

Les conjectures de Raghunathan pour $SL_2(\mathbb{R})$ et distribution des orbites des réseaux

Gabriel Dospinescu
Thomas Dreyfus

1^{er} juillet 2007

Nous tenons à remercier chaleureusement Antonin Guilloux pour son aide et sa disponibilité.

Résumé : Dans cet exposé, nous démontrerons les conjectures de rigidité de Raghunathan pour $SL_2(\mathbb{R})$ suivant Marina Ratner, et nous appliquerons les résultats obtenus pour étudier la distribution des orbites d'un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$ dans le plan réel. Nous nous intéresserons au passage aux groupes fuchsien et leur géométrie ainsi qu'aux propriétés dynamiques des flots géodésique et horocyclique sur des surfaces hyperboliques finies.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le plan hyperbolique, groupes fuchsien	5
2.1	Action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le plan hyperbolique	5
2.2	Groupes fuchsien	8
2.3	Domaines fondamentaux	10
2.4	La région de Dirichlet	11
2.5	Théorème de Siegel	13
2.6	Une décomposition "classique" du domaine fondamental	15
3	Démonstration de la conjecture de Raghunathan pour les mesures	17
3.1	Rappels sur les espaces homogènes et les systèmes dynamiques	17
3.2	Ergodicité du flot horocyclique, mélange du flot géodésique	20
3.3	Démonstration du théorème de Eskin-Mc. Mullen	22
3.4	Esquisse de la démonstration de la conjecture de Raghunathan	23
3.5	La famille de fonctions $\alpha_t(y, s)$	26

3.6	Fin de la démonstration de la conjecture de Raghunathan pour les mesures	31
3.7	Démonstration de Babillot	34
4	Le théorème d'équi-distribution	36
4.1	Le lemme de retour à la maison	36
4.2	Une démonstration particulièrement simple : le cas de $SL_2(\mathbb{Z})$	37
4.3	Démonstration du théorème de Dani dans le cas général	38
4.4	Décomposition ergodique	40
4.5	Fin de la démonstration d'équi-distribution	40
5	Théorème de Ledrappier et dualité	42
5.1	Notations	43
5.2	Démonstration du théorème de dualité	44
5.3	Fin de la démonstration du théorème de Ledrappier	47

1 Introduction

L'objectif du mémoire est de présenter une introduction dans l'étude des systèmes dynamiques sur les espaces homogènes, en insistant sur les actions unipotentes et en traitant le cas le plus simple, mais loin d'être trivial, des actions des sous-groupes unipotents de $SL(2, \mathbb{R})$. On s'intéresse à l'action du flot horocyclique, qui peut être décrite comme l'action à droite sur le quotient de $SL_2(\mathbb{R})$ par un réseau du groupe unipotent

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déjà en 1971 Margulis (voir [17]) avait démontré un résultat hautement non trivial affirmant qu'aucune trajectoire unipotente de $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ ne part à l'infini. Ceci fut le départ d'une vaste théorie, qui a culminé dans les années 1980 – 1990 avec les théorèmes de rigidité de Ratner, montrant que les orbites du flot horocyclique se comportent beaucoup mieux que celles du flot géodésique qui s'identifie à l'action à droite du groupe

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\},$$

pour lesquelles pratiquement tout est possible (Morse avait montré qu'il existe dans ce cas même des orbites dont l'adhérence n'est nulle part localement connexe). Les théorèmes de Ratner sont pourtant d'une difficulté tout à fait impressionnante (voir [10] pour s'en convaincre) et une étude dans le cas général est hors de question dans un tel exposé. C'est pour cela qu'on a étudié en détail le cas de $G = SL_2(\mathbb{R})$, pour lequel les démonstrations sont beaucoup moins difficiles (et même plus éclairantes, car l'arsenal technique est bien plus petit). Ainsi, en combinant les démonstrations de Ratner présentées dans [9] avec des résultats précédents de Dani, Smilie, Hopf, Sarnak (voir [6]) nous sommes arrivés à une description assez poussée des orbites du flot horocyclique. Cela nous permet de démontrer les résultats suivants, appelés les conjectures de Raghunathan pour $SL(2, \mathbb{R})$:

Théorème de classification des mesures. *Soit Γ un réseau de $G = SL(2, \mathbb{R})$ et μ une mesure de probabilité sur $X = \Gamma \backslash G$, ergodique et invariante sous l'action du flot horocyclique. Alors ou bien μ a son support sur une orbite périodique ou bien μ est la mesure de Haar sur X (normalisée).*

On a choisi de présenter la démonstration de Ratner, utilisant l'horosphéricité de U par rapport à A . Malheureusement, cette démonstration ne peut pas se généraliser, mais elle a le mérite d'être plus élémentaire. Dans l'article [9] Ratner présente une autre démonstration, qui a le mérite de se généraliser, mais qui est bien plus compliquée. On présente aussi l'approche de Babillot (suivant [21] et [2]), qui utilise un résultat de Sarnak et qui fournit une autre démonstration, peut-être encore plus simple de ce théorème. Comme le lecteur verra très facilement, toutes les démonstrations restent quand même très techniques et loin d'être faciles. C'est pour cela qu'on a essayé de découper les démonstrations en beaucoup de sections, ce qui donne peut-être l'impression de perte de fil directeur. Cela a été corrigé en créant une section dans laquelle on présente les grandes lignes de la démonstration, sans entrer dans des détails techniques.

Le théorème de classification des mesures est très important pour l'étude des orbites du flot horocyclique. En effet, il permet de démontrer assez rapidement le résultat suivant, dû à Hedlund pour $SL(2, \mathbb{R})$, et à Ratner dans le cas le plus général des groupes de Lie semi-simples :

Théorème 1.1. *Soit Γ un réseau de $G = SL(2, \mathbb{R})$ et soit $x \in X$. Alors ou bien l'orbite de x sous U est dense, ou bien elle est périodique.*

Signalons que même si ce théorème découle assez facilement de la démonstration du théorème de classification des mesures, le résultat en lui-même est totalement non trivial. C'est d'ailleurs l'étude de l'adhérence des orbites sous les flots unipotents qui fournit la démonstration du résultat suivant, qui a été un problème ouvert pendant plus de 40 ans :

Conjecture de Oppenheim-Davenport. *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n > 2$ variables, qui n'est pas un multiple d'une forme quadratique à coefficients entiers. Alors $q(\mathbb{Z}^n)$ est dense dans \mathbb{R}^n .*

Raghunathan a observé (et Margulis l'a démontré) que la démonstration de ce résultat se "réduit" à l'affirmation suivante : une orbite relativement compacte de $SO(2, 1)$ sous l'action de $SL(3, \mathbb{R})/SL_3(\mathbb{Z})$ est compacte. C'est Ratner et son théorème de classification des mesures qui a démontré un résultat beaucoup plus fort et plus général. Malheureusement, on n'a pas inclus la démonstration de la conjecture d'Oppenheim-Davenport dans ce rapport, mais le lecteur intéressé pourra trouver une excellente présentation de la démonstration (ainsi que beaucoup d'autres résultats plus récents) dans [24].

L'étape suivante de l'exposé consiste à démontrer le théorème d'équi-distribution des orbites. En pratique, c'est bien ce résultat qui est le plus utile pour compter des points entiers dans des variétés algébriques. Il entraîne aussi immédiatement le théorème de densité des orbites génériques (théorème 1.1). Pour la démonstration, on suit partiellement Ratner [9].

Théorème d'équidistribution. *Soit Γ un réseau de $G = SL_2(\mathbb{R})$. Alors pour tout point $x \in X = \Gamma \backslash G$ dont l'orbite sous le flot horocyclique n'est pas périodique*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(xu_s) ds = \int_X f dm,$$

pour toutes les fonctions f continues bornées sur X . Ici m est la mesure de Haar (normalisée pour en faire une mesure de probabilité) sur X .

Dans la démonstration de ce théorème, on utilise encore le théorème de classification des mesures. Pourtant, ce théorème n'en découle pas facilement. En fait, pour le montrer, on aura besoin d'un raffinement du théorème de Margulis concernant la non divergence des orbites, dû à Dani [17]. Heureusement, la démonstration pour $SL(2, \mathbb{R})$, même si très technique, n'est pas inextricable et donc est incluse dans l'exposé. Surtout, pour $SL_2(\mathbb{Z})$, on présente une démonstration très élémentaire et conceptuelle reposant sur le critère de compacité de Mahler.

Après avoir démontré le théorème d'équi-distribution, on discute la notion de dualité, suivant cette fois [15]. C'est ceci qui permet d'étudier efficacement les orbites de l'action de Γ sur \mathbb{R}^2 et qui permet d'utiliser les puissants théorèmes de Ratner. La notion de dualité est parue dans un article de François Ledrappier [14], où le théorème suivant est démontré :

Théorème de Ledrappier. *Soit Γ un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$ et v appartenant à \mathbb{R}^2 un vecteur dont l'orbite sous l'action de Γ n'est pas discrète. Soit f une fonction continue, à support compact sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\gamma \in \Gamma, \|\gamma\| \leq T} f(\gamma v) = \frac{c(\Gamma)}{\|v\|} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)}{\|x\|} dx,$$

où $c(\Gamma)$ est une constante qui ne dépend que de Γ .

Présentons maintenant l'organisation du papier : on s'intéresse d'abord à la structure géométrique des réseaux de $SL_2(\mathbb{R})$, en étudiant en particulier leurs domaines fondamentaux. Ceci nous fournira une description assez précise de la structure des groupes fuchsien, ce qui sera utilisé pour démontrer le théorème de non divergence des trajectoires, essentiel pour la démonstration du théorème d'équi-distribution. Ensuite, on reviendra sur les flots géodésique et horocyclique pour démontrer leur ergodicité et le caractère mélangeant, caractéristiques utilisées dans la démonstration du théorème de classification des mesures. On présentera aussi au passage quelques résultats de comptage reposant sur le mélange du flot géodésique, en suivant l'approche de Mc Mullen et Eskin [3]. Avec cette préparation, on pourra présenter les démonstrations des théorèmes de classification des mesures et d'équi-distribution et on pourra ainsi étudier la dualité et enfin établir le théorème de Ledrappier.

2 Action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le plan hyperbolique, groupes fuchsien

2.1 Action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le plan hyperbolique

L'objet central de cette partie est le demi-plan de Poincaré, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ sera vu dans toute la suite comme un groupe topologique muni de la norme $\|g\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ pour laquelle on a $\|gh\| \leq \|g\| \cdot \|h\|$. Ce groupe agit sur \mathbb{H} par homographies : $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (un calcul immédiat montre que $\text{Im}(g.z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ et qu'il s'agit bien d'une action). Cette action induit une action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H} . Observons aussi que le stabilisateur de i est $K = SO(2)$, qui est compact, et que \mathbb{H} s'identifie à $SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ par l'application qui à gK associe $g.i$.

Définition 2.1. La distance hyperbolique sur \mathbb{H} est définie par $d(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$, où le inf est pris sur toutes les courbes de classe C^1 par morceaux $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Ici, la longueur d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ est définie par

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt.$$

Un calcul direct montre que pour toute homographie g on a $\frac{|g'(z)|}{\text{Im}(g(z))} = \frac{1}{\text{Im}(z)}$ et donc g conserve la longueur de toute courbe. Par conséquent, g est une isométrie. Le résultat suivant précise les géodésiques de cette structure riemannienne :

Théorème 2.1. *Les géodésiques de \mathbb{H} sont les droites orthogonales à l'axe Ox et les demi-cercles dont le centre est sur cet axe.*

Démonstration. Si $z_1 = ai$ et $z_2 = bi$ sont sur l'axe Oy et satisfont $a < b$, il est clair que toute courbe γ vérifie

$$l(\gamma) \geq \int_0^1 \frac{(\text{Im}\gamma(t))'}{\text{Im}\gamma(t)} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et ce minimum est atteint pour la courbe $\gamma(t) = tz_1 + (1-t)z_2$. Donc l'axe Oy est bien une géodésique. Dans le cas général, soient z, w appartenant à \mathbb{H} . Si on arrive à trouver $g \in G$ tel que $g.z, g.w$ soient sur l'axe imaginaire, le théorème sera démontré car l'homographie g est une isométrie et transforme cercles et droites en cercles et droites. Mais si $\text{Re}(z) \neq \text{Re}(w)$ (dans l'autre cas, on trouve g trivialement), on considère le cercle C passant par z, w et dont le centre est sur l'axe réel. Soient x_1, x_2 les points d'intersection de ce cercle avec l'axe réel. Soit g appartenant à G tel que l'homographie induite s'écrit

$$g.s = \frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{s - x_1}.$$

L'image du cercle C sera un cercle passant par 0 et ∞ et comme de plus $\text{Im}(g.s) = \frac{\text{Im}(s)}{|s-x_1|^2}$, l'image de C est bien l'axe imaginaire. \square

Définition 2.2. Le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ est l'ensemble de couples (z, v) , où z est un élément de \mathbb{H} et v est un vecteur tangent à \mathbb{H} en z tel que $|v| = \text{Im}(z)$.

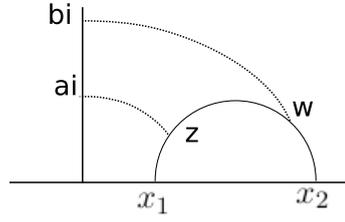


FIG. 1 – Géodésique dans le plan hyperbolique

$PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur $T^1\mathbb{H}$ par :

$$g.(z, v) = (g(z), g'(z)v) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{v}{(cz + d)^2} \right).$$

Un calcul immédiat montre qu'il s'agit en effet d'une action. Le résultat suivant montre que cette action permet d'identifier $PSL_2(\mathbb{R})$ à $T^1\mathbb{H}$.

Théorème 2.2. *Soit $z_0 = i$ et v_0 le vecteur unitaire en z_0 parallèle à l'axe des ordonnées. L'application $\varphi : PSL_2(\mathbb{R}) \rightarrow T^1\mathbb{H}$ définie par $\varphi(g) = g.(z_0, v_0)$ est un homéomorphisme. De plus, l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur lui-même par translation à gauche correspond à celle de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$.*

Démonstration. Clairement $\varphi(gg') = g.\varphi(g')$, d'où la deuxième assertion. Montrons que φ est un homéomorphisme. Soit $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ et écrivons $z = \alpha + i\beta$, avec $\beta > 0$ et $|v| = \beta$. Cherchons une homographie $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ telle que $g.(z_0, v_0) = (z, v)$. Ceci entraîne $c = \frac{\alpha a - \beta b}{|z|^2}$ et $d = \frac{\alpha b + \beta a}{|z|^2}$. Quant à la deuxième condition, elle s'écrit $\left(\frac{ai+b}{\alpha+i\beta}\right)^2 = \frac{i}{v}$. La relation $|v| = \beta$ nous assure que si (a, b) vérifie la condition précédente, alors g appartient à $PSL_2(\mathbb{R})$. Il ne reste plus qu'à voir que la relation $\left(\frac{ai+b}{\alpha+i\beta}\right)^2 = \frac{i}{v}$ détermine uniquement a, b au signe près et que a, b dépendent effectivement continûment de α, β, v , ce qui est tout à fait évident. \square

$$\begin{array}{ccc} PSL_2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & T^1\mathbb{H} \\ h \mapsto g.h & \downarrow & \uparrow (z, v) \mapsto g.(z, v) \\ PSL_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi} & T^1\mathbb{H} \end{array}$$

Définition 2.3. Soit $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ et γ la géodésique par z , de direction v . Soit z_t le point de γ situé à distance t de z dans la direction donnée par v et soit v_t le vecteur unitaire tangent à γ au point z_t , dans la même direction. Le groupe à un paramètre $g_t(z, v) = (z_t, v_t)$ s'appelle le flot géodésique.

