deligne sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (et donc sur $\mathbb{C}$ après choix d'un isomorphisme entre ces deux corps). Supposons que V est définie sur L (fini sur $\mathbb{Q}_p$) et posons

$$D_{pst}(V) = \bigcup_{[K:\mathbb{Q}_p]<\infty} (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K},$$

qui par construction est un $\mathbb{Q}_p^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-module ($\mathbb{Q}_p^{nr}$ s'obtient à partir de $\mathbb{Q}_p$ en rajoutant les racines de l'unité d'ordre premier à p ; on a $I_{\mathbb{Q}_p} = Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{nr})$). On montre facilement en utilisant le théorème de Berger qu'il est libre de rang $d = \dim_L(V)$. Via les structures supplementaires dont B_{st} est muni, $D_{pst}(V)$ est muni d'actions semi-linéaires de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et φ (la semi-linéarité est par rapport au Frobenius sur $\mathbb{Q}_p^{nr}$) et d'un opérateur nilpotent N, l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ commutant à celles de φ, N. On linéarise les actions en définissant une action de $W_{\mathbb{Q}_p}$ par $w.x = \varphi^{\deg(w)}(w(x))$ si $w \in W_{\mathbb{Q}_p}$ (dans le terme de droite, $w(x)$ est l'action de w sur x en considérant $w \in G_{\mathbb{Q}_p}$). Enfin, on étend les scalaires (et toutes ces actions par linéarité) à $\overline{\mathbb{Q}_p}$ en posant

$$WD(D_{pst}(V)) = D_{pst}(V) \otimes_{\mathbb{Q}_p^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L} \overline{\mathbb{Q}_p}.$$

(l'application $\mathbb{Q}_p^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ étant induite par la multiplication). A partir de cette représentation de Weil-Deligne (ou plutôt de sa semi-simplifiée), la machine de Langlands classique nous fournit une représentation irréductible lisse admissible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, notée $\sigma(V)$ dans ce texte.

Problème : en passant à $\sigma(V)$, on a perdu l'information contenue dans la filtration de $D_{pst}(V)$ et $\sigma(V)$ ne détermine pas V à isomorphisme près, sauf s'il n'existe qu'une seule filtration admissible sur $D_{dR}(V)$ (ce qui-en dimension 2-arrive exactement quand V est irréductible, potentiellement cristalline et quand $WD(D_{pst}(V))$ est abélienne). C'est ce problème et des considérations globales concernant les représentions automorphes qui ont amenés Christophe Breuil à chercher une "correspondance de Langlands locale p-adique" $V \to B(V)$ entre (certaines) représentations p-adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et (certaines) représentations de $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ sur (certains) des espaces de Banach p-adiques et qui soit réversible. Ceci est à l'origine d'une série impressionnante et passionante de travaux de Berger, Breuil, Colmez, Emerton, ayant pour but une construction pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ (le cas général est pour l'instant hors de portée). Le but de ce qui suit est de donner les (très) grandes lignes du véritable tour de force qui est la construction de cette correspondance par Colmez via les (φ, Γ)-modules.

6 C'est quoi un (φ, Γ)-module ?

La théorie de Hodge p-adique se prête bien à l'étude des représentations p-adiques "venant de la géométrie", mais il existe un moyen beaucoup plus flexible d'étudier toutes les représentations p-adiques, même sur des $\mathbb{Z}_p$ modules ! C'est la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine (voir [Fon90]). Les travaux de Kisin [Ki] et Colmez [Col081] montrent pleinement la puissance de cette théorie, qui permet d'étudier les déformations des représentations p-adiques ou les familles p-adiques des représentations.

Les (φ, Γ)-modules associés aux représentations p-adiques sont des modules de type fini sur certains anneaux un peu compliqués, munis d'un opérateur φ et d'une action du groupe $\Gamma = Gal(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p{}^*$ (via le caractère cyclotomique χ), commutant à φ, les actions de φ, Γ étant continues. Construisons le plus "simple" : soit comme d'habitude L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et notons

$$O_{\mathscr{E},L} = \{f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n | a_n \in O_L, \lim_{n \to -\infty} a_n = 0\}.$$

C'est un anneau de valuation complet pour la valuation de Gauss $v(f) = \min_n v_p(a_n)$, de corps résiduel $k_{\mathscr{E}_L} = k_L((T))$ et de corps de fractions $\mathscr{E}_L = O_{\mathscr{E},L}[1/p]$. On munit $O_{\mathscr{E},L}$ de la topologie faible dont une base de voisinages de 0 est formée par les $\pi_L^n O_{\mathscr{E},L} + T^k O_L[[T]]$ et on définit des actions continues commutant entre elles $\varphi(f(T)) = f((1+T)^p - 1), \sigma_a(f(T)) = f((1+T)^a - 1)$ si $\chi(\sigma_a) = a$. Avant d'aller plus loin, il convient d'avoir une définition précise des objets mis en jeux :

Définition 6.0.3. Un (φ, Γ)-module sur $O_{\mathscr{E},L}$ (ou $\mathscr{E}_L$) est un $O_{\mathscr{E},L}$ (ou $\mathscr{E}_L$)-module de type fini D muni d'actions continues de φ, Γ, commutant entre elles et semi-linéaires (par rapport aux actions sur $O_{\mathscr{E},L}$ ou $\mathscr{E}_L$). D est dit étale sur $O_{\mathscr{E},L}$ si $\varphi(D)$ engendre D comme $O_{\mathscr{E},L}$-module. D est dit étale sur $\mathscr{E}_L$ s'il admet un $O_{\mathscr{E},L}$-réseau stable par (φ, Γ) et qui est étale sur $O_{\mathscr{E},L}$.