Proposition 2.1. Le flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$ correspond à la multiplication à droite dans $PSL_2(\mathbb{R})$ par $a_{t/2}$, où $a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

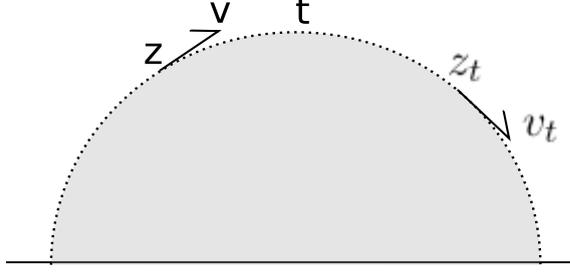


FIG. 2 – Flot géodésique

Démonstration. Ceci est plus ou moins évident à partir de l'identification entre $T^1\mathbb{H}$ et $PSL_2(\mathbb{R})$. En effet, si (z, v) appartient à $T^1\mathbb{H}$ et $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ est tel que $g.(z_0, v_0) = (z, v)$, alors comme g agit isométriquement,

$$g_t(z, v) = g_t(g.(z_0, v_0)) = g.g_t(z_0, v_0) = ga_{t/2}.(z_0, v_0),$$

la dernière égalité étant évidente en regardant la géodésique déterminée par z_0, v_0 . \square

Soit maintenant $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ et γ la géodésique déterminée, c'est-à-dire la courbe dans \mathbb{H} telle que $\gamma(0) = z$ et $\gamma'(0) = v$ et qui de plus est une géodésique. Soit maintenant C_t le cercle hyperbolique de centre $\gamma(t)$ et passant par z et soit C_∞ la limite pour $t \rightarrow \infty$ de C_t , l'horocycle positif déterminé par (z, v) . Soit z_t le point sur l'horocycle positif situé à distance t de z , comptée dans le sens trigonométrique. Soit enfin v_t le vecteur unitaire normal à C_∞ en z_t et dirigé vers l'intérieur du cercle.

Définition 2.4. Avec les notations précédentes, on définit le flot horocyclique par :

$$h_t(z, v) = (z_t, v_t).$$

Remarque On peut définir le flot horocyclique plus simplement de la façon suivante : pour tout couple $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ il existe un unique horocycle C (cercle tangent à l'axe réel) passant par z et dont v est un vecteur normal intérieur. On définit l'action du flot horocyclique par (z_t, v_t) où (z_t, v_t) est obtenu en "poussant" (z, v) le long de C d'une distance t .

Proposition 2.2. Dans l'identification $T^1\mathbb{H} \approx PSL_2(\mathbb{R})$ le flot horocyclique correspond à l'action à droite du groupe unipotent :

$$U = \left\{ u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

La démonstration de cette proposition étant identique à celle pour le flot géodésique, on va laisser le plaisir de rédiger les mêmes arguments au lecteur. Grâce aux propositions précédentes, on a une description algébrique assez commode des flots géodésique et horocyclique. Observons que si on introduit le groupe unipotent à un paramètre

$$H = \left\{ h_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$$

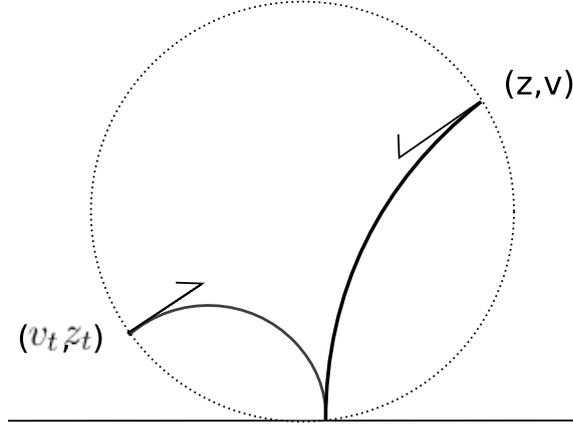


FIG. 3 – Flot horocyclique

alors on a les relations fondamentales de commutation :

$$u_s a_t = a_t u_{se^{-2t}}, h_b a_t = a_t h_{be^{2t}}.$$

Définition 2.5. Pour $g \in SL_2(\mathbb{R})$ on dit que g est hyperbolique si $|tr(g)| > 2$, parabolique si $|tr(g)| = 2$ elliptique si $|tr(g)| < 2$.

Un argument immédiat d'algèbre linéaire montre que g est hyperbolique si et seulement si g est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$. Dans ce cas, l'homographie associée à g admet deux points fixes sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On montre aussi que g est elliptique si et seulement si g est conjugué à

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et dans ce cas l'homographie associée a un point fixe dans \mathbb{H} . Enfin, si g est parabolique, g est conjugué à un u_t , et alors il a un point fixe dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2.2 Groupes fuchsien

Définition 2.6. Un groupe G agit proprement discontinûment sur un espace métrique X si l'orbite de tout point est localement finie i.e. rencontre tout compact en nombre fini de points, comptés avec multiplicité.

Définition 2.7. Un groupe fuchsien est un sous groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$ i.e. un sous groupe discret d'isométries directes de \mathbb{H} .

Il est bien clair que la première définition équivaut au fait que toute orbite est discrète et que le stabilisateur de tout point est fini. Le résultat suivant sera très utile dans l'étude des actions des groupes fuchsien.

Théorème 2.3. Soit Γ un groupe fuchsien. Γ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} .

Démonstration. Si Γ est fuchsien alors pour tout compact $K \subset \mathbb{H}$ et pour tout $z \in \mathbb{H}$ l'ensemble

$$\{g \in \Gamma | g.z \in K\} = \{g \in PSL_2(\mathbb{R}) | g.z \in K\} \cap \Gamma$$

est fini car $\{g \in PSL_2(\mathbb{R}) | g.z \in K\}$ est compact. En effet, comme

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & PSL_2(\mathbb{R}) \\ g & \longrightarrow & z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$$

est continue il suffit de montrer que

$$\{g \in SL_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \frac{az+b}{cz+d} \in K\}$$

est compact. Il est clairement fermé et le fait qu'il est borné vient de la compacité de K : il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ avec

$$\left| \frac{az+b}{cz+d} \right| > c_1, \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \geq c_2 \text{ si } \frac{az+b}{cz+d} \in K.$$

Alors

$$|cz+d| \leq \sqrt{\frac{\operatorname{Im}(z)}{c_2}} \text{ et de même } |az+b| \leq c_1 \sqrt{\frac{\operatorname{Im}(z)}{c_2}},$$

donc a, b, c, d sont bornés. □

Corollaire 2.1. 1. Si Γ est fuchsien, alors l'ensemble des points fixes des éléments elliptiques de Γ n'a pas de point d'accumulation dans \mathbb{H} .

2. L'ensemble $\Lambda(\Gamma)$ des points d'adhérence des orbites $\Gamma \cdot z, z \in \mathbb{H}$ est inclus dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Démonstration. Soit K un compact de \mathbb{H} contenant z , alors, pour tout $g \in \Gamma$ avec $g.z = z$ on a $K \cap g(K) \neq \emptyset$. Le fait que Γ agit proprement discontinûment assure que $\{g | K \cap g(K) \neq \emptyset\}$ est fini d'où la conclusion. Le théorème précédent entraîne que si $z \in \mathbb{H}$, $(g_n \in \Gamma)$ est une suite injective et $g_n.z$ un point d'adhérence dans $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$, ce point est dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. □

On peut montrer que deux éléments différents de l'identité de $PSL_2(\mathbb{R})$ commutent si et seulement si ils ont la même collection de points fixes. Observons aussi que le type d'un élément de $PSL_2(\mathbb{R})$ ne dépend que de sa trace, qui est invariante par conjugaison.

Théorème 2.4. Soit Γ un groupe fuchsien dont tous les éléments non triviaux ont le même ensemble de points fixes. Alors, Γ est monogène.

Remarque Donc tout groupe fuchsien abélien est cyclique.

Démonstration. Clairement, tous les éléments de Γ sont du même type. S'ils sont tous hyperboliques par exemple, quitte à conjuguer Γ , on suppose que ses éléments fixent 0 et ∞ , donc ce sont des homothéties. Alors, Γ s'identifie à un sous groupe discret de \mathbb{R}_+^* , qui est monogène. La même démonstration s'adapte dans les deux autres cas (pour les éléments elliptiques, on se ramènera à un sous groupe discret de S^1). □

2.3 Domaines fondamentaux

Définition 2.8. Pour un groupe G agissant sur un espace métrique X par des homéomorphismes, un ensemble $F \subset X$ est un domaine fondamental pour G si :

1. F est fermé
2. $\bigcup_{g \in G} g(F) = X$
3. Pour tout $g \in G \setminus \{I_2\}$, $g(\overset{\circ}{F}) \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$

Remarque Le 2 équivaut au fait que toute orbite rencontre F , tandis que le 3 affirme que les $(g(\overset{\circ}{F}))_{g \in G}$ sont deux à deux disjoints ce qui veut dire encore que deux points de $\overset{\circ}{F}$ n'appartiennent pas à la même orbite.

Théorème 2.5. Soient F_1, F_2 deux domaines fondamentaux pour Γ groupe fuchsien et supposons que l'aire hyperbolique de F_1 est finie, $\partial F_1, \partial F_2$ ont des aires hyperboliques nulles. Alors, $\text{aire}(F_1) = \text{aire}(F_2)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{g \in G} g(F_1) \Rightarrow \overset{\circ}{F}_2 = \bigcup_{g \in G} (g(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2) \\ \Rightarrow \mu(F_2) &= \mu(\overset{\circ}{F}_2) \leq \sum_{g \in \Gamma} \mu(g(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2) = \sum_{g \in \Gamma} \mu((F_1 \cap g(\overset{\circ}{F}_2))) \leq \mu(F_1) \end{aligned}$$

car les $F_1 \cap g(\overset{\circ}{F}_2)$ sont deux à deux disjoints. □

Remarque Le domaine fondamental peut être non compact mais d'aire hyperbolique finie. Par exemple, celui de $SL_2(\mathbb{Z})$ n'est pas compact, mais son aire est $\frac{\pi}{3}$.

Définition 2.9. Un réseau d'un groupe localement compact G est un sous-groupe discret Γ tel que $\Gamma \backslash G$ porte une mesure G -invariante finie. Le réseau Γ est dit co-compact si le quotient $\Gamma \backslash G$ est compact.

Soient m_G et m_Γ des mesures de Haar sur G, Γ . On peut définir sur $X = \Gamma \backslash G$ une mesure G -invariante par la formule de Weil :

$$\int_G f(x) dm_G(x) = \int_X \int_\Gamma f(\gamma x) dm_\Gamma(\gamma) dm_X(x).$$

Lemme 2.1. La mesure $\frac{dx dy}{y^2}$ sur \mathbb{H} est G -invariante.

Démonstration. Le jacobien de l'homographie associé à $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est $\frac{1}{|cz+d|^4}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de changement de variable pour avoir :

$$\int_{\mathbb{H}} f(g^{-1}.z) dx dy / y^2 = \int_{\mathbb{H}} \frac{f(z)}{|cz+d|^4} \cdot \frac{|cz+d|^4}{y^2} dx dy = \int_{\mathbb{H}} \frac{f(z) dx dy}{y^2}.$$

□

Le lemme permet de calculer par exemple le volume de $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$, car on connaît un domaine fondamental pour $SL_2(\mathbb{Z})$ (voir la section suivante). Par calcul, on trouve que ce domaine est de mesure finie et donc $SL_2(\mathbb{Z})$ est un réseau de G . Pourtant il n'est pas co-compact car ce domaine fondamental a une pointe.

2.4 La région de Dirichlet

Pour tout groupe fuchsien Γ , il existe $z \in \mathbb{H}$ avec $g.z \neq z$ (tout élément de $\Gamma - \{I_2\}$ a au plus deux points fixes et Γ est dénombrable car discret).

Définition 2.10. La région de Dirichlet de point de base p associée à Γ est :

$$\Delta_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{pour tout } g \in \Gamma, \rho(z, g.p) \geq \rho(z, p)\}$$

avec ρ la distance hyperbolique.

Théorème 2.6. Si pour tout $g \in \Gamma - \{I_2\}$ on a $g(p) \neq p$, alors $\Delta_p(\Gamma)$ est un domaine fondamental connexe, et même hyperboliquement convexe.

Démonstration. Observons que $\Delta_p(\Gamma) = \bigcap_{g \neq I_2 \in \Gamma} H_p(g)$ où $H_p(g) = \{z \mid \rho(z, g.p) \geq \rho(z, p)\}$ est un demi-espace hyperbolique, donc hyperboliquement convexe. La même expression montre que $\Delta_p(\Gamma)$ est fermé, et comme il est convexe, il est connexe aussi. De plus, toute orbite de Γ rencontre $\Delta_p(\Gamma)$, car Γ étant discret, la fonction $g \mapsto \rho(g.z, p)$ atteint son minimum. Enfin, il est clair que si $z \in \overset{\circ}{\Delta}_p(\Gamma)$, alors $\rho(z, p) < \rho(g.z, p)$ pour tout g dans $\Gamma - \{I_2\}$ car s'il existe $g \in \Gamma - \{I_2\}$ avec $\rho(z, p) = \rho(g.z, p)$ on en déduit que z est sur la médiatrice de $[p, g^{-1}.p]$ et donc il n'est pas à l'intérieur de $\Delta_p(\Gamma)$. Ceci montre qu'il ne peut pas y avoir deux points de la même orbite dans z appartenant à $\overset{\circ}{\Delta}_p(\Gamma)$. \square

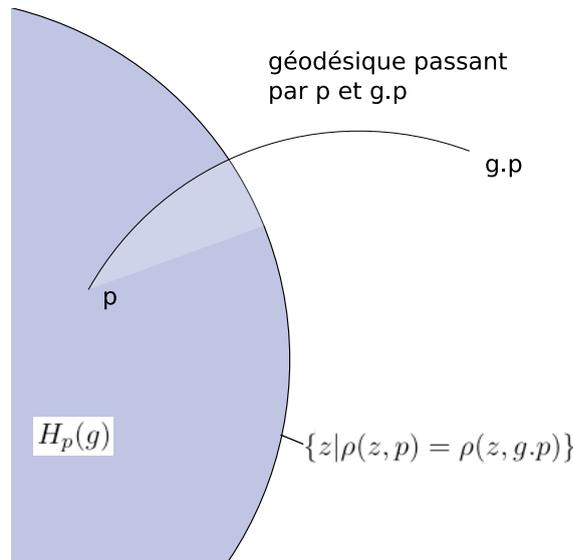


FIG. 4 – Médiatrice d'une géodésique

Proposition 2.3. Le domaine $D = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ est un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} .

Démonstration. Soit $z_0 = 2i$. Comme on le voit facilement, z_0 n'est fixé par aucun élément non trivial de Γ . On va montrer que D est une région de Dirichlet associée à z_0 . Pour cela, observons déjà que si z est dans la région de Dirichlet associée à z_0 , alors $z_0 \in D$, car $\rho(2i, z) \leq \rho(2i \pm 1, z)$ et $\rho(2i, z) \leq \rho(i/2, z)$. On peut aussi observer qu'en posant $\gamma_1.z = z + 1$ et $\gamma_2.z = \frac{-1}{z}$ les côtés de D sont les ensembles $L(\gamma_1), L(\gamma_1^{-1}), L(\gamma_2)$ où

$$L(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) = \rho(z, \gamma.p)\}.$$

D'autre part, considérons z dans l'intérieur de D et $g \in \Gamma$ tel que $z_1 = g.z$ soit aussi dans l'intérieur de D . Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $c \neq 0$, car sinon $|\Re(z_1)| \geq \frac{1}{2}$. Mais alors

$$|cz + d|^2 = c^2 \cdot |z|^2 + 2cd\Re(z) + d^2 > c^2 - |cd| + d^2 \geq 1,$$

donc

$$|cz + d|^2 > 1 \text{ et } \text{Im}(z_1) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} < \text{Im}(z).$$

On vient donc de voir que si z et $g.z$ appartiennent à l'intérieur de D et $g \neq I_2$, alors $\text{Im}(g.z) < \text{Im}(z)$. En travaillant avec $g.z$ et g^{-1} à la place de z et g , on obtient aussi $\text{Im}(z) < \text{Im}(g.z)$, ce qui fournit une contradiction. \square

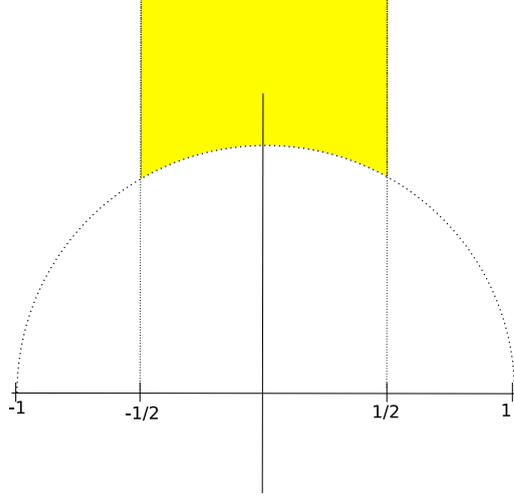


FIG. 5 – Le domaine fondamental de $PSL_2(\mathbb{Z})$

Remarque La démonstration de la proposition précédente montre que γ_1 et γ_2 engendrent $PSL_2(\mathbb{Z})$

Définition 2.11. On appelle sommet de la région de Dirichlet tout point d'intersection dans \mathbb{H} de deux géodésiques constituant la frontière de la région, ou un point fixe d'un élément elliptique d'ordre deux.

Donc la frontière de la région de Dirichlet est formée d'un ensemble au plus dénombrable de géodésiques et de segments de la droite réelle.

Définition 2.12. Si F est un domaine de Dirichlet, le pavage de Dirichlet est la famille $(g(F))_{g \in \Gamma}$, dans laquelle les éléments sont comptés avec multiplicité.

Théorème 2.7. *Le pavage $(g(F))_{g \in \Gamma}$ est localement fini, i.e. pour tout compact K de \mathbb{H} , il n'y a qu'un nombre fini de $g \in \Gamma$ avec $g(F) \cap K \neq \emptyset$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite injective $g_j \in \Gamma$ et $z_j \in F$ avec $g_j(z_j) \in K \cap g_j(F)$. Alors, vu que $z_j \in F$ on a $\rho(z_j, p) \leq \rho(g_j \cdot z_j, p)$ donc

$$\begin{aligned} \rho(p, g_j(p)) &\leq \rho(p, g_j(z_j)) + \rho(g_j(z_j), g_j(p)) = \\ &\rho(p, g_j(z_j)) + \rho(z_j, p) \leq 2 \max_{z \in K} \rho(p, z) < \infty. \end{aligned}$$

Donc la boule $\overline{B}_\rho(p, 2 \max_{z \in K} \rho(p, z))$ contient la suite infinie $(g_j(p))_j$ injective. Ce n'est pas possible, car Γ agit proprement discontinûment. \square

2.5 Théorème de Siegel

Dans la suite, on fixe une région de Dirichlet F pour un groupe fuchsien Γ . On appelle cycle dans F une classe d'équivalence de l'action de Γ sur l'ensemble des sommets de F . Un cycle est dit elliptique si tout sommet du cycle est fixé par un élément elliptique. On constate facilement qu'il suffit qu'il existe un sommet du cycle fixé par un élément elliptique. On appelle côté de F tout segment d'une géodésique de ∂F qui est inclus dans F .

Théorème 2.8. *Il existe une bijection entre les cycles elliptiques de F et les classes de conjugaison de sous groupes cycliques (donc finis) non triviaux maximaux de Γ .*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}$. Alors, par les théorèmes 2.3 et 2.4, le stabilisateur Γ_z est un sous groupe cyclique de Γ . Supposons qu'il n'est pas trivial. Il est alors clairement un sous groupe cyclique maximal de Γ , car si g appartient à G' (ou G' est un sous groupe cyclique de Γ contenant Γ_z), g commute avec tout élément de Γ_z et donc $g \in \Gamma_z$. Le fait que tout sous groupe maximal cyclique est le stabilisateur d'un seul point de \mathbb{H} est clair. \square

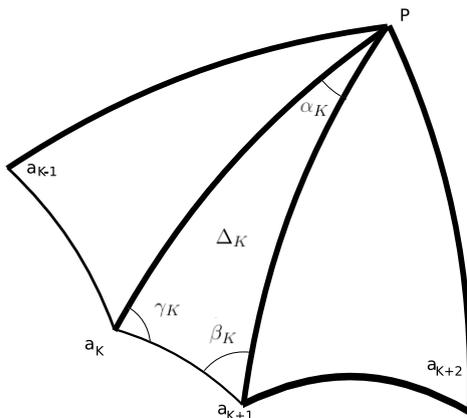
On peut passer au théorème de Siegel, qui montre que pour un réseau de $G = SL_2(\mathbb{R})$, la région de Dirichlet a des propriétés géométriques très particulières. Avant, quelques précisions sur les points à l'infini : ∂F est formé comme on l'a vu par des segments de géodésiques et des segments de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. De plus, si par hasard sur un tel segment géodésique on a un point fixe elliptique d'ordre deux, on considère ce point, un sommet et alors le segment correspondant est vu comme union de deux côtés. Un point (on l'appellera dans la suite point) est le point d'intersection dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des deux géodésiques constituant la frontière de F .

Définition 2.13. Γ est dit géométriquement fini s'il admet un domaine fondamental convexe avec un nombre fini de côtés.

Théorème de Siegel. Si $\mu(\Gamma \backslash \mathbb{H}) < \infty$ (i.e. Γ est un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$) alors Γ est géométriquement fini. Ce qui équivaut à : la région de Dirichlet d'un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$ est géométriquement finie.

Démonstration. Soit $F = \Delta_p(\Gamma)$ une région de Dirichlet associée à un point p tel que pour tout $g \in \Gamma - \{I_2\}, g(p) \neq p$. Montrons qu'elle est géométriquement finie. Si Γ est co-compact, comme les sommets de F sont isolés (voir [13]), on n'a qu'un nombre fini de sommets, donc aussi de cotés. Il reste à traiter le cas non co-compact. \square

Lemme 2.2. $\sum_{\omega \in \mathbb{H}} (\pi - \omega) \leq \text{aire}(F) + 2\pi$, la somme étant prise sur les sommets de F dans \mathbb{H} et ω l'angle du sommet correspondant .



Démonstration. On commence par considérer un ensemble connexe de segments de géodésiques dans ∂F (qui n'a aucune raison d'être connexe), dont les sommets sont \dots, a_1, a_2, \dots infini dans les deux directions (les autres cas sont identiques). Considérons les géodésiques liant p et les sommets a_j et le triangle Δ_k de sommets a_k, p, a_{k+1} et $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ses angles. Soit ω_k l'angle entre les deux cotés A_k et A_{k+1} . Le formule de Gauss-Bonnet nous donne

$$\begin{cases} \omega_k = \beta_k + \gamma_{k+1} \\ \text{aire}(\Delta_k) = \pi - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k) \end{cases}$$

Ceci montre que

$$\sum_{k=m}^n \alpha_k + \sum_{k=m}^n \text{aire}(\Delta_k) = \pi - \gamma_m - \beta_n + \sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \omega_k). \quad (1)$$

Le terme de gauche est borné par $2\pi + \text{aire}(F)$, donc aussi le terme de droite. Ceci montre que

$$\sum_k (\pi - \omega_k)$$

converge et qu'il existe

$$\gamma_{-\infty} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \gamma_k, \gamma_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k.$$

On a clairement $a_k \rightarrow \infty$ (on a vu que le pavage $\{g(F) | g \in F\}$ est localement fini), donc pour une infinité de k on a $\rho(p, a_{k+1}) > \rho(p, a_k)$ et pour ces k , on a aussi $\gamma_k > \beta_k$. Comme $\beta_k + \gamma_k \leq \pi$ ceci implique $\beta_k \leq \frac{\pi}{2}$ pour une infinité de k et donc $\beta_\infty \leq \frac{\pi}{2}$. De même, $\gamma_{-\infty} \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $\pi \geq \gamma_{-\infty} + \beta_\infty$. Mais alors, par (1) on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{aire}(\Delta_k) \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\pi - \omega_k). \quad (2)$$

Il suffit de considérer maintenant toutes les composantes connexes du type étudié et de sommer les inégalités (2). \square

Lemme 2.3. Le nombre de sommets de F situés à distance finie de p est fini.

Démonstration. Soit v un sommet et notons $v_1 = \gamma_1 v, v_2 = \gamma_2 v, \dots$, les sommets dans la même classe de congruence que v . Soient ω_i les angles aux sommets v_i , alors v est un sommet de $\gamma_i^{-1} F$ avec un angle ω_i et de plus les $\gamma_i^{-1} F$ sont deux à deux disjoints. Par conséquent, $\omega_1 + \omega_2 + \dots \leq 2\pi$. Le lemme 1 entraîne que presque tous les ω_i valent au moins $\pi/2$, donc il n'y a qu'un nombre fini de sommets congrus à v . Soit $m = |\Gamma_v|$ (on a vu que Γ_v est un sous groupe discret d'un conjugué de $SO(2)$, donc fini). Les translatés de F dans lesquels v est un sommet sont de la forme $\gamma \gamma_i^{-1} F$ avec $\gamma \in \Gamma_v$ et sont deux à deux disjoints. Donc $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \frac{2\pi}{m}$ et donc il existe au moins un $\omega_i \geq \frac{3\pi}{4}$. Le lemme 2.2 montre donc qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de sommets de F et comme dans chaque telle orbite il n'y a qu'un nombre fini de sommets, le lemme est démontré. \square

Lemme 2.4. Le nombre de pointes est fini.

Démonstration. Ceci découle du fait que F est hyperboliquement convexe : si on a n pointes dans Γ , le polygone convexe qu'elles déterminent est contenu dans F et son aire est $(n-2)\pi$ par le théorème de Gauss-Bonnet, donc comme F est d'aire fini, n est borné et la conclusion est alors évidente. \square

Il est clair que le théorème de Siegel est une conséquence des lemmes précédents.

2.6 Une décomposition "classique" du domaine fondamental

Proposition 2.4. Soit Γ un réseau non co-compact de $G = SL_2(\mathbb{R})$ et soit D un domaine de Dirichlet pour Γ . Alors pour toute pointe x , le stabilisateur Γ_x de x dans Γ est monogène, engendré par un élément parabolique de Γ .

Démonstration. Ceci découle du théorème de Siegel, mais la démonstration n'est pas évidente. Quitte à conjuguer Γ par $g \in G$ tel que $g.\infty = x$, on peut toujours supposer $x = \infty$. Supposons que $\gamma \in \Gamma$ est choisi tel que ∞ est un sommet de γD , alors $\gamma^{-1}\infty$ est une pointe de D . Comme il existe une infinité de tels γ (ceci parce que D contient deux géodésiques verticales), le théorème de Siegel entraîne l'existence d'un élément non trivial $\gamma \in \Gamma$ fixant ∞ . Cet élément doit être parabolique, car sinon l'homographie associée est de la forme $az + b$ avec $a \neq 1$. Mais alors, quitte à travailler avec l'inverse de γ , on peut supposer $Im(\gamma p) = Im(p)$, p étant le point de base de D . En considérant q un point tel que $Im(q) = Im(p)$ et $\Re(q) = \Re(\gamma p)$, on montre par un calcul assez pénible que

$d(p + it, \delta p) > d(p + it, p)$ pour tout $\delta \in \Gamma$, non trivial. Ceci est évidemment absurde et assure que le stabilisateur s'identifie à un sous-groupe discret de \mathbb{R} , donc est cyclique et engendré par un élément parabolique. \square

Proposition 2.5. Soit Γ un réseau non co-compact de G et tel que Γ_∞ n'est pas trivial. Alors pour une certaine constante M on a : si $Im(z) > M$ et $Im(\gamma z) > M$ pour un $\gamma \in \Gamma$, alors $\gamma \in \Gamma_\infty$.

Démonstration. En effet, on a vu que Γ_∞ est un sous-groupe cyclique discret et non trivial de U . Si l'affirmation n'est pas vraie, on peut trouver $\gamma_n \in \Gamma - \Gamma_\infty$ et $z_n \in \mathbb{H}$ tels que $Im(z_n) \geq n$ et $Im(\gamma_n z_n) \geq n$. Si a_n, b_n, c_n, d_n sont les éléments de γ_n , les inégalités précédentes entraînent que c_n converge vers 0 et clairement $c_n \neq 0$, car γ_n ne stabilise pas ∞ . Mais alors en multipliant par des matrices de Γ stabilisant ∞ , on obtient une suite g_n dans Γ qui s'écrit $g_n = u_{x_n} h_{c_n} u_{y_n}$ avec x_n, y_n convergentes (quitte à extraire une sous-suite). Mais alors g_n converge vers une matrice de Γ_∞ et cette observation combinée avec le caractère discret de Γ et avec l'observation que c_n est non nul fournissent la contradiction (tant) désirée. \square

Soit maintenant Γ un réseau non co-compact de $SL(2, \mathbb{R})$ et soit F un domaine de Dirichlet associé. Soient x_1, x_2, \dots, x_n les pointes de F . Il existe donc $g_i \in SL(2, \mathbb{R})$ tels que $g_i \cdot \infty = x_i$. La bande $P(r) = \{x + iy \mid 0 < x < 1, y \geq r\}$ est transformée par g_i dans une zone cuspidale $F_{x_i}(r) = g_i P(r)$. Pour r suffisamment grand, les zones cuspidales sont disjointes et le complémentaire dans F de leur union est relativement compact et adjacent à toute zone cuspidale le long d'un horocycle. On a ainsi une décomposition de F en une partie centrale relativement compacte et une famille finie de zones cuspidales disjointes. Définissons $E_i(r) = \bigcup_{s>r} g_i a_s USO(2)$. Il s'agit clairement d'un ouvert de G et de plus on vérifie sans peine que la zone $Im(z) > e^{2r}$ est exactement $\bigcup_{s>r} a_s USO(2) i$. En utilisant alors la décomposition qu'on vient d'expliquer, il est clair qu'on a le résultat suivant :

Théorème 2.9. Il existe $r_0 > 1$ tel qu'on ait une partition de X de la forme $K \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \pi(E_i(r_0))$ avec K compact dans X .

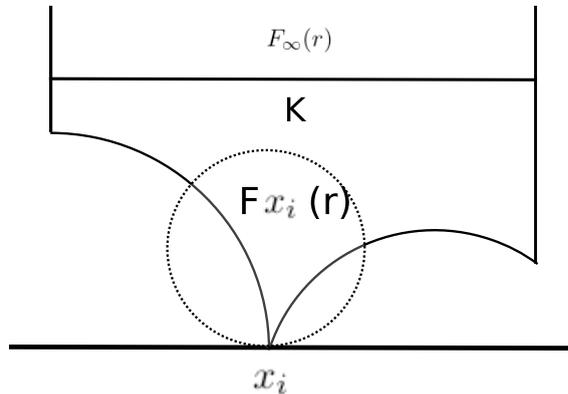


FIG. 6 – Partie centrale et zone cuspidale

On peut (enfin) démontrer une affirmation de non divergence sous le flot géodésique, qui

sera très utile dans la démonstration de classification de mesures ergodiques invariantes sous le flot horocyclique. On verra une version de cette affirmation pour les orbites sous des flots unipotents (voir le lemme de retour à la maison) pendant la démonstration du théorème d'équi-distribution.

Proposition 2.6. Soit K le compact défini dans le théorème 2.9 . Alors, pour tout point x d'orbite non périodique il existe une suite $\tau_n \rightarrow \infty$ telle que $xa_{\tau_n} \in K$ pour tout n .

Démonstration. Si cela n'est pas vrai, il existe τ_0 tel que xa_τ n'est plus dans K si $\tau > \tau_0$. Comme les images des E_i dans X sont deux à deux disjointes, pour un certain i on aura $\bar{x}a_\tau \in \{\gamma E_i | \gamma \in \Gamma\}$ pour tout $\tau > \tau_0$ et tout $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$. Mais par construction des E_i les γE_i sont aussi deux à deux disjointes et donc par connexité il va exister un x_0 tel que $\pi(x_0) = x$ et de plus $x_0 a_\tau \in E_i$ pour tout $\tau > \tau_0$. Mais cela signifie précisément que $x_0 \in g_i AU$ et donc que l'orbite de x est périodique (voir le lemme 3.3 pour une preuve), ce qui assure la contradiction souhaitée. \square

3 Démonstration de la conjecture de Raghunathan pour les mesures

3.1 Rappels sur les espaces homogènes et les systèmes dynamiques

Le but de cette section est d'introduire le vocabulaire nécessaire pour l'étude des actions des groupes sur les espaces mesurés, ainsi que de rappeler les principaux résultats de la théorie ergodique, qui seront utilisés constamment dans la suite.

Définition 3.1. Soient (X, m) et (X', m') deux espaces mesurés et $f : X \rightarrow X'$ une application. On dit que f préserve la mesure si f est mesurable et $m(f^{-1}(A)) = m'(A)$ pour toute partie mesurable A de X' .

Définition 3.2. Soit G un groupe topologique (G sera supposé dans toute la suite localement compact et dénombrable à l'infini). Une action de G sur un espace mesuré (X, m) est mesurable si l'application $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \rightarrow g.x$ est mesurable. Dans le cas où $G = \mathbb{R}$, on note l'action $t, x \mapsto \phi_t(x)$, qu'on appelle flot. On dit que l'action préserve la mesure si $m(g.A) = m(A)$ pour tout ensemble mesurable A et pour tout $g \in G$.

Définition 3.3. Soit G un groupe agissant sur l'espace mesuré (X, m) . Une partie mesurable A de X est dite G -invariante (ou invariante s'il n'y a pas de confusion) si $g.A = A$ (à un ensemble de mesure nulle près) pour tout $g \in G$. L'action de G est dite ergodique si toute partie invariante est de mesure nulle ou totale.