Et voici le miracle (inspiré par des travaux de Katz) :

Théorème 6.0.5. *(Fontaine) Il existe des foncteurs exacts $V \to D(V)$ et $D \to V(D)$ induisant des équivalences de catégories entre la catégorie des O_L-représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ (ie O_L modules de type fini munis d'une action continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$, O_L-linéaire) et celle des (φ, Γ)-modules étales sur $O_{\mathscr{E},L}$.*

Non seulement ces foncteurs existent, mais ils ont des expressions explicites et satisfont plein de compatibilités qui sont cruciales quand on les manipule. Ils sont du type $V \to D(V) = (A \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{H_{\mathbb{Q}_p}}$, où A est un anneau franchement compliqué et $H_{\mathbb{Q}_p} = Ker(\chi) = Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$. Les (φ, Γ)-modules sont des objets bien plus tangibles que $G_{\mathbb{Q}_p}$, mais sont loin d'être une trivialité : l'anneau $O_{\mathscr{E},L}$ n'est pas très amical et en plus il est très délicat de calculer explicitement le (φ, Γ)-module attaché à une représentation (c'est une spécificité des foncteurs de Fontaine : faciles à définir, très délicats à calculer). Mais pour l'instant ils sont de loin les outils les plus puissants pour étudier les représentations p-adiques. Notons aussi que le théorème de Fontaine induit une équivalence entre les L-représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et les (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{E}_L$: si V est une L-représentation, on prend M un O_L-réseau stable (ça existe toujours grâce à la compacité de $G_{\mathbb{Q}_p}$) et on pose $D(V) = \mathscr{E}_L \otimes_{O_{\mathscr{E},L}} D(M)$ (qui ne dépend pas du choix de M). Cependant, il faut souligner qu'on préfère toujours travailler avec des (φ, Γ)-modules sur $O_{\mathscr{E},L}$ pour pouvoir réduire mod p, étudier les déformations, les variations en famille, etc.

Un premier test montrant que l'équivalence de Fontaine permet en pratique d'extraire l'information d'une représentation à partir de son (φ, Γ)-module est le calcul de la cohomologie galoisienne d'une représentation V en fonction de $D(V)$. Le résultat crucial est dû à Herr [Her94] et lui a permis de (re-)démontrer via la théorie des (φ, Γ)-modules des résultats hautement nontriviaux de Tate sur la cohomologie galoisienne de $G_{\mathbb{Q}_p}$. L'idée essentielle de la preuve est un relèvement en caractéristique 0 de la suite d'Artin-Schreier et les théorèmes de comparaison sous-jacents à l'énoncé complet du théorème de Fontaine.

Théorème 6.0.6. *(Herr) Soit V une représentation p-adique, D le (φ, Γ)-module associé, γ un générateur topologique de Γ. Alors les groupes de cohomologie galoisienne (continue) $H^p(G_K, V)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes de cohomologie du complexe $0 \to D \to D \oplus D \to D \to 0$, où les applications sont $x \to ((\varphi - 1)x, (\gamma - 1)x)$ et $(x, y) \to (\gamma - 1)x - (\varphi - 1)y$.*

Il se trouve que tout (φ, Γ)-module étale D sur $O_{\mathscr{E},L}$ (ou $\mathscr{E}_L$) est canoniquement muni d'un opérateur $\psi : D \to D$ O_L (ou L)-linéaire et tel que $\psi(\varphi(x)) = x$ pour tout x. Ici le fait d'être étale est crucial pour montrer que tout $x \in D$ s'écrit uniquement $x = \varphi(x_0) + (1 + T)\varphi(x_1) + ... + (1 + T)^{p-1}\varphi(x_{p-1})$ avec $x_i \in D$. On définit alors $\psi(x) = x_0$. Cet opérateur joue un rôle primordial dans toute question fine concernant les (φ, Γ)-modules. Il avait déjà joué un rôle très important dans les travaux de Coleman et Coates-Wiles en théorie d'Iwasawa et on verra une vaste généralisation due à Fontaine dans quelques instants. Avant, mentionnons un résultat technique délicat où on utilise vraiment pour la première fois l'action de Γ sur un (φ, Γ)-module, et qui est la clé pour comprendre la structure de $D^{\psi=0}$ ou $D^{\psi=1}$ en tant que modules sur l'algèbre d'Iwasawa $O_L[[T]]$.

Théorème 6.0.7. *(Herr, Cherbonnier-Colmez) Si γ est un élément d'ordre infini de Γ, $1 - \gamma$ est inversible, d'inverse continu sur $D^{\psi=0}$.*

A partir de ceci il est immédiat de montrer que si on définit un complexe $0 \to D \to D \oplus D \to D \to 0$ de la même manière qu'avant (remplacer φ par ψ), les 2 complexes obtenus sont quasi-isomorphes. On obtient donc que la cohomologie de V peut se calculer à partir de ce deuxième complexe, ce qui est techniquement très utile. En effet, combiné avec quelques propriétés bien techniques de l'opérateur ψ, ceci est la clé du beau (et difficile !) théorème suivant, qui montre qu'on peut étudier la théorie d'Iwasawa de V directement à partir de son (φ, Γ)-module D. Rappelons que si V est une représentation p-adique et si T est un réseau de V stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$, on définit la cohomologie d'Iwasawa de V par $H^n_{Iw}(G_{\mathbb{Q}_p}, V) = H^n_{Iw}(G_{\mathbb{Q}_p}, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, où $H^n(G_{\mathbb{Q}_p}, T)$ est la limite inverse des $H^n(G_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^k})}, T)$ pour les applications de corestriction.