Définition 3.4. Soit G un groupe agissant sur l'espace mesuré (X, m) . Une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite essentiellement G -invariante si pour tout $g \in G$, $f(g.x) = f(x)$ pour presque tout x . f est dite invariante si $f(g.x) = f(x)$ pour tout g et pour tout x .

Il est bien sûr clair que si G est au plus dénombrable et si f est essentiellement invariante sous l'action de G , alors on peut trouver f_1 qui est G -invariante et qui coïncide presque

partout avec f . La proposition suivante montre qu'en fait ce résultat est valable en toute généralité. Pour une démonstration, on renvoie à [23].

Proposition 3.1. Soit G un groupe (localement compact et dénombrable à l'infini) agissant sur un espace mesuré (X, m) , avec m sigma-finie. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable essentiellement invariante. Alors il existe une fonction mesurable invariante g qui coïncide presque partout avec f .

A l'aide de la proposition précédente, on peut démontrer le résultat suivant, qui est une caractérisation très utile de l'ergodicité d'une action. En effet, cela ramène l'étude de l'ergodicité à l'étude des fonctions constantes sur les orbites et très souvent sous des conditions peu contraignantes, on peut utiliser des résultats classiques d'analyse pour démontrer qu'une telle fonction est constante (essentiellement).

Proposition 3.2. Soit G un groupe localement compact et dénombrable à l'infini agissant sur un espace mesuré (X, m) , avec m sigma-finie. Alors l'action de G est ergodique si et seulement si toute fonction mesurable essentiellement invariante est essentiellement constante.

Démonstration. Supposons que l'action est ergodique et soit f essentiellement invariante. Par la proposition précédente, on peut même supposer que f est G -invariante. Posons

$$A(k, n) = \{x \in X \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}.$$

Par ergodicité, chaque $A(k, n)$ est de mesure pleine ou nulle. Mais à n fixé, les $A(k, n)$ forment une partition de X , donc il existe k_n tel que le complémentaire de $A(k_n, n)$ est de mesure nulle. Soit alors $A = \bigcap_n A(k_n, n)$. Alors A est un ensemble de mesure pleine dans X et de plus f est constante sur A . Donc f est constante presque partout. Supposons maintenant que toute fonction essentiellement invariante est constante (presque partout). Si A est un ensemble G -invariant, 1_A est essentiellement G -invariante, donc constante presque partout. Donc A ou $X - A$ est de mesure pleine. \square

Définition 3.5. Soit H un espace de Hilbert et $U(H)$ l'ensemble des opérateurs unitaires sur H . Une représentation unitaire de G dans H est un morphisme $\pi : G \rightarrow U(H)$ tel que l'application $g \rightarrow \pi(g)f$ est continue pour tout $f \in H$.

Pour une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $g \in G$ on définit $T_g f(x) = f(g^{-1}x)$. Si l'action de G préserve la mesure, $T_g : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ est un opérateur unitaire et l'application $g \rightarrow T_g f$ est continue de $G \in L^2(X)$ pour tout $f \in L^2(X)$. Donc T est une représentation unitaire de G . Enfin, donnons un autre critère d'ergodicité très utile, permettant d'utiliser les résultats d'analyse de Fourier et la théorie des représentations unitaires :

Proposition 3.3 (Koopman). Une action d'un groupe G sur un espace de probabilité (X, m) qui préserve la mesure est ergodique si et seulement si les seules fonctions $f \in L^2(X, m)$ qui sont essentiellement invariantes sont les fonctions constantes.

Démonstration. Il est clair que ceci équivaut au critère précédent. Signalons toutefois que si on ne suppose plus que la mesure m est finie, le résultat tombe en défaut. Le lecteur se

convaincra facilement en considérant l'action de \mathbb{Z} par translations sur \mathbb{R} : il est évident que l'action n'est pas ergodique (l'union des intervalles $[n, n + 1/2]$ est un ensemble invariant), mais que toute fonction de carré intégrable et 1 périodique est nulle. \square

Définition 3.6. Soit (X, m) un espace de probabilité et soit ϕ un flot agissant sur X en préservant la mesure. L'action est dite mélangeante si pour toute paire (A, B) d'ensembles mesurables on a $\lim_{t \rightarrow \infty} m(\phi_t(A) \cap B) = m(A)m(B)$.

Il n'est pas difficile d'observer que cette définition est équivalente à la propriété suivante :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \langle T_g(f), h \rangle = \langle f, 1 \rangle \cdot \langle 1, h \rangle$$

pour toutes les fonctions $f, h \in L^2(X)$ (on dit qu'une suite g_n de G tend vers ∞ si tout compact de G contient seulement un nombre fini de g_i). Ceci est un argument standard de densité de fonctions étagées dans $L^2(X)$. Observons aussi que le caractère mélangeant est plus fort que l'ergodicité : si $\langle f, 1 \rangle = 0$ et f est G invariante, alors

$$\|f\|^2 = \lim_{g \rightarrow \infty} \langle T_g(f), f \rangle = 0,$$

donc f est nulle et on peut conclure par le théorème de Koopman.

Définition 3.7. Soit G un groupe. Une mesure de Haar sur G est une mesure de Radon non nulle μ_G , invariante par translations à gauche.

Un résultat classique montre l'existence d'une telle mesure sur tout groupe localement compact, unique à une constante multiplicative près. On renvoie aux chapitres d'intégration de Bourbaki pour une démonstration. Le résultat fondamental pour l'étude des actions sur les espaces mesurables est le théorème ergodique de Birkhoff-Khinchine, qui donne un résultat de distribution dans un cadre très général.

Théorème ergodique. Soit ϕ_t un flot préservant la mesure sur un espace de probabilité (X, m) et soit $f \in L^1(X, m)$. Alors, pour presque tout $x \in X$, il existe

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_t x) dt = f^*(x).$$

De plus, $f^* \in L^1(X, m)$. L'action du flot est ergodique si et seulement si

$$f^* = \int_X f dm.$$

On admettra ce résultat classique (dont la démonstration n'a rien d'évident). Le lecteur intéressé peut trouver la démonstration dans tout livre de théorie ergodique. On renvoie par exemple à Bourbaki pour une excellente démonstration. Remarquer que pour démontrer le caractère ergodique d'une action il suffit de démontrer l'égalité dans l'énoncé du théorème de Birkhoff pour f dans un ensemble dense de $L^1(X, m)$.

3.2 Ergodicité du flot horocyclique, mélange du flot géodésique

Le but de cette section est de démontrer quelques résultats élémentaires concernant la dynamique des flots horocyclique et géodésique. Plus précisément, on montrera que le flot géodésique est mélangeant et que le flot horocyclique est ergodique (on peut montrer aussi que ce flot est mélangeant, pratiquement en suivant la démonstration qu'on présente ici pour le flot géodésique, mais on n'aura pas besoin de ce résultat). Il s'agit essentiellement de résultats connus depuis les années 1930, avec les théorèmes de Hopf et Hedlund [18] [20]. Ces propriétés dynamiques s'avèrent tout à fait essentielles dans la démonstration du théorème de Ratner, que ce soit suivant l'approche de Ratner (qui utilise l'ergodicité du flot horocyclique) ou celui de Babillot (pour lequel on a besoin du caractère mélangeant du flot géodésique). Signalons d'ailleurs que le mélange du flot géodésique peut être très efficace dans les problèmes de comptage de points entiers dans des boules hyperboliques, comme le montre le théorème suivant, dont la présentation est inspiré de [3] :

Théorème 3.1 (Eskin-Mc. Mullen). *Il existe une constante C telle que le nombre de 4-uplets (a, b, c, d) d'entiers tels que $ad - bc = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq T^2$ est équivalent à CT^2 pour $T \rightarrow \infty$.*

Le plan de cet mini-section est le suivant : à partir du lemme de Mautner (qui dans ce contexte a une démonstration tout à fait élémentaire) on démontre le théorème de Hopf qui fournit l'ergodicité du flot géodésique. On poursuit l'approche de Hedlund, qui déduit le caractère ergodique du flot horocyclique du théorème de Hopf et du lemme de Mautner. Enfin, toujours suivant Hedlund, on montre que l'ergodicité du flot horocyclique implique le mélange du flot géodésique. On finit par une application de ces résultats, la démonstration du théorème 3.1. Observons que si Γ est un réseau de G alors $X = \Gamma \backslash G$ devient un espace mesuré muni de la mesure finie G -invariante induite par une mesure de Haar sur G .

Théorème de Hopf. *Le flot géodésique sur $X = \Gamma \backslash G$ est ergodique pour tout réseau Γ de $G = SL_2(\mathbb{R})$.*

Lemme de Mautner. *Si $g, h \in SL_2(\mathbb{R})$ satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n h g^{-n} = I_2$, alors tout $f \in L^2(X)$ fixée par T_g est aussi fixée par T_h .*

Démonstration. Comme T_g, T_h sont des opérateurs unitaires, on a

$$\|T_h f - f\| = \|T_h T_{g^{-n}} f - T_{g^{-n}} f\| = \|T_{g^n} T_h T_{g^{-n}} f - f\|.$$

La continuité de $g \rightarrow T_g f$ et l'hypothèse sur g, h assurent en faisant $n \rightarrow \infty$ que

$$\|T_h f - f\| = 0.$$

Donc f est fixée par T_h . □

Démonstration du théorème de Hopf. Soit f appartenant à $L^2(X)$ telle que $T_a f = f$ pour tout $a \in A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$. Observons que si $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n u_s g^{-n} = I_2 \text{ si } 0 < a < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g^n h_b g^{-n} = I_2 \text{ si } a > 1.$$

Le lemme de Mautner entraîne que f est fixée par T_{u_s} et T_{h_b} . Donc f est fixée par T_g pour tout $g \in SL_2(\mathbb{R})$, car A, U, H engendrent G . Donc f est constante. Le théorème de Koopman montre alors que l'action du flot géodésique est ergodique et finit la démonstration. \square

Nous renvoyons à une excellente présentation des résultats qui suivent dans [7], qui d'ailleurs est une synthèse tout à fait remarquable des résultats concernant les espaces homogènes et leur dynamique.

Théorème 3.2 (Hedlund, ergodicité du flot horocyclique). *Pour tout réseau Γ de G , l'action du flot horocyclique sur $X = \Gamma \backslash G$ est ergodique.*

Démonstration. Soit f appartenant à $L^2(X)$ une fonction invariante par U . On va montrer que f est invariante sous l'action du flot géodésique. Une application du lemme de Mautner entraînera alors que f est invariante sous H aussi et le même argument que celui dans le théorème de Hopf nous donnera l'ergodicité. Fixons alors $a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ un élément de A et posons $g_n = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 1/n & 0 \end{pmatrix}$. Si on définit $\phi(g) = \langle T_g f, f \rangle$, alors $\phi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(g_n)$, car

$$u_{\alpha n} g_n u_{\frac{n}{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1/n & \alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, f est invariante sous U , donc ϕ est constante sur les doubles classes modulo U et donc, comme g_n est indépendant de a , on peut conclure que ϕ est constante sur A . En particulier $\langle T_a f, f \rangle = \|f\|^2$ pour tout $a \in A$ (car $\phi(a) = \phi(I_2)$). Comme T_a est unitaire, $\|T_a f\| = \|f\|$ et donc l'égalité précédente est une égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En particulier, $T_a f = c f$ pour une constante c . Il suffit de revenir à la relation $\langle T_a f, f \rangle = \|f\|^2$ pour s'apercevoir que $c = 1$. Donc $T_a f = f$ pour $a \in A$. Cela montre bien que f est invariante sous A et permet de conclure. \square

Théorème 3.3 (Hedlund). *Soit Γ un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$ et soit μ une mesure de probabilité sur X qui est invariante sous l'action des flots horocyclique et géodésique. Alors le flot (X, A, μ) est mélangeant si le flot (X, U, μ) est ergodique.*

Démonstration. Clairement, il suffit de montrer que si f, g sont bornées et uniformément continues sur X , f étant de moyenne nulle pour la mesure μ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \int_X f(x a_{-t}) g(x) d\mu(x) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta < 1$ tel que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$. Soit

$$S_f(y, t) = \frac{1}{t} \cdot \int_X f(y u_s) ds.$$

Les théorèmes de Birkhoff-Khinchine et Egoroff fournissent $t_0 > 1$ et un ensemble Y tel que $\mu(Y) > 1 - \varepsilon$ et $|S_f(y, t)| < \varepsilon$ pour tout $t > t_0$ et y dans Y . Observons alors que pour $e^{2t} \delta > t_0$ on peut écrire grâce aux relations de commutation et au fait que μ est U invariante

$$I(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_X g(x u_s) f(x u_s a_{-t}) d\mu(x) ds$$

$$= \int_X \frac{1}{\delta} \int_0^\delta g(xu_s) f(xu_s a_{-t}) ds d\mu(x).$$

L'uniforme continuité de g assure que la dernière quantité s'écrit

$$\int_X \frac{g(x)}{\delta} \cdot \int_0^\delta f(xa_{-t} u_{e^{2t}s}) ds d\mu(x) + O(\varepsilon \cdot \|f\|_\infty).$$

Un changement de variable dans l'intégrale montre qu'on peut encore écrire

$$I(t) = \int_X g(x) S_f(xa_{-t}, \delta \cdot e^{2t}) d\mu(x) + O(\varepsilon).$$

Dans la dernière intégrale, la contribution des x tels que xa_{-t} ne soit pas dans Y est majorée en valeur absolue par $\varepsilon \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, donc

$$I(t) = \int_{Y a_t} g(x) S_f(xa_{-t}, e^{2t} \delta) d\mu(x) + O(\varepsilon).$$

Enfin, par construction de Y , la dernière intégrale est un $O(\varepsilon)$. Cela montre bien que $I(t)$ tend vers 0. \square

3.3 Démonstration du théorème de Eskin-Mc. Mullen

Montrons maintenant le théorème de comptage. Pour cela on va utiliser une idée présente dans la thèse de Margulis et présentée dans une situation beaucoup plus générale dans [3]

Théorème 3.4 (équi-distribution des sphères). *La projection du cercle hyperbolique $C_R = \{z \in \mathbb{H} | d(z, i) = R\}$ devient équi-distribuée quand $R \rightarrow \infty$, i.e si f appartient à $C_c(SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H})$ alors*

$$\frac{1}{l(C_R)} \int_{C_R} f \rightarrow \int_{SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} f(z) dx dy / y^2,$$

$l(C_R)$ étant la longueur du cercle C_R , vu dans $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$.

Démonstration. Considérons la petite déformation de $K = SO(2)$ dans G :

$$V(\delta) = K \cdot \{a_s | |s| \leq \delta\} \cdot \{u_t | |t| \leq \delta\}$$

et fixons f comme dans l'énoncé du théorème. Soit f_1 son relevé à $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash G$ défini par $f_1(g) = f(g.i)$. Le caractère mélangeant du flot géodésique assure que pour $s \rightarrow \infty$ on a

$$\frac{1}{Vol(V(\delta))} \cdot \int_{V(\delta)a_s} f_1 \rightarrow \int_{SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})} f_1 = \int_{SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{f(z) dx dy}{y^2}.$$

D'autre part,

$$\int_{V(\delta)a_R} f_1 = \int_{g \in V(\delta)} f(ga_R.i).$$

Mais si g appartient à $V(\delta)$ on a $g = ku_t a_s$ avec $|s|, |t| \leq \delta$ et donc $d(ga_R.i, ka_R.i) = d(u_t a_{s+R}.i, a_R.i) = O(\delta)$, donc $ga_R.i$ est à δ près de C_R . Si on observe de plus que la forme linéaire

$$f \rightarrow \frac{1}{Vol(V(\delta))} \int_{g \in V(\delta)} f(ga_R.i)$$

définit une mesure de probabilité sur \mathbb{H} , clairement invariante sous $K = SO(2)$ et dont le support est inclus dans un voisinage de C_R , il devient clair que

$$\frac{1}{\text{Vol}(V(\delta))} \int_{V(\delta)a_R} f_1 \rightarrow \frac{1}{l(C_R)} \int_{C_R} f.$$

En combinant ces deux relations, on obtient bien le théorème d'équi-distribution des sphères. \square

Montrons comment à partir de ce théorème on peut démontrer le théorème de comptage.

Fin de la démonstration du théorème de comptage. Soit D_R le disque hyperbolique de rayon R centre en i et soit $N(R)$ le nombre d'éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ contenus dans D_R , c'est-à-dire le nombre de matrices g dans $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $d(g.i, i) \leq R$. Un calcul facile montre que $l(C_R)$ est équivalent à l'aire de D_R et que les deux sont équivalents à Ce^R pour une constante C pour $R \rightarrow \infty$. Soit maintenant f_0 une approximation de l'unité autour de i , c'est-à-dire une fonction positive d'intégrale égale à 1, dont le support est dans un ε -voisinage de i . Posons

$$f(z) = \sum_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})} f_0(\gamma.z).$$

Par ce qu'on vient de montrer,

$$\frac{1}{\text{aire}(D_R)} \int_{D_R} f(z) dx dy / y^2 \rightarrow \int_{SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} f = 1.$$

D'autre part,

$$\int_{D_R} f = \sum_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})} \int_{D_R} f_0(\gamma.z)$$

et donc cette quantité est comprise entre $N(R)(R + \varepsilon)$ et $N(R)(R - \varepsilon)$. En mettant bout à bout tous ces arguments, on obtient bien que pour une constante C on a $N(R) \approx Ce^R$.

Il ne reste plus qu'à observer que pour une matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $d(g.i, i) = 2 \ln r$ avec $r^2 + \frac{1}{r^2} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (petit calcul facile laissé au lecteur) et on peut conclure quant à la démonstration du théorème de comptage. \square

3.4 Esquisse de la démonstration de la conjecture de Raghunathan

Le but de cette partie est de présenter sans trop de détails techniques les idées de la démonstration de Ratner [9]. Ceci permettra au lecteur d'avoir un fil directeur de cette démonstration, assez longue et compliquée. Toutes les affirmations faites dans cette partie seront démontrées dans les sections suivantes. Soit donc Γ un réseau de $G = SL(2, \mathbb{R})$ et μ une mesure de probabilité ergodique pour l'action du flot horocyclique. Soit m la mesure (de probabilité) de Haar sur $X = \Gamma \backslash G$. Soit enfin un point x d'orbite non périodique sous l'action de U et une fonction uniformément continue bornée f sur X . Le but est de démontrer que pour une certaine suite $t_n \rightarrow \infty$ on a :

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(xu_t) dt = \int_X f dm. \quad (3)$$

Comme on le verra dans la section suivante, ceci entraîne facilement la conjecture de Raghunathan pour les mesures ergodiques sous le flot horocyclique (modulo une caractérisation des points dont l'orbite est périodique, qu'on trouvera dans le lemme 3.3).

Pour démontrer (3), commençons par quelques notations, qui seront utilisées tout au long de la démonstration :

- la moyenne temporelle de f le long de l'orbite de x est

$$S_f(x, t) = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t f(xu_s) ds.$$

- un rectangle autour de $x \in G$ (dans la suite, on identifiera très souvent $x \in G$ et son image dans X) sera un ensemble de la forme

$$W(x, \delta) = \{xa_\tau h_b \mid |b| < \delta, |\tau| < \delta\}.$$

- une boîte $V(x, \delta)$ autour de x sera définie comme l'union des orbites des points se trouvant dans le rectangle $W(x, \delta)$, i.e

$$V(x, \delta) = \bigcup_{y \in W(x, \delta)} \{yu_s \mid 0 \leq s \leq \alpha(y, 1)\},$$

où $\alpha(y, s)$ est le temps que y met pour atteindre la feuille $xu_s AH$ (voir la figure 7).

Il est bien clair qu'une telle boîte est d'intérieur non vide et donc a une mesure de Haar (dans $SL(2, \mathbb{R})$) strictement positive. Simplement en regardant le dessin, on observe que pour tout $\delta < \delta_0$ assez petit, la partie de la trajectoire de tout point du rectangle $W(x, \delta)$ jusqu'au moment $t = 1$ est incluse dans le prisme de la figure 7. Elle va couper $W(xu_1, 10\delta)$ en un instant $\alpha(y, 1)$ et plus généralement elle coupe après l'instant $0 \leq s \leq 1$ la feuille $W(xu_s, 10\delta)$. Le calcul montre que l'application $yu_{\alpha(y, s)} \mapsto xu_s$ ne change pas notablement les longueurs calculées sur les trajectoires. Sur une durée courte les trajectoires sont donc très semblables !

Mais l'intérêt est de suivre les trajectoires sur une durée de l'ordre de t pour comparer les moyennes de f sur les deux trajectoires. Malheureusement, si l'on suit sur une telle durée, il faut énormément élargir le rectangle autour de xu_t (voir figure 9). On perd ainsi l'information, car à partir d'un moment les trajectoires ne se ressemblent plus ! On peut s'en sortir en se servant du flot géodésique : il suffit de faire une conjugaison par a_τ , avec $\tau = \frac{\ln(t)}{2}$. Ainsi, les rectangles gardent leurs largeurs, (au moins dans la direction U) les longueurs sur les trajectoires restent presque les mêmes et on peut les suivre jusqu'à l'instant t . Par conséquent, on va utiliser l'application $x \mapsto xa_\tau$ pour changer le paysage et on va poser

$$W(x, \delta, t) = W(xa_\tau, \delta)a_{-\tau} = \left\{ xa_\tau h_b \mid |\tau| < \delta, |h| < \frac{\delta}{t} \right\},$$

soit encore un rectangle autour de x (comme on s'y attendait...). De même, on définit

$$\alpha_t(y, s) = t\alpha\left(ya_\tau, \frac{s}{t}\right) \text{ avec } 0 \leq s \leq t.$$

Enfin, pour utilisation future, posons

$$V_s(g, \delta, t) = \{yu_{\alpha_t(y, w)} \mid y \in W(g, \delta, t), 0 \leq w \leq s\}$$

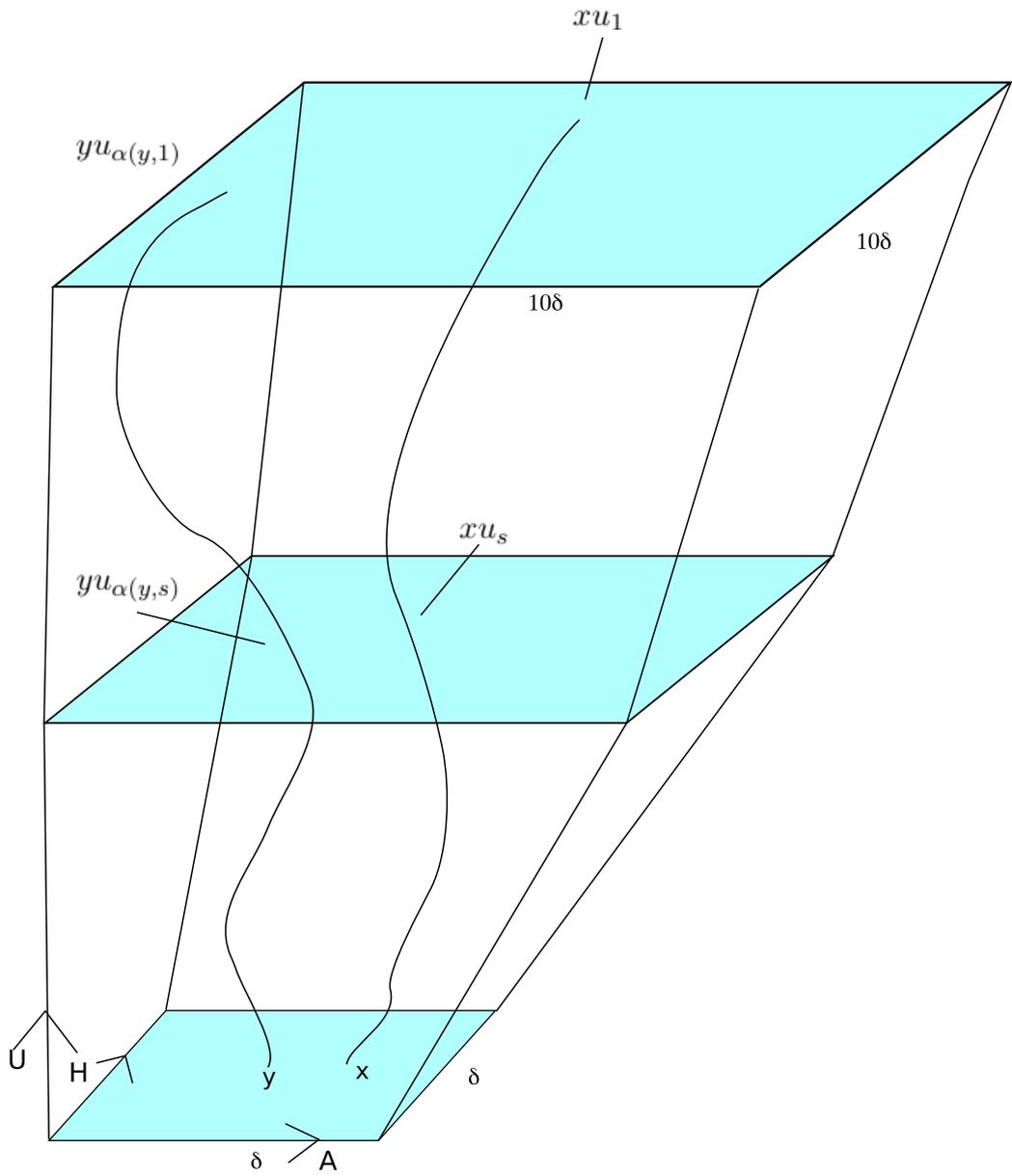


FIG. 7 – Proximité des trajectoires sur de courtes durées

si $0 \leq s \leq t$. L'avantage, c'est que l'application

$$\psi_s(y, t, \delta) : yu_{\alpha_t(y,s)} \mapsto zu_{\alpha_t(y,s)}$$

ne modifie presque pas les mesures le long des trajectoires, au sens

$$\left| \frac{\chi(B)}{\chi(\psi_s(B))} - 1 \right| \ll 1$$

pour tout B inclus dans la trajectoire de y , χ étant la mesure de Lebesgue le long de chaque trajectoire. Encore plus important, tout sera uniforme en t et $y, z \in W(x, \delta, t)$. C'est ceci qui permet de montrer que la moyenne de f sur l'orbite de y incluse dans $V_s(x, \delta, t)$ ne diffère pas essentiellement de celle sur l'orbite de z : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ ne dépendant que de f et ε tel que pour tout $t \geq 1$ et tous $y, z \in W(x, \delta, t)$ on ait $|S_f(y, \alpha(y, t)) - S_f(z, \alpha(z, t))| < \varepsilon$.

Le théorème de non divergence des trajectoires sous le flot géodésique (proposition 2.6) montre qu'il existe un compact K de X , une suite τ_n tendant vers infini et telle que $xa_{\tau_n} \in K$ pour tout n . Ceci nous fournit un candidat pour la suite t_n dans (3). On prendra $t_n = e^{2\tau_n}$ et on montrera que pour cette suite on a bien (3) pour toute f uniformément continue et bornée sur X .

Soit $g \in G$ tel que $\Gamma g = x$ et regardons les boîtes $V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n)$ autour de g . Elles sont obtenues à partir des boîtes autour de $g_n = ga_{\tau_n}$ par la conjugaison par le flot géodésique décrite précédemment. Grace au fait que les xa_{τ_n} restent dans un compact, on peut trouver $\eta > 0$ tel que la projection de chaque telle boîte dans X soit de volume plus grand que η . D'autre part, l'ergodicité du flot horocyclique nous assure qu'il existe un ensemble E de mesure plus grande que $1 - \eta$ tel que les moyennes de f le long des orbites de points de E sont uniformément proches de $\int_X f dm$. Le choix de η montre qu'il existe des points de $V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n)$ qui sont aussi dans E . Les orbites de tels points sont équi-distribuées (au sens décrit avant : proche de la moyenne de f de long de X) et les moyennes de f le long de telles orbites sont proches de la moyenne de f le long de l'orbite de x , par l'équi-continuité des moyennes démontrée dans le paragraphe précédent. Un petit calcul montre alors que $S_f(x, t_n)$ reste aussi proche de $\int_X f dm$ et permet de finir la démonstration du théorème de classification des mesures.

3.5 La famille de fonctions $\alpha_t(y, s)$

On démontre ici quelques résultats quantitatifs concernant le temps de voyage $\alpha_t(y, s)$ d'un point y proche de x . A l'aide de ces estimations, on peut démontrer un résultat d'équicontinuité des trajectoires, qui est l'objet de la proposition 3.4, le résultat principal de cette sous-section.

Supposons que s n'est pas trop important (même $0 \leq s \leq 1$) et considérons le rectangle $W(xu_s, 10\delta)$. Intuitivement, il est clair que si l'on part d'un point y très proche de x (au sens $y \in W(x, \delta)$), au bout d'un certain temps T , on va tomber dans le piège $W(xu_s, 10\delta)$. On va appeler ce temps $T = \alpha(y, s)$. Il est aussi clair que si δ est suffisamment petit, T ne diffère pas trop de s , le temps que x met pour atteindre la même feuille. Pourtant, à cause de la divergence des trajectoires, on aura besoin de calculs explicites de $\alpha(y, s)$ et de la divergence transversale (i.e : dans les directions A et H) induites par le voyage de y .