Théorème 6.0.8. *(Fontaine) Pour toute représentation p-adique V de $G_{\mathbb{Q}_p}$ on a un isomorphisme canonique de modules sur l'algèbre d'Iwasawa $H^1_{Iw}(G_{\mathbb{Q}_p}, V) = D(V)^{\psi=1}$.*

Même pour $V = \mathbb{Q}_p(1)$ ce résultat est hautement nontrivial : il s'agit de la théorie de Coleman (qui a d'ailleurs inspiré l'introduction de l'opérateur ψ sur les (φ, Γ)-modules) permettant de retrouver la fonction zêta p-adique de Kubota-Leopold à partir d'une suite compatible d'unités cyclotomiques. En général, le résultat doit être vu comme une machine à fabriquer des fonctions L p-adiques à partir de systèmes locaux compatibles (ie des éléments de $H^1_{Iw}(G_{\mathbb{Q}_p}, V)$) . Pour des magnifiques résultats dus à Kato (voir le "petit article" [Ka04]), qui construit de telles familles compatibles, on ne peut que conseiller au lecteur [Col02] : il ne pourra que rester perplexe !

7 De $D(V)$ à $D_{cris}(V)$ et retour : ou comment retrouver la théorie de Hodge p-adique

Une question très délicate qui a fait couler beaucoup d'encre est la suivante : supposons que V est une représentation de de Rham (ou cristalline ou...). Peut-on lire sur le (φ, Γ)-module $D = D(V)$ les invariants $D_{dR}(V)$ (ou $D_{cris}(V)$ ou...) ? Peut-on faire aussi l'inverse ? Ce sont des questions très difficiles, car si on regarde (**vraiment**) comment les foncteurs D_{dR} et D sont construits, on s'apperçoit qu'il n'ont rien en commun à priori ! Ceci ouvre un chapitre très technique de la théorie, mais qui a fait des (φ, Γ)-modules les objets les plus utiles pour l'étude des représentations p-adiques.

Le pont entre la théorie des (φ, Γ)-modules et la théorie de Hodge p-adique est fait par les anneaux surconvergents : soit ${\mathscr{E}_L}^\dagger$ l'anneau des séries de Laurent $f(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathscr{E}_L$ qui convergent sur une couronne $0 < v_p(T) \leq r$ pour un $r > 0$ (dépéndant de f). Le théorème de surconvergence suivant est sans doute un des plus importants (et techniques !) de la théorie des représentations p-adiques :

Théorème 7.0.9. *(Cherbonnier-Colmez) Tout (φ, Γ)-module étale D sur $\mathscr{E}_L$ admet une descente fonctorielle à ${\mathscr{E}_L}^\dagger$. Plus précisément, il existe un anneau $B^\dagger$ tel que si l'on pose $D^\dagger = (B^\dagger \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(D))^{H_K}$, on ait $D = \mathscr{E}_L \otimes_{{\mathscr{E}_L}^\dagger} D^\dagger$.*

On n'a pas vraiment besoin d'introduire $B^\dagger$ pour définir $D^\dagger$: c'est le plus grand sous-${\mathscr{E}_L}^\dagger$-module de D, libre de type fini et stable par φ, Γ. Mais dans les démonstrations il est crucial non seulement de savoir que $B^\dagger$ existe, mais aussi toute une foule d'informations techniques le concernant. La démonstration du théorème est très difficile et on ne dira rien ici, mais le résultat est absolument fondamental, car il permet de faire le lien entre (φ, Γ)-modules, la théorie des équations différentielles p-adiques et la théorie de Hodge p-adique.

Par le théorème, D est engendré par des éléments de ${\mathscr{E}_L}^\dagger$, qui sont donc des fonctions analytiques à coefficients bornés sur des couronnes du type $0 < v_p(T) \leq r$ avec $r < 1$. Une étape cruciale dans le dévéloppement de la théorie fut l'introduction de l'anneau de Robba $\mathscr{R}_L$: ses éléments sont les séries de Laurent convergentes sur une couronne $0 < v_p(T) \leq r$ (r dépéndant de la série), à coefficients pas forcement bornés. Avec de très bonnes propriétés algébriques et topologiques qui permettent d'avoir une bonne théorie des modules de type fini sur $\mathscr{R}_L$, cet anneau est l'objet central de la théorie des équations différentielles p-adiques. Grâce au théorème de surconvergence, à un (φ, Γ)-module D sur $\mathscr{E}_L$ on peut associer fonctoriellement un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}_L$ (les anneaux ${\mathscr{E}_L}^\dagger, \mathscr{R}_L$ ont des actions continues de φ, Γ définies comme pour $\mathscr{E}_L$) $D^\dagger_{rig} = \mathscr{R}_L \otimes_{{\mathscr{E}_L}^\dagger} D^\dagger$. C'est l'objet fondamental de la théorie de Berger, permettant de faire le lien entre la théorie de Hodge p-adique et les (φ, Γ)-modules. De manière très suprenante, une très difficile étude des (φ, Γ)-modules sur l'anneau $\mathscr{R}_L$ a permis à Kedlaya (voir [Ke04], [Ke08]) de montrer qu'on ne perd pas d'information en tensorisant par $\mathscr{R}_L$: cependant, ce n'est pas du tout évident de retrouver $D^\dagger$ à partir de $D^\dagger_{rig}$. Kedlaya donne une recette basée sur son très délicat "slope filtrations theorem". Berger avait aussi montré dans sa thèse qu'on récupère V à partir de $D^\dagger_{rig}$ par une recette bien compliquée (mais utile dans la prattique, en fait).