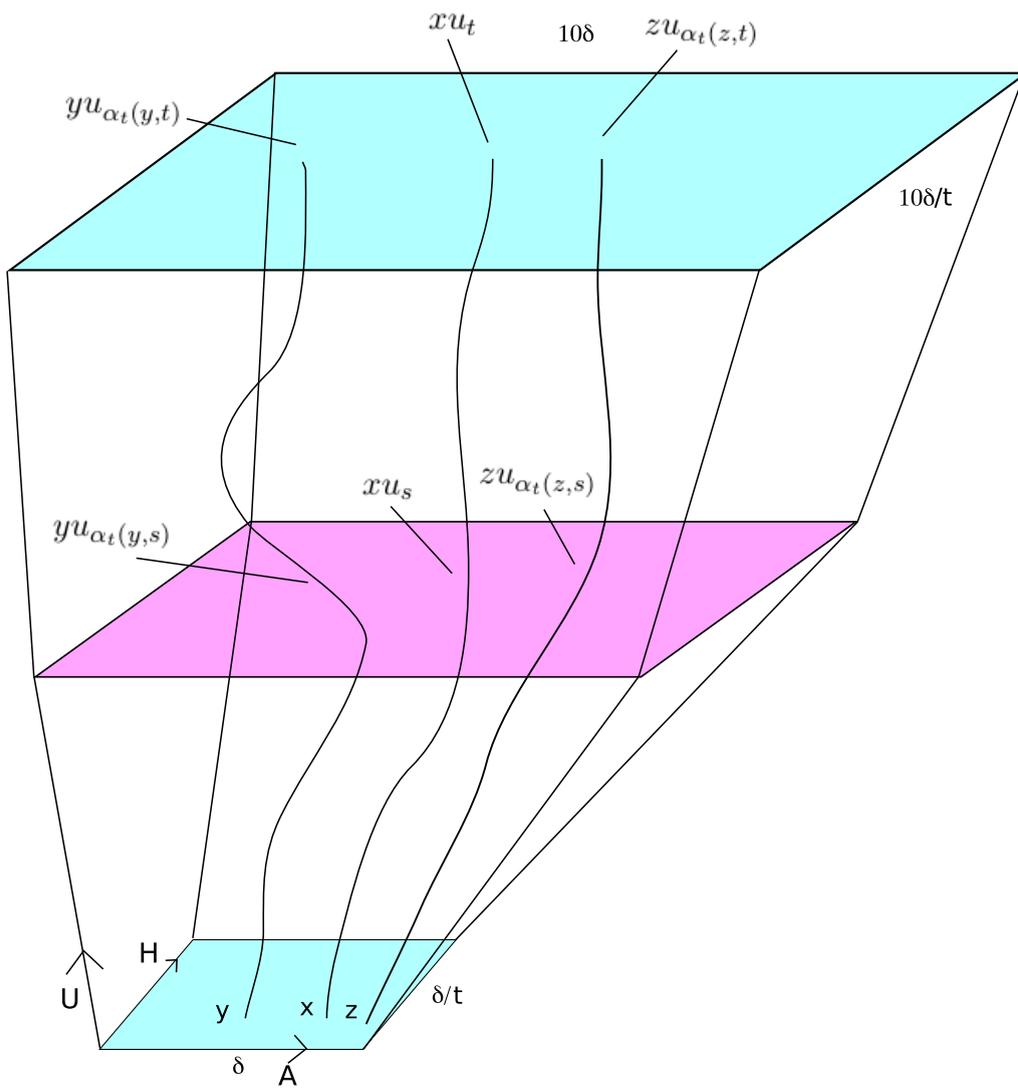


FIG. 8 – Figure 7 après conjugaison par le flot géodésique

Dans cette région, les moyennes de f sont presque égales

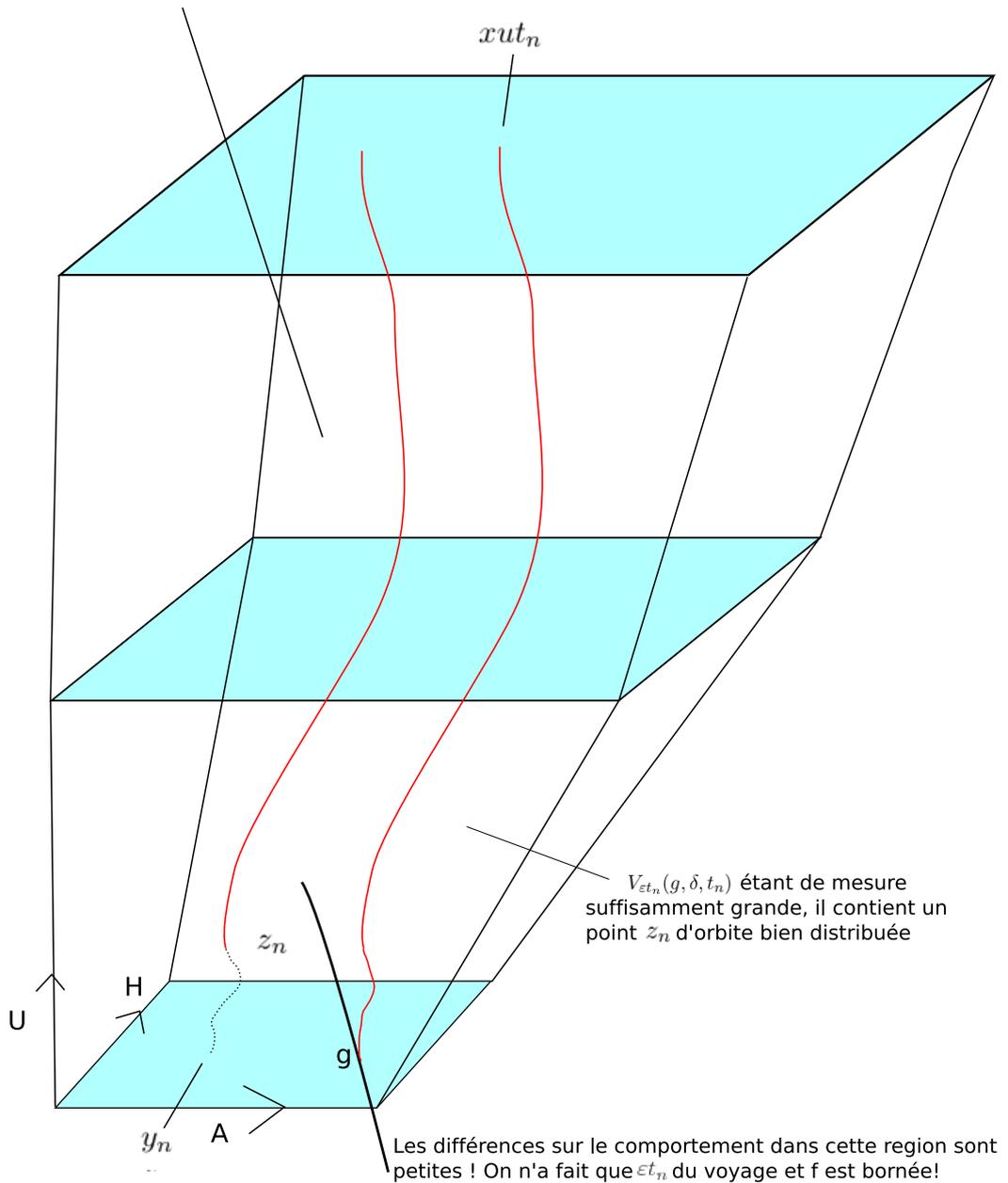


FIG. 9 – Point équidistribué proche du point de départ

La condition que le point $y = xa_\tau h_b \in W(x, \delta)$ touche la feuille $xu_s AH$ après le temps $\alpha(y, s)$ est

$$yu_{\alpha(y,s)} = xu_s a_{\tau(y,s)} h_{b(y,s)}$$

pour certains $\tau(y, s), b(y, s)$. Un calcul explicite montre qu'en fait la relation précédente équivaut à :

$$\alpha(y, s) = \frac{s}{e^{2\tau} - sb}, \tau(y, s) = \ln(e^\tau - sbe^{-\tau}), b(y, s) = b(1 - sbe^{-2\tau}).$$

On voit déjà dans cette relation que nos prévisions étaient justes : $\alpha(y, s) \approx s$ si y est très proche de x (i.e : $|\tau|$ et $|b|$ sont petits). On a expliqué dans l'esquisse de la preuve que cela ne fournit pas la meilleure solution et qu'il vaut mieux conjuguer par le flot géodésique. En regardant les formules introduites dans l'esquisse de la démonstration, on s'aperçoit que du point de vue formel, les modifications se "réduisent" à remplacer b par b/t , car si l'on pose $r = \frac{\ln t}{2}$, l'image du rectangle $W(x, \delta)$ par le flot géodésique devient le rectangle

$$W(x, \delta, t) = W(xa_r, \delta) a_{-r} = \left\{ xa_\tau h_b \mid |\tau| < \delta, |b| < \frac{\delta}{t} \right\},$$

la fonction α devient $\alpha_t(y, s) = t\alpha(ya_r, \frac{s}{t})$ et la boîte $V(x, \delta)$ se transforme en

$$V(x, \delta, t) = V(xa_r, \delta) a_{-r}.$$

Montrons à présent qu'on avait bien prévu l'arrivée de y dans le piège $W(xu_s, 10\delta, t)$ pour δ assez petit :

Lemme 3.1. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tous $t > 0, s \in [0, t], \delta < \delta_0$ et $y \in W(x, \delta, t)$, on ait

$$yu_{\alpha_t(y,s)} \in W(xu_s, 10\delta, t).$$

Démonstration. En utilisant la définition de $\alpha_t(y, s)$ et les formules obtenues avant pour $\alpha(y, s), \tau(y, s), b(y, s)$, on obtient facilement les formules suivantes : si

$$y = xa_\tau h_{\frac{b}{t}} \in W(x, \delta, t),$$

alors

$$\alpha_t(y, s) = \frac{s}{e^{2\tau} - \frac{sb}{t}}, b_t(y, s) = \ln\left(e^\tau - \frac{sb}{t}e^{-\tau}\right), \tau_t(y, s) = b\left(1 - \frac{sb}{t}e^{-2\tau}\right).$$

On a clairement

$$\ln\left(e^\tau - \frac{sb}{t}e^{-\tau}\right) \leq \ln\left(e^\delta + \delta e^\delta\right) \leq 2\delta$$

et

$$\left|\frac{b}{t}\left(1 - \frac{sb}{t}e^{-2\tau}\right)\right| \leq \frac{\delta}{t}(1 + \delta e^{2\delta}) \leq \frac{10\delta}{t}$$

si $\delta < \frac{1}{2}$. On peut donc prendre $\delta_0 = \frac{1}{2}$. □

Dans la suite on note $\alpha(y, t) = \alpha_t(y, t)$. Le résultat suivant est essentiel dans la démonstration de la proposition qui suit :

Lemme 3.2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $0 < \delta \leq \delta(\varepsilon)$, on a $|\frac{\partial}{\partial s}\alpha_t(y, s) - 1| < \varepsilon$ et cela uniformément en $y \in W(x, \delta, t)$, $s \in]0, t]$ et $t > 0$. De plus, $|\frac{\alpha(y, t)}{t} - 1| < \varepsilon$, pour tout $t > 0$ et tout $y \in W(x, \delta, t)$.

Démonstration. En effet, si $y = xa_\tau h_{\frac{b}{t}}$ alors

$$\frac{\partial}{\partial s}\alpha_t(y, s) = \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau} - \frac{s}{t}b)^2}.$$

On a alors

$$\left| \frac{\partial}{\partial s}\alpha_t(y, s) - 1 \right| \leq \frac{1}{(e^{-2\delta} - \delta)^2} (e^{4\delta} - e^{2\delta} + 2\delta e^{2\delta} + \delta^2) = \psi(\delta).$$

Comme $\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi(\delta) = 0$, l'existence de $\delta(\varepsilon)$ est maintenant claire. De plus, l'inégalité $|\frac{\alpha(y, t)}{t} - 1| < \varepsilon$ est triviale, car

$$t\varepsilon > \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial s}\alpha_t(y, s) - 1 \right| ds \geq |\alpha_t(y, t) - t|$$

□

On peut maintenant démontrer la première étape essentielle du théorème de Ratner :

Proposition 3.4. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue bornée, il existe $\delta(\varepsilon, f) > 0$ tel que

$$|S_f(y, \alpha(y, t)) - S_f(x, t)| < \varepsilon,$$

et cela pour tout $t \geq 1$, $\delta \leq \delta(\varepsilon, f)$ et $y \in W(x, \delta, t)$

Démonstration. Observons que $s \mapsto \alpha_t(y, s)$ est un C^1 difféomorphisme à t, y fixés. Donc par un changement de variable on a :

$$S_f(y, \alpha(y, t)) = \frac{1}{\alpha(y, t)} \int_0^t f(yu_{\alpha_t(y, s)}) \frac{\partial}{\partial s}\alpha_t(y, s) ds$$

Mais si $\delta < \delta(\varepsilon)$ (donné par le lemme 3.2) on a uniformément

$$|f(yu_{\alpha_t(y, s)}) \frac{\partial}{\partial s}\alpha_t(y, s) - f(yu_{\alpha_t(y, s)})| \leq \varepsilon \|f\|_\infty,$$

donc, comme $|\frac{\alpha(y, t)}{t} - 1| < \varepsilon$, on a aussi

$$|S_f(y, \alpha(y, t)) - \frac{1}{\alpha(y, t)} \int_0^t f(yu_{\alpha_t(y, s)}) ds| \leq \frac{t\|f\|_\infty}{\alpha(y, t)} \varepsilon \leq \frac{\varepsilon \cdot \|f\|_\infty}{1 - \varepsilon}$$

D'autre part,

$$\left| \frac{1}{\alpha(y, t)} \int_0^t f(yu_{\alpha_t(y, s)}) ds - \frac{1}{t} \int_0^t f(yu_{\alpha_t(y, s)}) ds \right| \leq$$

$$\left| \frac{1}{\alpha(y, t)} - \frac{1}{t} \right| \|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \|f\|_\infty.$$

Enfin, il reste à montrer que $\frac{1}{t} \int_0^t f(yu_{\alpha_t(y,s)}) ds$ est proche de $\frac{1}{t} \int_0^t f(xu_s) ds$ si δ est petit. Par uniforme continuité de f , il existe δ_1 tel que si $\delta < \delta_1$ et $y, z \in W(x, \delta)$, alors

$$|f(z) - f(y)| < \varepsilon.$$

Par le lemme 3.1 il existe δ_0 tel que $yu_{\alpha_t(y,s)} \in W(xu_s, \delta_1, t) \subset W(xu_s, \delta_1)$ (si $t \geq 1$) pour tout $s \in [0, t]$, $t \geq 1$ et $y \in W(x, \delta_0, t)$. Donc

$$|f(yu_{\alpha_t(y,s)}) - f(xu_s)| < \varepsilon$$

pour $t \geq 1$, $y \in W(x, \delta_0, t)$. Donc

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(yu_{\alpha_t(y,s)}) ds - \frac{1}{t} \int_0^t f(xu_s) ds \right| < \varepsilon$$

Les trois inégalités précédentes montrent bien qu'on a

$$|S_f(y, \alpha(y, t)) - S_f(x, t)| < \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} (1 + \|f\|_\infty)$$

dès que $t \geq 1$, $\delta < \min(\delta_0, \delta_1)$, $y \in W(x, \delta, t)$. Ceci finit la démonstration de la proposition. \square

3.6 Fin de la démonstration de la conjecture de Raghunathan pour les mesures

Soit Γ un réseau de $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $X = \Gamma \backslash G$. Soit m la mesure de probabilité G -invariante sur X .

Théorème 3.5. *Supposons que pour tout $x \in X$ non périodique et pour toute fonction $f \in C_c(X)$ il existe une suite $t_n \rightarrow \infty$ avec $S_f(x, t_n) \rightarrow \int_X f dm$. Alors toute mesure de probabilité sur X ergodique sous le flot horocyclique, soit est la mesure de Haar m , soit son support est sur une orbite périodique.*

Démonstration. Soit μ une telle mesure et soit $f \in C_c(X)$. Par le théorème de Birkhoff, pour μ -presque tout $x \in X$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_f(x, t) = \int_X f d\mu.$$

\square

Lemme 3.3 (points périodiques). Soient x_1, x_2, \dots, x_n les pointes de Γ et soient $g_i \in G$ tels que $g_i \cdot \infty = x_i$. L'ensemble de points x de X dont l'orbite sous le flot horocyclique est périodique est exactement $Per = \bigcup_{i=1}^n \Gamma g_i A U$.

Démonstration. Soit $x = \Gamma g$ un point d'orbite périodique, donc $\exists t > 0$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $gu_t = \gamma g$. Mais alors $\gamma = gu_t g^{-1}$ est un élément parabolique de Γ fixant $g \cdot \infty$. Le théorème de structure des domaines fondamentaux nous fournit alors un i et un $\gamma' \in \Gamma$ tels que

$g.\infty = \gamma'.x_i = \gamma'g_i.\infty$. Donc $g_i^{-1}\gamma'^{-1}g$ fixe l'infini, donc c'est une matrice triangulaire T et $\gamma'^{-1}g = g_iT$. Ceci montre une implication. Pour la réciproque, soit $g = g_iT$ avec $T = a_\tau u_x$. Soit γ_i un élément parabolique de Γ fixant x_i , donc pour un certain t_0 on a $g_i^{-1}\gamma_i g_i = u_{t_0}$. Alors

$$\Gamma g_i T u_t = \Gamma g_i u_{te^{2\tau}} T = \Gamma g_i u_{t_0 + te^{2\tau}} T = \Gamma g_i T u_{t+t_0 e^{-2\tau}},$$

donc Γg est périodique.

Retournons maintenant à la démonstration du théorème. L'ensemble Per introduit dans le lemme est mesurable et clairement U invariant, donc il est de mesure pleine ou nulle. Si on est dans le premier cas, comme chaque orbite périodique est compacte, μ a son support sur une orbite périodique. Dans le second cas, la mesure de Per est nulle et alors l'ensemble des x pour lesquels

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_f(x, t) = \int_X f d\mu$$

contient sûrement un point non périodique x . On applique l'hypothèse du théorème à ce point et on conclut que $\int_X f dm = \int_X f d\mu$. Comme f a été quelconque, on peut conclure. \square

Dans la suite, on fixe un point x non périodique et f dans $C_c(X)$ uniformément continue sur G (pour simplifier, dans la suite on notera aussi f le relevé de f à G). Grace au théorème précédent, il suffit de construire une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(x, t_n) = \int_X f dm. \quad (4)$$

Comme expliqué dans l'esquisse de la démonstration, un candidat serait la suite $t_n = e^{2\tau_n}$, où τ_n est choisi tel que xa_{τ_n} reste dans un compact K de X (voir la proposition 2.6). La partie difficile (au moins du point de vue technique) est de montrer que pour cette suite on a bien (4). Commençons par un résultat simple :

Lemme 3.4. Soit f appartenant à $C_c(X)$, $t_n \rightarrow \infty$ et $\eta > 0$. Il existe un ensemble E avec $m(E) > 1 - \eta$ et tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|S_f(y, t_n) - \int_X f dm| < \varepsilon$ pour n assez grand, uniformément en $y \in E$.

Démonstration. Le théorème de Hedlund concernant l'ergodicité du flot horocylique combiné avec le théorème ergodique de Birkhoff nous donnent un ensemble B de mesure au moins $1 - \frac{\eta}{2}$ tel que $S_f(y, t_n) \rightarrow \int_X f dm$ simplement sur B . Le théorème d'Ergoroff nous assure qu'il existe un sous ensemble E de B de mesure au moins $1 - \eta$ sur lequel la convergence est uniforme. \square

Dans toute la suite, on fixe $\varepsilon > 0$ et $g \in G$ tel que $\Gamma g = x$. Soit π la projection canonique de G sur X . La compacité de K et le fait que Γ est discret permettent de choisir δ_2 tel que si $0 < \delta < \delta_2$ et si $\pi(u) \in K$, alors $\pi|_{W(u, \delta, 1)}$ est injective. De plus par la proposition 3.4, on peut choisir $\delta_3 < \delta_2$ tel que si $0 < \delta < \delta_3$ et si $y \in W(g, \delta, t)$ ($t \geq 1$) alors

$$|S_f(y, \alpha(y, t)) - S_f(x, t)| < \varepsilon.$$

Prenons $\delta = \frac{\delta_3}{2} > 0$.