Théorème 7.0.10. *(Berger)*

1) Pour toute représentation p-adique V de $G_{\mathbb{Q}_p}$ on a

$$D_{cris}(V) = (D^\dagger_{rig}(V)[1/t])^\Gamma = (\mathscr{R}_L[1/t] \otimes_{{\mathscr{E}_L}^\dagger} D^\dagger)^\Gamma.$$

2) Si V est cristalline on a un isomorphisme de comparaison

$$D^\dagger(V) \otimes_{\mathscr{E}_L^\dagger} \mathscr{R}_L[1/t] = D_{cris}(V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathscr{R}_L[1/t].$$

La démonstration de ce théorème est très acrobatique : Berger construit un gigantèsque anneau $\widetilde{B}^\dagger_{rig}$ contenant $B^\dagger$ et B_{cris} et plonge tous les objets dans $\widetilde{B}^\dagger_{rig} \otimes V$ pour pouvoir les comparer (à priori $D^\dagger(V)$ et D_{cris} n'ont rien en commun !). Il faut ensuite étudier cet anneau (ce n'est pas une mince affaire !) et appliquer une axiomatisation de la méthode de Sen, due à Colmez (voir [BC08]), qui malheureusement est hautement technique et dont on ne dira pas plus. Mentionnons que la preuve du théorème de surconvergence suit exactement le même chemin et que le théorème de Berger admet une version "semi-stable", où l'anneau des périodes $\mathscr{R}_L[1/t]$ est remplacé par $\mathscr{R}_L[1/t, \log(T)]$. Pour ce qui est des représentations de de Rham, la situation est beaucoup plus subtile et on ne dira rien ici. C'est vraiment l'endroit où les équations différentielles p-adiques entrent en jeu, mais on aurait besoin d'introduire encore pas mal d'objets pour expliquer de quoi il s'agit.

Pour les calculs concrèts utilisés dans la correspondance de Langlands locale p-adique, il est très important de faire l'inverse : partant d'un module (filtré, avec Frobenius, admissible...) censé être le D_{cris} d'une représentation, comment calculer $D^{\dagger}, D^{\dagger}_{rig}$? C'est une question particulièrement subtile, dont voici la réponse :

Théorème 7.0.11. *(Berger) Soit V une représentation semi-stable de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et $x \in \mathscr{R}_L[1/t, \log(T)] \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{st}(V)$. Alors x est dans $D^{\dagger}_{rig}(V)$ si et seulement si $N(x) = 0$ et $\varphi^{-n}(x) \in Fil^0(F_n((t)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{dR}(V))$ pour n assez grand.*

Il existe une recette presque idéntique pour l'appartenance à $D^{\dagger}$ (mais on a besoin de la notion d'odre des éléments de $\mathscr{R}_L[1/t, \log(T)]$, voir [Be08]). Même s'il a l'air très technique, ce théorème est très utile dans la vie de tous les jours. On renvoie à [Col071], [BB08], [Col072] pour des calculs explicites, qui ont joué un rôle clé dans le développement de la correspondance de Langlands locale p-adique.

8 Construction de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

8.1 Ce qu'on cherche

Le but de cette partie est de donner quelques définitions nécessaires à la compréhension de certains des théorèmes à venir et de formuler le but de la correspondance de Langlands p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. De manière vague, on cherche une correspondance entre (certaines) représentations continues de $W_{\mathbb{Q}_p}$ sur des L-espaces vectoriels de dimension d (L étant une extension finie, mais grande, de $\mathbb{Q}_p$) et (certaines) représentations continues de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ sur certains espaces de Banach p-adiques. Glorifions encore quelques définitions :

Définition 8.1.1. 1) Un L-espace de Banach (L extension finie de $\mathbb{Q}_p$) est un L-espace vectoriel normé complet(on demande que $||x + y|| \leq \max(||x||, ||y||)$ et $||lv|| = |l|_p \cdot ||v||$).

2) Une L-représentation de Banach d'un groupe topologique G est la donnée d'une action continue de G sur un L-espace de Banach B. Elle est dite unitaire s'il existe une norme donnant la topologie de B telle que la boule unité O_B de B soit stable par G. Enfin, elle est dite unitaire admissible si elle est unitaire et $O_B/\pi_L O_B$ est une représentation lisse admissible de G sur k_L (π_L étant un générateur de m_L).

Voici maintenant ce qu'on cherche pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$: on veut une recette qui à une L-représentation de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ associe une L-représentation admissible unitaire $\Pi(V)$ de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ de façon à ce que V_1 soit isomorphe à V_2 si et seulement si $\Pi(V_1)$ et $\Pi(V_2)$ sont isomorphes. On demande aussi que certaines compatibilités soient satisfaites : compatibilités avec le changement du corps des coéfficients, avec la torsion par des caractères, on veut que le caractère central de $\Pi(V)$ soit lié à $det(V)$... Ensuite on peut considérer des compatibilités avec la réduction mod p, etc...

L'idée de Breuil est de construire $\Pi(V)$ pour V de de Rham en complétant la représentation localement algébrique $\sigma(V) \otimes (Sym^{h_2-h_1-1}(L^2) \otimes (det)^{h_1})$ (rappelons que $\sigma(V)$ est obtenue par la correspondance classique appliquée à la recette de Fontaine, c'est donc une représentation lisse admissible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$; h_1, h_2 sont les poids de Hodge-Tate de V, c'est-à-dire les opposés des sauts de la filtration sur $D_{pst}(V)$) pour une norme $GL_2(\mathbb{Q}_p)$-invariante, qui malheureusement est très difficile à trouver (ou à montrer qu'elle existe). On devrait récupérer la représentation localement algébrique (et donc les poids de Hodge-Tate de V, ainsi que son D_{pst} en prenant les vecteurs localement algébriques de $\Pi(V)$ (un vecteur $v \in \Pi(V)$ est dit localement algébrique s'il existe un sous-groupe ouvert compact K de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que $l[K].v$ soit de dimension finie sur L et aussi la restriction d'une représentation algébrique de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$; un représentation algébrique est une somme directe de représentations du type $Sym^a(L^2) \otimes (det)^b$).