Lemme 3.5. Avec les notations présentées dans l'esquisse de la démonstration,

$$\eta' = \inf_{\pi(z) \in K} m(\pi(V_\varepsilon(z, \delta, 1))) > 0.$$

Démonstration. Soit $\varphi(z) = m(\pi(V_\varepsilon(z, \delta, 1)))$. Comme m est régulière, φ est continue. La G -invariance de m montre de plus que φ est constante sur les classes à droite modulo Γ . Enfin, $V_\varepsilon(z, \delta, 1)$ est un voisinage de z et comme les ouverts ont des mesures de Haar strictement positives (ceci est un résultat classique concernant les mesures de Haar sur un groupe localement compact), on a $\varphi(z) > 0$. La compacité de K et les arguments antérieurs sont suffisants pour avoir $\eta' > 0$. \square

Soit E comme dans le lemme 3.4. L'énoncé suivant montre exactement ce qu'on avait prévu dans l'esquisse de la preuve : en coupant les trajectoires au niveau εt_n , on obtient des boîtes $V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n)$ de volumes suffisamment grands pour contenir au moins un élément de E .

Lemme 3.6. Il existe une suite s_n de $[0, \varepsilon t_n]$ telle que en posant $z_n = \pi(y_n)u_{\alpha_{t_n}(y_n, s_n)}$ pour un certain $y_n \in W(g, \delta, t_n)$, on ait $z_n \in E$.

Démonstration. Ceci est bien sûr équivalent à $\pi(V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n)) \cap E \neq \emptyset$. Comme $m(E) > 1 - \eta$, il suffit de vérifier que $m(\pi(V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n))) > \eta$ pour tout n . Or

$$V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n) = V_\varepsilon(ga_{\tau_n}, \delta, 1)a_{-\tau_n},$$

donc

$$m(\pi(V_{\varepsilon t_n}(g, \delta, t_n))) = m(\pi(V_\varepsilon(ga_{\tau_n}, \delta, 1))),$$

car m est G -invariante. Enfin, $\pi(ga_{\tau_n}) = xa_{\tau_n} \in K$, donc par le lemme précédent

$$m(\pi(V_\varepsilon(ga_{\tau_n}, \delta, 1))) > \eta.$$

\square

Sachant que z_n n'est pas très loin du point y_n (y_n a voyagé seulement εt_n secondes pour arriver en z_n) et que son orbite est proche de $\int_X f dm$ (car il est dans E), il est naturel de penser que $S_f(x, t_n)$ ne sera pas très différent de $\int_X f dm$. C'est précisément ce que le résultat suivant affirme.

Lemme 3.7. $|S_f(x, t_n) - \int_X f dm| < 4\varepsilon(1 + \|f\|_\infty)$.

Démonstration. La proposition 3.4 nous donne

$$|S_f(x, t_n) - S_f(\pi(y_n), \alpha(y_n, t_n))| \leq \varepsilon.$$

D'autre part,

$$|S_f(\pi(y_n), \alpha(y_n, t_n)) - \int_X f dm| \leq$$

$$|S_f(z_n, t_n) - \int_X f dm| + |S_f(\pi(y_n), t_n) - S_f(z_n, t_n)| + |S_f(\pi(y_n), \alpha(y_n, t_n)) - S_f(\pi(y_n), t_n)|,$$

donc

$$|S_f(\pi(y_n), \alpha(y_n, t_n)) - \int_X f dm| \leq 4\varepsilon + |S_f(\pi(y_n), t_n) - S_f(z_n, t_n)|.$$

Enfin, un changement de variable montre que

$$|S_f(\pi(y_n), t_n) - S_f(z_n, t_n)| \leq 2 \frac{\alpha_{t_n}(y_n, \varepsilon t_n)}{t_n} \|f\|_\infty \leq 4\varepsilon \|f\|_\infty.$$

Les trois inégalités précédentes mises ensemble montrent bien le résultat désiré. \square

Les étapes de l'esquisse de la démonstration étant rigoureusement démontrées, on peut (enfin !) affirmer que la conjecture de Raghunathan est démontrée pour $SL_2(\mathbb{R})$.

3.7 Démonstration de Babilot

On commence par établir une convergence ponctuelle d'une famille de fonctions. On démontrera après que cette famille est équi-continue. Cela permettra d'appliquer le théorème d'Ascoli pour terminer la démonstration. Cette approche est largement inspirée de [21] et [2].

Théorème 3.6 (Sarnak). *Soit Γ un réseau de $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $X = \Gamma \backslash G$. Soit $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi(xu_s a_{-t}) ds = \int_X \phi dm,$$

m étant la mesure de probabilité G -invariante sur X .

Démonstration. Le problème est de passer d'une intégrale sur $[0, 1]$ à une intégrale sur X . L'idée est de remplacer $\phi(xu_s a_{-t})$ par la "moyenne" de $\phi(xgu_s a_{-t})$ sur un voisinage V de I_2 . Cela permettra, via le théorème de Fubini, d'utiliser la propriété de mélange du flot géodésique. Admettons pour instant qu'on a construit une famille V_k de voisinages de I_2 et une famille de mesures de probabilité m_k sur V_k telles que :

1. $a_t V_k a_{-t} \subseteq V_k$ pour tout $t > 0$ et k ;
2. $\sup_{g \in V_k} d_G(I_2, g) \leq \delta_k$, avec δ_k choisi de sorte que $|\phi(x) - \phi(y)| < \frac{1}{k}$ si $d_G(x, y) \leq \delta_k$.
- 3.

$$\int_0^1 \int_{V_k} f(u_s g) ds dm_k(g) = \frac{1}{m(W_k)} \int_{W_k} f(x) dm(x)$$

pour toute fonction intégrable f . On a noté $W_k = \{u_s g | 0 \leq s \leq 1, g \in V_k\}$. Soit aussi, pour simplifier,

$$f_t(x) = \int_0^1 \phi(xu_s a_{-t}) ds.$$

On aura alors d'une part les estimations :

$$\begin{aligned} & \left| f_t(x) - \int_{V_k} \int_0^1 \phi(xu_s g a_{-t}) dm_k(g) ds \right| \\ & \leq \int_0^1 |\phi(xu_s a_{-t}) - \int_{V_k} \phi(xu_s g a_{-t}) dm_k(g)| ds \\ & \leq \int_0^1 \int_{V_k} |\phi(xu_s a_{-t}) - \phi(xu_s g a_{-t})| dm_k(g) ds. \end{aligned}$$

Mais

$$d_G(xu_s a_{-t}, xu_s g a_{-t}) = d_G(I_2, a_t g a_{-t}) \leq \delta_k$$

par les propriétés 1 et 2. Donc

$$|\phi(xu_s a_{-t}) - \phi(xu_s g a_{-t})| \leq \frac{1}{k}$$

pour tout $s \in [0, 1]$ et tout $g \in V_k$. Les inégalités précédentes montrent alors que

$$|f_t(x) - \int_0^1 \int_{V_k} \phi(xu_s g a_{-t}) dm_k(g) ds| \leq \frac{1}{k}$$

et il nous reste à comparer $\int_0^1 \int_{V_k} \phi(xu_s g a_{-t}) dm_k(g) ds$ à $\int_X \phi dm$. Par construction,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{V_k} \phi(xu_s g a_{-t}) dm_k(g) ds &= \frac{1}{m(W_k)} \int_{W_k} \phi(xg a_{-t}) dm(g) \\ &= \frac{1}{m(W_k)} \int_X 1_{W_k}(y) \phi(xy a_{-t}) dm(y). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de mélange du flot géodésique, la dernière intégrale converge vers

$$\int_X 1_{W_k}(y) dm(y) \cdot \int_X \phi(xy) dm(y) = m(W_k) \cdot \int_X \phi dm.$$

Cela permet de conclure. Il nous reste maintenant à démontrer l'existence de V_k et de m_k . Posons $V_k = \{h_b a_t | |b| \leq r_k, |t| \leq r_k\}$, pour un choix convenable de r_k . Les relations fondamentales nous assurent que $a_r h_b a_t a_{-r} = h_{be^{-2r}} a_t$ et donc la propriété 1 est vraie. De plus, un choix convenable des r_k assure que $\sup_{g \in V_k} d_G(I_2, g) < \delta_k$ et donc la deuxième propriété est aussi vraie. Il ne reste plus qu'à construire les mesures m_k . Définissons $Tf(g) = \int_0^1 f(u_s g) ds$ pour $f \in C_c(V_k)$. On sait que pour tout $\varphi \in C_c(V_k)$ on peut trouver $f \in C_c(V_k)$ telle que $Tf = \varphi$. Si on définit

$$u(\varphi) = \frac{1}{m(W_k)} \cdot \int_{W_k} f(x) dm(x),$$

on vérifie facilement qu'on définit une forme linéaire continue sur $C_c(V_k)$. Le théorème de représentation de Riesz fournit maintenant la mesure m_k , qui satisfait par construction la propriété 3. \square

Théorème 3.7 (Babillot). *Soit Γ un réseau dans $G = SL_2(\mathbb{R})$ et ϕ une fonction uniformément continue bornée sur X . Alors la famille de fonctions $(f_t)_{t>0}$ définie par*

$$f_t(x) = \int_0^1 \phi(xu_s a_{-t}) ds$$

est équi-continue.

Démonstration. On cherche à majorer $|f_t(x) - f_t(xg)|$ indépendamment de t pour x fixé et $g \in G$ proche de I_2 . Ceci nous amène à considérer l'écriture $gu_s = u_{\alpha(g,s)} a_{\tau(g,s)} h_{b(g,s)}$. Les mêmes calculs que dans le début 3.4 montrent que α, τ, h sont des fonctions C^∞ de (g, s) . Clairement, $xgu_s a_{-t} = xu_\alpha a_{-t} a_\tau h_{be^{-2t}}$ est d_G proche de $xu_\alpha a_{-t}$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_G(x, y) < \delta$ on ait $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$. On a

$$d_G(xgu_s a_{-t}, xu_\alpha a_{-t}) = d_G(I_2, a_\tau h_{be^{-2t}}) < \delta$$

pour tout $t > 0$, tout $s \in [0, 1]$ et tout $g \in V$, pour un certain voisinage V de I_2 . Ceci permet d'écrire :

$$|f_t(x) - f_t(xg)| \leq |f_t(x) - \int_0^1 \phi(xu_\alpha a_{-t}) ds| + |\int_0^1 (\phi(xu_\alpha a_{-t}) - \phi(xgu_s a_{-t})) ds|.$$

La deuxième quantité est majorée par 2ε par uniforme continuité de ϕ . Il reste à vérifier que, quitte à diminuer V , on a :

$$|f_t(x) - \int_0^1 \phi(xu_\alpha a_{-t}) ds| < 2\varepsilon$$

pour tout $t > 0$ et tout $g \in V$. Un calcul immédiat montre cependant que la paramétrisation $s \rightarrow \alpha(g, s)$ est arbitrairement proche pour la convergence C^1 de la paramétrisation $s \rightarrow s$, ce qui, par un changement de variable permet de conclure. \square

Présentons maintenant comment on peut finir la démonstration du théorème de classification des mesures en utilisant les deux résultats précédents. Soit $x \in X$ un point d'orbite non périodique. Le théorème de non divergence sous le flot géodesique (proposition 2.6) nous donne une suite t_n telle que xa_{t_n} reste dans un compact K de X . Par le théorème d'Ascoli et les deux résultats d'avant, on sait que la famille f_t converge uniformément sur tout compact de X vers $\int_X f dm$, donc aussi sur K . En particulier

$$f_{t_n}(xa_{t_n}) = \frac{1}{e^{2t_n}} \int_0^{e^{2t_n}} f(xu_s) ds \rightarrow \int_X f dm,$$

ce qui était le point clé de la démonstration du théorème de classification des mesures. Il suffit d'utiliser le théorème 3.4 pour conclure.

4 Le théorème d'équi-distribution

4.1 Le lemme de retour à la maison

En 1971, Margulis a démontré le résultat suivant, concernant la non divergence des semi-orbites sous l'action d'un groupe unipotent.

Lemme de Margulis. *Soit ϕ_t un flot unipotent agissant sur $SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z}) = X$. Pour tout point $x \in X$ il existe un compact $K \subset X$ et une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que $\phi_{t_n} x \in K$ pour tout n .*

En utilisant les idées de Margulis, Dani [17] réussit à montrer un résultat beaucoup plus général et plus quantitatif, qu'on appelle le lemme de retour à la maison et qui montre qu'en fait toute orbite sous l'action d'un flot unipotent passe presque toute sa vie dans un compact ne dépendant pas de cette orbite. Plus précisément :

Théorème de Dani. *Soit Γ un réseau de $G = SL_2(\mathbb{R})$ et $X = \Gamma \backslash G$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset X$ tel que pour tout sous-groupe unipotent $U = \{u_s | s \in \mathbb{R}\}$ et tout point d'orbite non périodique x , il existe t_0 dépendant de x, ε, U tel que pour tout $T > t_0$*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \chi_K(xu_s) ds \geq 1 - \varepsilon.$$

4.2 Une démonstration particulièrement simple : le cas de $SL_2(\mathbb{Z})$

Commençons par quelques observations sur l'espace de réseaux sur \mathbb{R}^2 . Soit \mathcal{R} l'ensemble de réseaux unimodulaires (i.e. le volume du parallépipède fondamental est 1) de \mathbb{R}^2 . Observons que $G = SL_2(\mathbb{R})$ agit naturellement à droite sur \mathcal{R} par $L.g = {}^t g(L)$. Cette action est transitive et \mathcal{R} peut s'identifier à $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash G$ par l'application $SL_2(\mathbb{Z})g \rightarrow {}^t g(\mathbb{Z}^2)$. On peut donc munir \mathcal{R} d'une topologie induite par cette application, $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$ étant naturellement muni de la topologie quotient. L'affirmation suivante est alors extrêmement utile dans des problèmes concernant les réseaux :

Critère de Mahler. *Soit A une partie de \mathcal{R} . Alors A est relativement compacte si et seulement si $\inf_{\Delta \in A, v \in \Delta - \{0\}} \|v\| > 0$.*

On admettra ce résultat. Pour une preuve, le lecteur est renvoyé à l'excellent [19]. Dans la suite, on notera l la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et on fixera $g \in G$ tel que $x = \Gamma g$ n'a pas une orbite périodique. Soit u_t un sous-groupe unipotent de G et fixons $\varepsilon > 0$. Considérons aussi une partition de \mathbb{Z}^2 en \mathbb{Z} orbites d'une famille de vecteurs $e_i = (a_i, b_i)$ avec $\text{pgcd}(a_i, b_i) = 1$. Comme g n'a pas d'orbite périodique, le flot u ne fixe aucun vecteur non nul du réseau engendré par g . Ce réseau est de volume 1, car $g \in G = SL(2, \mathbb{R})$. Soit

$$F(T) = \{0 \leq t \leq T \mid xu_t \notin K_\varepsilon\},$$

où

$$K_\varepsilon = \{\Gamma h \mid \inf_{v \in {}^t h(\mathbb{Z}^2), v \neq 0} \|v\| \geq \varepsilon\}.$$

L'ensemble K_ε est un compact de $X = \Gamma \backslash G$ par le critère de compacité de Mahler. Il est clair que

$$F(T) = \bigcup_i \{0 \leq t \leq T \mid \|{}^t(gu_t)e_i\| < \varepsilon\}.$$

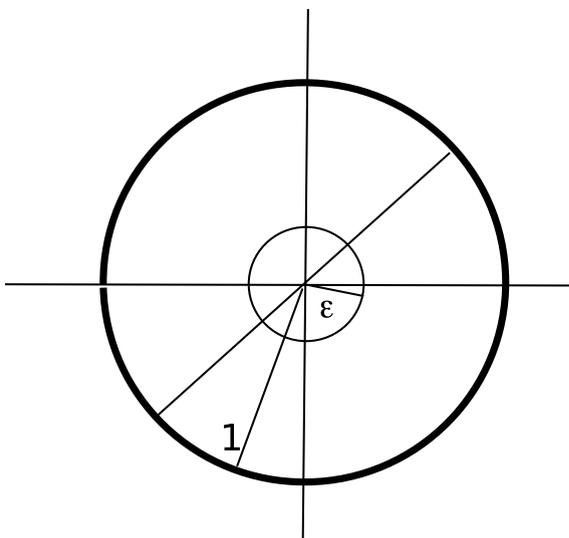


FIG. 10 – Le temps de passage dans un disque est proportionnel au rayon

D'autre part, comme le point ${}^t(gu_t)e_i$ se déplace à vitesse constante sur une droite, on a bien, pour T assez grand (voir figure 10)

$$\sum_i l(\{0 \leq t \leq T \mid \|{}^t(gu_t)e_i\| < \varepsilon\}) < 3\varepsilon \sum_i l(\{0 \leq t \leq T \mid \|{}^t(gu_t)e_i\| < 1\}) \leq 3\varepsilon T.$$

La dernière inégalité vient du fait que les ensembles $\{0 \leq t \leq T \mid \|{}^t(gu_t)e_i\| < 1\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, sinon en posant $v_1 = {}^t(gu_t)e_i$ et $v_2 = {}^t(vu_t)e_j$, on obtient $\|v_k\| < 1$, donc l'aire du parallélogramme fondamental associé au réseau engendré par v_1, v_2 est strictement plus petite que 1. Mais elle est égale à l'aire du parallélogramme associé au réseau engendré par e_i, e_j , qui est clairement au moins égale à 1. Par conséquent, il existe T_0 tel que si $T > T_0$ on ait

$$l(\{0 \leq t \leq T \mid xu_t \in K_\varepsilon\}) > (1 - 6\varepsilon)T.$$

Cela montre bien le lemme pour $SL_2(\mathbb{Z})$.