8.2 Des foncteurs musicaux $D^\sharp, D^\natural$

Une propriété cruciale de l'opérateur ψ est qu'il a tendance à diminuer les dénominateurs en T et donc d'améliorer la convergence des séries (alors que φ fait tout à fait le contraire !). Ceci est un peu vague, mais voici comment on peut formaliser l'idée :

Définition 8.2.1. Un treillis d'un (φ, Γ)-module D sur $O_{\mathscr{E},L}$ est un sous-$O_L[[T]]$-module compact dont l'image dans $D/\pi_L D$ est un réseau de ce $k_L((T))$-espace vectoriel. Si D est étale sur $\mathscr{E}_L$, un treillis de D sera un treillis d'un $O_{\mathscr{E},L}$-réseau φ, Γ-stable de D.

Si D est tué par π_L (un générateur de l'idéal maximal de O_L), un treillis est vraiment un réseau dans le $k_L((T))$-vectoriel D. Le délicat résultat suivant montre une très forte rigidité au niveau des treillis de D stables par ψ (il n'est pas du tout évident qu'il en existe !). Il permet de construire des foncteurs $D^\natural, D^\sharp$ jouant un rôle clé dans la correspondance de Langlands locale p-adique.

Théorème 8.2.1. *(Herr-Colmez) Soit D un (φ, Γ)-module étale. L'ensemble des treillis M tels que $\psi(M) = M$ a un plus grand élément $D^\sharp$ et un plus pétit élément $D^\natural$ et on a $TD^\sharp \subset D^\natural \subset D^\sharp$.*

Par exemple si $D = O_{\mathscr{E},L}$ on a $D^\sharp = \frac{1}{T} O_L[[T]]$ et $D^\natural = O_L[[T]]$. En général il est bien délicat de les calculer. Il n'est pas évident sur la définition, mais ces constructions sont fonctorielles en D et respectent les injections et les surjections (mais ne sont pas des foncteurs exacts). La propriété la plus importante de $D^\sharp$ est le fait que (si D est de torsion) pour tout $x \in D$ on a $\psi^n(x) \in D^\sharp$ pour tout n assez grand. Ceci est crucial pour contrôler la taille des dénominateurs des séries qu'on manipule !

8.3 Construction des représentations du mirabolique

En essayant de démontrer par la théorie des (φ, Γ)-modules certains résultats de Breuil, Colmez a trouvé une manière très naturelle d'associer à une représentation p-adique un Banach unitaire muni d'une action du groupe mirabolique $P = \begin{pmatrix} {\mathbb{Q}_p}^* & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est très convenable de travailler avec des (φ, Γ)-modules, car on obtient déjà une action d'une bonne partie du mirabolique $P^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p - \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en posant $\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = (1+T)^b \varphi^k(\sigma_a(x))$ si $a \in {\mathbb{Z}_p}^*, b \in \mathbb{Z}_p, k \geq 0$. Il s'agit d'éténdre ceci en une action du mirabolique, et ceci peut se faire de manière unique, mais pas sur D. Le bon espace à considèrer est

$$(D \boxtimes \mathbb{Q}_p)_b = \{(x_n)_{n\geq 0} | x_n \in D, \psi(x_{n+1}) = x_n, \forall n \text{ et} (x_n)_n \text{bornée}\}.$$

Ceci est muni de la topologie induite par la topologie produit sur $D^{\mathbb{N}}$. Soit enfin $B(D)$ le dual continu de $(D \boxtimes \mathbb{Q}_p)_b$. Si on choisit un $O_{\mathscr{E},L}$-réseau M de D stable par φ, Γ, on voit que $B(D) = Hom_{O_L}^{cont}(M \boxtimes \mathbb{Q}_p, L)$ ($M \boxtimes \mathbb{Q}_p$ étant défini comme $(D \boxtimes \mathbb{Q}_p)_b$ en ramplaçant D par M). Les propriétés de $D^\sharp$ montrent que $M \boxtimes \mathbb{Q}_p$ est compact et donc on peut munir $B(D)$ de la norme $|f| = \sup_{x \in M \boxtimes \mathbb{Q}_p} |f(x)|$ et de l'action duale du groupe mirabolique. On voit facilement que $B(V)$ avec cette action et cette norme est un Banach unitaire muni d'une action continue du mirabolique. En plus, Colmez montre (ce n'est pas du tout trivial et le foncteur $D^\sharp$ y joue un rôle crucial) que si V est absolument irréductible de dimension au moins 2, alors $B(V)$ est topologiquement irréductible comme représentation du mirabolique.

Voici un exemple très simple : supposons que $D = O_L[[T]][1/p]$ (ce n'est pas un (φ, Γ)-module sur $O_{\mathscr{E},L}$ ou $\mathscr{E}_L$, mais oublions cela). Il a des opérateurs φ, ψ définis comme sur un (φ, Γ)-module. En fait D s'identifie au dual continu de $C^0(\mathbb{Z}_p, L)$ via la transformée d'Amice

$$A_\mu(T) = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu(x) = \sum_{n \geq 0} T^n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} \mu(x)$$

et ces opérateurs correspondent aux opérations suivantes sur les mesures : $\int_{\mathbb{Q}_p} f\varphi(\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(px)\mu(x)$ et $\int_{\mathbb{Z}_p} f\psi(\mu) = \int_{p\mathbb{Z}_p} f(x/p)\mu(x)$ (c'est un exercice amusant de vérifier que $A_{\psi(\mu)} = \psi(A_\mu)$. Si on essaie d'expliciter $(D \boxtimes \mathbb{Q}_p)_b$ on tombe sur l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{Q}_p$, ie dual de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Q}_p$ et tendant vers 0 à l'infini, avec l'action du mirabolique définie par $\int_{\mathbb{Z}_p} f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu = \int_{\mathbb{Z}_p} f(ax+b)\mu(x)$. En utilisant cet exemple, le lecteur pourra trouver les formules pour l'action du mirabolique sur $(D \boxtimes \mathbb{Q}_p)_b$ pour tout (φ, Γ)-module. Donc $B(D)$ s'identifie à l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme sup et de l'action évidente du mirabolique $(f \to f(ax+b))$.

Tout ceci est bien sympathique, mais obtient-on vraiment des représentations intéressantes du mirabolique ? Ce n'est pas du tout trivial d'y répondre, car il s'agit de calculer explicitement ce que cette recette donne sur des représentations galoisiennes. Ces calculs ont été faits par Colmez (pour les représentations semi-stables non cristallines) et Berger-Breuil [BB08] (cas cristallin et même plus) en utilisant toute la force des théorèmes de comparaison de Berger, la théorie des modules de Wach et beaucoup d'analyse fonctionnelle p-adique. Le résultat est celui espéré : dans le cas des représentations cristallines absolument irréductibles de dimension 2 (plus quelques hypothèses techniques qu'on n'explicitera pas ici) $B(V)$ est une complétion unitaire de $\pi(V) \otimes \sigma(V)$, où $\sigma(V)$ est la représentation obtenue à partir de $D_{pst}(V)$ par la recette de Fontaine et $\pi(V) = Sym^{h_2-h_1-1}(L^2) \otimes (\det)^{h_1}$ pour certains entiers $h_1 < h_2$ appelés poids de Hodge-Tate de V. Mieux, les calculs de Berger-Breuil montrent que l'action du Borel se prolonge en une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ dans le cas cristallin. La démonstration est par contre très indirecte : ils donnent d'abord une déscription assez explicite-mais horriblement technique-d'une telle complétion unitaire en termes de certains espaces de fonctions assez différentiables et ensuite montrent que cet espace est naturellement isomorphe à $B(V)$ (c'est de loin la partie la plus délicate).

8.4 De $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ à $D \boxtimes \mathbb{P}^1$ et fin de la souffrance (ou le début...)

Les calculs de Berger-Breuil et Colmez donnaient l'espoir d'une correspondance de Langlands p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ réalisée via la théorie des (φ, Γ)-modules. Par contre, il est très difficile de montrer que l'action du mirabolique se prolonge en une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ tout entier (c'est d'ailleurs faux en général...). Le but de cette partie est de donner la construction, assez magique, de cette correspondance pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Au lieu de mesures sur $\mathbb{Q}_p$, Colmez utilise comme inspiration les mesures sur $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Fixons un caractère $\delta : {\mathbb{Q}_p}^* \to O_L^*$ et prenons comme définition d'un tel objet un élément du dual (continu) de l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{Q}_p \to L$ telles que $\delta(x)f(1/x)$ se prolonge par continuité en 0. Le point est d'imiter sur un (φ, Γ)-module l'action définie sur une telle distribution par la formule $\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)(w \cdot \mu)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \delta(x) f(1/x)\mu(x)$. Une telle distribution est déterminée par deux mesures μ_1, μ_2 sur $\mathbb{Z}_p$ qui satisfont $Res_{\mathbb{Z}_p^*}(\mu_2) = w_\delta(Res_{\mathbb{Z}_p^*}(\mu_1))$ (intégrér f sur $\mathbb{Q}_p$ revient à l'intégrer sur $\mathbb{Z}_p$ et sur $v_p(x) \leq 0$, or sur ce domaine on peut faire $x \to 1/x$, ce qui a un sens car $\delta(x)f(1/x)$ est continue).

Si on veut faire la même chose partant d'un (φ, Γ)-module D, il faut bien trouver un équivalent de w_δ, dont la définition doit utiliser seulement φ, ψ et des éléments de $O_{\mathscr{E},L}$. Ce n'est pas une mince affaire ! Si on essaie de calculer $A_{w_\delta(\mu)}$ en l'approximant par des sommes de Riemann, on arrive à l'horrible expréssion valable pour tout (φ, Γ)-module :

$$w_\delta(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in {\mathbb{Z}_p}^*/p^n} \delta(1/i)(1+T)^i \sigma_{-i^2}(\varphi^n(\psi^n((1+T)^{-i^{-1}} z))),$$

où $i \in {\mathbb{Z}_p}^*/p^n$ veut dire qu'on somme sur un système de représentants de ${\mathbb{Z}_p}^*$ mod p^n (et la limite ne dépend pas du choix de ce système). Ce n'est pas du tout une trivialité de montrer que la limite existe est qu'on obtient une involution ! D'ailleurs, les convergences sont très mauvaises et toute démonstration un peu fine concernant l'action de w_δ est très indirecte et délicate.

On peut maintenant presenter la construction de Colmez : on commence par définir un espace

$$D \boxtimes_\delta \mathbb{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \times D | Res_{{\mathbb{Z}_p}^*}(z_2) = w_\delta(Res_{{\mathbb{Z}_p}^*}(z_1))\},$$

où $Res_{\mathbb{Z}_p^*}(x) = x - \varphi(\psi(x))$. Il est facile de faire agir $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par $w(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$. Il n'est pas du tout trivial, mais on peut montrer qu'on peut faire agir $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur cet espace (sauf pour les actions de $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, définies par formules parfaitement explicites, il est difficile d'expliciter les actions de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais Colmez donne une recette pour pouvoir calculer avec). On n'entre pas dans les détails très techniques de la construction de cette action. Il est d'ailleurs assez amusant de constater que ce qu'on gagne avec $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ (l'action du Borel était très explicite sur ce modèle, mais on n'avait pas d'action de w) on perd complètement sur $D \boxtimes_\delta \mathbb{P}^1$. On verra comment sauver cette perplexité tout de suite.

Pour utiliser les résultats déjà obtenus sur $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$, Colmez construit une application Borel-équivariante $Res_{\mathbb{Q}_p} : D \boxtimes_\delta \mathbb{P}^1 \to D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ définie par $Res_{\mathbb{Q}_p}(z) = \left(Res_{\mathbb{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z \right) \right)_{n \geq 0}$, où $Res_{\mathbb{Z}_p}(x) = x_1$ si $x = (x_1, x_2) \in D \boxtimes \mathbb{P}^1$ (et où la matrice diagonale (x, x) agit sur $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ par $\delta(x)$). Enfin, on définit

$$D^{truc} \boxtimes_\delta \mathbb{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbb{P}^1 | Res_{\mathbb{Q}_p}(z) \in D^{truc} \boxtimes \mathbb{Q}_p\}$$

si $truc \in \{\sharp, \natural\}$ (on utilise ici que $D^\natural, D^\sharp$ sont stables par ψ pour définir des objets $D^{truc} \boxtimes \mathbb{Q}_p$ de la même manière qu'on a défini $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$).

Le lecteur survivant aura sans doute remarqué que toutes ces constructions marchent pour n'importe quelle représentation p-adique V et n'importe quel caractère continu δ. Or, il serait un peu étrange que la correspondance envoie tout le côté galoisien sur des représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Toujours est-il que si $dim(V) = 2$ et si δ est un caractère bien spécial, la construction marche très bien ! Supposons donc dans la suite que $dim(V) = 2$ est définie sur L, donc $D = D(V)$ est de dimension 2 sur $\mathscr{E}_L$. On définit un caractère $\delta_D(x) = \frac{1}{x|x|} \det V(x)$ (où l'on voit $\det(V)$ comme caractère de ${\mathbb{Q}_p}^*$ via la théorie du corps de classe local, normalisé pour que les Frobenius arithmétiques correspondent aux uniformisantes) et on note $D \boxtimes \mathbb{P}^1 = D \boxtimes_{\delta_D} \mathbb{P}^1$ (pareil pour $D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1$, etc).

Un des théorèmes les plus délicats permettant de construire les Banach unitaires associés à la représentation de départ est le suivant :

Théorème 8.4.1. *(Colmez) Soit V une représentation p-adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$, de dimension 2 et absolument irreductible, $D = D(V)$ le (φ, Γ)-module associé à V. Alors l'espace*

$$D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1 = \{z \in D \boxtimes \mathbb{P}^1 | Res_{\mathbb{Q}_p}(z) \in D^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p\}$$

est stable par l'action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

La démonstration de ce théorème est très acrobatique et difficile : elle utilise de manière cruciale le fait que les constructions peuvent se faire à niveau entier (ie pour des $\mathbb{Z}_p$-représentations), qu'elles sont compatibles avec la réduction mod p et que de plus elles se comportent bien en familles analytiques de représentations. Suivant une idée de Kisin, Colmez démontre alors la stabilité de $D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1$ par prolongement analytique, en mettant D dans une famille analytique de (φ, Γ)-modules. Pour que la technique marche, il a besoin de démontrer le résultat pour une classe suffisament large de représentations (ie Zariski dense dans l'espace des déformations de la représentation résiduelle). Une telle classe est fournie par les représentations cristallines (c'est un résultat profond !). Pour celles-ci, il faut utiliser les difficils théorèmes de Berger-Breuil dont on a discuté avant pour décrire autrement $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$. La stabilité par w découle de cette nouvelle déscription et d'un calcul très délicat d'analyse p-adique pure et dure.

Posons alors $\Pi(D) = D \boxtimes \mathbb{P}^1 / D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1$, qui par le théorème précédant est une représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 8.4.2. *(Colmez) Sous les hypothèses du théorème précédant, $\Pi(D)$ est une L-représentation de Banach unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, irréductible. On a de plus un isomorphisme $D^\natural \boxtimes \mathbb{P}^1 \cong \Pi(D)^* \otimes \delta_D$, où $\Pi(D)^*$ est le dual topologique de $\Pi(D)$.*

Ce n'est pas la fin de l'histoire, car Colmez construit un foncteur dans l'autre sens (des représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ vers les représentations galoisiennes) $\Pi \to D(\Pi)$ et montre que $D(\Pi(D)) = D(V^*(1))$, ce qui fait qu'on ne perd pas d'information. Il faut bien noter que, contrairement à la correspondance de Langlands locale classique, celle-ci est fonctorielle (ce qui est très utile pour étudier les variations en famille et les déformations ; d'ailleurs, une telle correspondance fonctorielle est cruciale dans les magnifiques travaux de Kisin [Ki]) aboutissant à une démonstration-dans la plupart des cas- de la conjecture de Fontaine-Mazur pour $G_{\mathbb{Q}_p}$ et en dimension 2). On finit ce texte par l'énoncé d'un théorème extrémément profond, qui montre qu'on peut lire la correspondance de Langlands locale classique sur celle p-adique. Ceci permet de clôtre l'énorme travail que constitue la démonstration de la conjecture de Langlands locale p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 8.4.3. *(Colmez) Soit V une L-représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$, irréductible, de dimension 2 et $\Pi(D) = \Pi(D(V))$. Alors $\Pi(D)^{alg} \neq 0$ si et seulement si V est de de Rham à poids de Hodge-Tate distincts. Dans ce cas, si $h_1 < h_2$ sont les poids de Hodge-Tate,*

$$\Pi(D)^{alg} = \sigma(D) \otimes (Sym^{h_2-h_1-1} \otimes (\det)^{h_1}),$$

où $\sigma(D)$ est la représentation lisse admissible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ obtenue par la correspondance de Langlands locale classique et par la recette de Fontaine et $\Pi(D)$ est l'ensemble des vecteurs localement algébriques de $\Pi(D)$.

Il y a de quoi rester perplexe devant le résultat quand on pense comment chacun de ces objets intervenant dans l'énoncé du théorème a été obtenu... Le lecteur restera sans doute encore plus perplexe à la vue de la preuve de ce théorème, qui est un véritable tour de force, utilisant pleinement la théorie d'Iwasawa et les lois de réciprocité qui vont avec (et dont on n'a rien dit dans ce texte) et les théorèmes de comparaison de Berger (et beaucoup de travail) avant de se ramener à un résultat hautement nontrivial concernant les formes modulaires, dû à Emerton. L'auteur de ces notes avoue être encore perdu dans ce labyrinthe, mais ne désespère voir la lumière un jour...

Références

[Be02] L.Berger, "Représentations p-adiques et équations différentielles", Inv.math. 148(2002), p.219-284.

[Be08] L.Berger, "Equations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque 319, 2008.

[BB08] L.Berger, C.Breuil, "Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $GL2(\mathbb{Q}_p)$", à paraître à Astérisque.

[BC08] L.Berger, P.Colmez,"Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique", Astérisque 319, 2008.

[Bre04] C.Breuil, ”Invariant L et série spéciale p-adique”, Ann. Scient. de l'E.N.S. 37, 2004, p.559-610.

[BE08] C.Breuil, M.Emerton, ”Représentations p-adiques ordinaires de GL2(Qp) et compatibilité local-global”, à paraître à Astérisque.http ://www.ihes.fr/ breuil/publications.html

[BH00] C.J.Bushnell, G.Henniart, "The local Langlands cojecture for $GL(2)$", Springer 2000, vol 335.

[CC98] F.Cherbonnier, P.Colmez, "Représentations p-adiques surconvergentes", Invent.Math. 133(19998), p.581-611.

[CC99] F.Cherbonnier, P.Colmez, "Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local", J.Amer.Math.Soc 12 (1999), p. 241-268.

[Col98] P.Colmez, "Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local", Annals of Math. 148 (1998), p.485-571.

[CF00] P.Colmez, J.-M. Fontaine "Constructions des représentations p-adiques semi-stables, Invent.Math.140 (2000), p.1-43.

[Col03] P.Colmez, "Les conjectures de monodromie p-adiques", Sém. Bourbaki 2001-02, exp.897, Astérisque 290 (2003), p.53-101.

[Col02] P.Colmez, "La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique", Sém. Bourbaki 2002-03, exp.919, Astérisque 294 (2004), p.251-319.

[Co071] P.Colmez, "La série principale unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$", à paraître à Astérisque, http ://people.math.jussieu.fr/ colmez/publications.html.

[Col072] P.Colmez, "(φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$", 84 pages, à paraître à Astérisque, http ://people.math.jussieu.fr/ colmez/publications.html.

[Col081] P.Colmez, "Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules", 216 pages, à paraître à Astérisque, http ://people.math.jussieu.fr/ colmez/publications.html.

[Co082] P.Colmez, "Représentations triangulines de dimension 2", Astérisque 319, 2008, p.213-59.

[Col083] P.Colmez, "Espaces Vectoriels de Dimension finie et représentations de de Rham", Astérisque 319, 2008, p.117-187.

[Fon82] J.-M. Fontaine, "Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann.of Math.. (2) 115 (1982), p.529-577.

[Fon83] J.-M. Fontaine, "Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques, Algebraic Geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), Lecture Notes in Math., vol 1016, Springer, 1983, p.86-108.

[Fon90] J.-M. Fontaine, "Représentations p-adiques des corps locaux ", The Grothendieck Festschrift, Vol.2, Progr.Math., vol.87, Birkhauser, 1990, p. 249-309.

[Fon941] J.-M. Fontaine, "Le corps des périodes p-adiques", Astérisque 223(1994), p.59-111.

[Fon942] J.-M. Fontaine, "Représentations p-adiques semi-stables", Astérisque 223(1994), p.113-184.

[Fo04] J.-M.Fontaine, "Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques", Astérisque 295 (2004), p.1-115.

[Her94] L.Herr, "Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques", Bull.Soc.Math.France 126(1998), p.563-600.

[Ka04] K.Kato, "p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms", Astérisque 295 (2004), p.117-290.

[Ke04] K.Kedlaya, "A p-adic local monodromy theorem", Ann.of Math. (2) 160 (2004), p.93-184.

[Ke08] K.Kedlaya, "Slope filtrations for relative Frobenius", Astérisque 319, 2008.

[Ki] M.Kisin, "The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2", preprint.

[Se80] S.Sen, "Continuous cohomology and p-adic Galois représentations", Invent.Math. 62 (1980/81), p.89-116.

[Ta66] J.Tate, "p-divisible groups", in Proc.Conf.Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, 1967, p. 158-183.

[Ts99] T.Tsuji, "p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case", Invent.Math. 137(1999), p.233-411.