4.3 Démonstration du théorème de Dani dans le cas général

Quelques lemmes techniques

Commençons par un lemme assez simple, mais très utile :

Lemme 4.1. Soit k un entier positif. Il existe un fonction $\delta_k(\varepsilon)$ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_k(\varepsilon) = 0$ et de plus pour tout intervalle I de \mathbb{R} et tout polynome f non constant tel que $\deg(f) \leq k$ et $\|f\|_{C(I)} = 1$ on ait

$$l(\{x \in I \mid |f(x)| < \varepsilon\}) < \delta_k(\varepsilon)l(I).$$

Démonstration. Soit $r = l(\{x \in I \mid |f(x)| < \varepsilon\})$ et soient $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in I$ tels que $|x_i - x_j| \geq \frac{r}{2k}$ pour tout $i < j$ et de plus $|f(x_i)| < \varepsilon$. En utilisant la formule d'interpolation de Lagrange on obtient

$$|f(t)| \leq (k+1)\varepsilon \frac{(2kl(I))^k}{r^k},$$

donc on peut prendre $\delta_k(\varepsilon) = \varepsilon^{1/k}c$ pour une constante c qui ne dépend que de k . \square

Dans toute la suite, fixons un sous-groupe unipotent $S = \{u(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de G , un point $x = \Gamma g \in X$ tel que l'orbite de x sous l'action de U n'est pas périodique. On rappelle aussi que

$$E_i(r) = \bigcup_{s>r} g_i a_s USO(2),$$

où $g_i \cdot \infty = x_i$ sont les pointes de Γ . Soit r_0 suffisamment grand tel que les $\pi(E_i(r_0))$ soient deux à deux disjointes.

Lemme 4.2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un r suffisamment grand avec la propriété suivante : pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $g \in G$ tel que $x = \Gamma g$ n'a pas une orbite périodique sous U , l'ensemble

$$I_i(\gamma, g) = \{s \in \mathbb{R} \mid gu(s) \in \gamma E_i(r_0)\}$$

est un intervalle ouvert (a, b) et de plus

$$m(\{s \in [a, \tau] \mid gu(s) \in \gamma E_i(r+r_0)\}) \leq \varepsilon \cdot m(\{s \in [a, \tau] \mid gu(s) \in \gamma E_i(r_0)\})$$

pour tout τ appartenant à (a, b) .

Démonstration. Observons que la condition $gu(s) \in \gamma E_i(d)$ équivaut à l'existence d'un $r > d$ tel que $u(s)^{-1}g^{-1}\gamma g_i \in SO(2)Ua_{-r}$. D'autre part, on a le lemme suivant :

Lemme 4.3. Une matrice A appartient à $SO(2)Ua_{-r}$ pour un certain $r > d$ si et seulement si $\|Ae_1\| < e^{-d}$, où $e_1 = (1, 0)$.

Démonstration. Il est clair que si $k \in SO(2)$ et $u \in U$, alors $\|kua_{-r}e_1\| = \|ua_{-r}e_1\| = e^{-r} < e^{-d}$. Réciproquement, soit A une matrice telle que $\|Ae_1\| < e^{-d}$. Il existe donc une matrice $k \in SO(2)$ et un $r > d$ tel que $kAe_1 = (e^{-r}, 0)$. Mais alors la matrice de kA dans la base canonique est triangulaire supérieure avec une diagonale (e^{-r}, e^r) , et donc kA est dans Ua_{-r} . La conclusion est alors immédiate. \square

Continuons la démonstration du lemme 4.2 . Compte tenu du lemme précédent, il est naturel de considérer l'application

$$f(t) = u(t)^{-1}g^{-1}\gamma g_i \cdot e_1.$$

C'est bien sûr une application affine. Montrons que f n'est pas constante. En effet, sinon on aurait $f(s) = f(0)$ pour tout s , donc $g_i^{-1}\gamma^{-1}gu(s)^{-1}g^{-1}\gamma g_i$ est triangulaire supérieure pour tout s . Le sous-groupe S étant unipotent, il existe h tel que $hSh^{-1} = U$. Mais alors $g_i^{-1}\gamma^{-1}gh^{-1}$ est dans le normalisateur de U , qui est l'ensemble de matrices triangulaires supérieures. En utilisant la caractérisation des points ayant une orbite périodique, on conclut que $x = \Gamma g$ a une orbite périodique, ce qui est contradictoire avec le choix de x . Par conséquent f est une application affine non constante. Comme $I_i(\gamma, g) = \{s \in \mathbb{R} \mid \|f(t)\| < e^{-r_0}\}$ et comme f est affine non constante, la première affirmation du lemme est claire. Pour trouver r , il suffit d'appliquer le lemme 4.1 au polynôme $\|f(t)\|^2$. \square

Fin de la démonstration du théorème de Dani

Considérons r_0 et r comme précédemment. On va démontrer que le complémentaire dans X de $\cup_{i=1}^n \pi(E_i(r + r_0))$, appelons-le K , satisfait aux conditions du théorème. On sait déjà que K est compact. Choisissons pour tout i une famille $\gamma_k(i)$ dans Γ telle que les ensembles $\gamma_k(i)E_i(r_0)$ sont deux à deux disjoints pour des valeurs différentes de k et telle que ces ensembles recouvrent $\Gamma E_i(r_0)$. Le lemme précédent montre que les ensembles $\{s \in \mathbb{R} \mid gu(s) \in \gamma_k(i)E_i(r_0)\}$ sont des intervalles ouverts $(a_k(i), b_k(i))$ (éventuellement vides), deux à deux disjoints. Définissons $I_0 = (0, b_k(i))$ au cas où $0 \in (a_k(i), b_k(i))$ et $I_0 = \emptyset$ sinon, $I_t = (a_k(i), t)$ si $t \in (a_k(i), b_k(i))$ et \emptyset sinon. Alors, le complémentaire de K dans $[0, t]$ est l'union disjointe des ensembles $I_0 \cap K, I_t \cap K$ et $(a_k(i), b_k(i)) \cap K$, sur tous les intervalles $I = (a_k(i), b_k(i))$ de la famille F des intervalles qui sont contenus dans l'ensemble $\{s \in [0, t] \text{ tel que il existe } i \leq n, xu(s) \in \pi(E_i(r_0))\}$. Par conséquent, en utilisant les estimations du lemme précédent, on obtient :

$$m(t_1 \leq t \mid xu_{t_1} \notin K) \leq m(I_0) + \varepsilon \cdot \sum_{I \in F} m(I) + \varepsilon m(I_t) \leq m(I_0) + \varepsilon(t - t_0).$$

Donc pour tout t suffisamment grand on a $m(t_1 \leq t \mid xu_{t_1} \notin K) \leq 2\varepsilon t$, ce qui est précisément l'inégalité du théorème de Dani.

4.4 Décomposition ergodique

Théorème 4.1. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini agissant sur un espace métrisable et localement compact X . Soit μ une mesure de Borel sur X , G invariante. Il existe alors un espace mesuré (Y, ν) , une partition $(X_y)_{y \in Y}$ de X avec des ensembles mesurables G -invariants et des mesures ν_y sur X_y de façon à ce que :*

- 1) *l'action de G sur (X_y, ν_y) est ergodique pour presque tout y*
- 2) *Pour tout ensemble mesurable A de X , $A \cap X_y$ est ν_y mesurable pour presque tout y et de plus $\mu(A) = \int_Y \mu_y(A \cap X_y) d\nu(y)$;*

On admettra ce théorème, dont le lecteur pourra trouver une démonstration dans [22]. Expliquons juste pourquoi ceci est tout à fait naturel : l'espace $M(G, X)$ de mesures de probabilité G invariante est un convexe dans l'espace de mesures sur X et les mesures ergodiques sont les points extrémaux de cet convexe. En effet, supposons d'abord que μ est une mesure ergodique et que $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$ avec $a, b \geq 0$ et $a + b = 1$. Alors le théorème de Radon-Nikodym fournit une fonction f dans $L^1(d\mu)$ telle que $d\mu_1 = fd\mu$. Comme μ_1 est invariante, f l'est aussi et par ergodicité f est constante. Ceci montre une implication. Quant à l'autre implication, supposons que μ est un point extrémal qui n'est pas ergodique et soit A un ensemble invariant qui n'est pas de mesure pleine, ainsi que son complémentaire. Il suffit alors de voir que μ s'écrit comme combinaison convexe des mesures restreintes à A et à $X - A$. Maintenant, le théorème de Krein-Millman donne la raison profonde de l'existence d'une décomposition ergodique, car tout compact convexe est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux (observer que $M(G, X)$ peut être vu comme un sous-ensemble de la boule unité de $C_0(X)$, par le théorème de Riesz, cette boule est compacte pour la topologie faible * par Banach-Alaoglu).

4.5 Fin de la démonstration d'équi-distribution

Dans la suite, on va fixer $x \in X$ et on va noter $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X , à valeurs réelles et qui tendent vers 0 à l'infini. On le munit de la norme uniforme. Considérons les formes linéaires continues sur $C_0(X)$ définies par

$$T_{x,t}(f) = \frac{1}{t} \int_0^t f(xu_s) ds.$$

Clairement, $T_{x,t}$ est de norme au plus 1 et donc appartient à la boule unité du dual de $C_0(X)$, qui est compacte pour la topologie faible *. Il suffit donc de montrer que le seul point d'adhérence (pour la topologie faible *) d'une suite T_{x,t_n} pour $t_n \rightarrow \infty$ est la mesure de probabilité de Haar sur X . Soit donc l un tel point d'adhérence et notons que par le théorème de représentation de Riesz on peut trouver une mesure de Borel μ sur X telle que $l(f) = \int_X fd\mu$ pour tout $f \in C_0(X)$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(xu_s) ds = \int_X fd\mu$$

pour tout f .

Lemme 4.4. La mesure μ est une mesure de probabilité sur X .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact comme dans le théorème de Dani. Prenons ϕ une fonction à support compact telle que $1_K \leq \phi \leq 1$. Alors

$$1 - \varepsilon \leq T_{x,t_n}(1_K) \leq T_{x,t_n}(\phi)$$

et comme $T_{x,t_n}(\phi)$ converge vers $\mu(\phi) \leq \mu(X)$, on obtient bien $\mu(\phi) \geq 1 - \varepsilon$. Donc

$$\mu(X) = 1.$$

□

Maintenant, le théorème de décomposition ergodique nous donne une décomposition de la mesure μ sous l'action du groupe unipotent U . Le théorème de classification des mesures ergodiques invariantes montre alors que toute composante ergodique de μ ou bien est la mesure la Haar sur X ou bien a son support sur une orbite périodique, et dans ce cas c'est la longueur normalisée sur l'orbite correspondante. Par conséquent, il suffit de montrer que si x est choisi au départ de façon à ce que son orbite ne soit pas périodique, la mesure (par rapport à μ) de l'union Y des orbites périodiques est nulle. Supposons le contraire donc $\mu(Y) > 0$. Prenons $0 < \varepsilon < \frac{\mu(Y)}{4}$ et K un compact comme dans le théorème de Dani. Soit K' un compact de Y de mesure au moins $\frac{3\mu(Y)}{4}$.

Lemme 4.5. Pour toute fonction continue bornée φ sur X on a $T_{x,t_n}(\varphi) \rightarrow \int_X \varphi d\mu$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons une fonction ψ dans $C_c(X)$ telle que $0 \leq \psi \leq 1$ et $\int_X \psi d\mu > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors d'une part

$$|T_{x,t_n}(\varphi - \varphi\psi)| \leq \varepsilon \|\varphi\|$$

pour n assez grand et d'autre part

$$T_{x,t_n}(\varphi \cdot \psi) \rightarrow \int_X \varphi \cdot \psi d\mu.$$

Enfin,

$$|T_{x,t_n}(\varphi) - \int_X \varphi d\mu| \leq 2\varepsilon \|\varphi\| + |T_{x,t_n}(\varphi \cdot \psi) - \int_X \varphi \cdot \psi|.$$

Ceci montre bien que $T_{x,t_n} \rightarrow \int_X \varphi d\mu$. □

En utilisant le lemme précédent on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x,t_n}(\varphi) = \int_X \varphi d\mu \geq \mu(J) \geq \frac{3\mu(Y)}{4}$$

pour toute fonction continue bornée φ telle que $\varphi \geq 1_J$. Soit aussi τ tel que $Ja_\tau \subset X - K$ et soit $z = xa_\tau$. On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{z,t_n e^{-2\tau}}(\varphi) \geq \frac{3\mu(Y)}{4}$$

si $\varphi \geq 1_{Ja_\tau}$ est continue bornée. En particulier, si ψ est une fonction continue bornée sur X telle que $0 \leq 1_J - \psi \leq \frac{\mu(Y)}{4}$, alors pour tout $t > 0$ on a

$$T_{z,t}(1_K) - T_{z,t}(\psi) \leq \frac{\mu(Y)}{4}$$

et de plus $T_{z,t_n e^{-2\tau}}(\psi)$ converge vers une limite ne dépassant pas $1 - \frac{3\mu(Y)}{4}$, donc on aura

$$T_{z,t_n e^{-2\tau}}(\psi) \leq 1 - \frac{\mu(Y)}{2}$$

pour n assez grand. D'autre part, par les inégalités précédentes on a aussi

$$T_{z,t_n e^{-2\tau}}(1_K) \leq 1 - \frac{\mu(Y)}{4} < 1 - \varepsilon$$

si n est assez grand. Le théorème de Dani montre alors que z est d'orbite périodique, donc x aussi. Ceci finit la démonstration.

5 Théorème de Ledrappier et dualité

Le but de cette partie est d'utiliser les théorèmes d'équi-distribution de Ratner et la notion de dualité pour parvenir à la démonstration du remarquable théorème de Ledrappier [14] :

Théorème 5.1. *Si Γ est un réseau de $G = SL_2(\mathbb{R})$, alors il existe une constante c_Γ telle que pour tout vecteur v dont l'orbite sous l'action de Γ est dense dans \mathbb{R}^2 , pour toute fonction f continue à support compact dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ on ait*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma, \|\gamma\| \leq T} f(\gamma v) = \frac{c_\Gamma}{\|v\|} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x) dx}{\|x\|},$$

$\|\cdot\|$ étant la norme euclidienne et dx la mesure de Lebesgue.

Ce qui est tout à fait remarquable dans ce théorème est le fait que la mesure invariante n'est pas invariante par le groupe Γ ! De plus, observons que même si le cardinal de $\{\gamma \in \Gamma \mid \|\gamma\| \leq T\}$ est de l'ordre de T^2 (voir le théorème de comptage 3.1), la normalisation dans le terme de gauche est juste de l'ordre de T (ce qui montre encore que les éléments de Γ tendent à sortir très vite de tout compact, en particulier du support de f). La démonstration qu'on présentera dans la suite, suivant [15], s'adapte immédiatement pour traiter le cas d'autres normes que celle euclidienne. Signalons aussi que Ledrappier [1] a étendu ce résultat pour des matrices de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et que des résultats récents de [15] généralisent ce type de théorème de distribution dans des situations très générales. Pour plus de détails (qui sont d'ailleurs extrêmement techniques) on renvoie à, [15] [1]. L'idée de la dualité est de remplacer les problèmes concernant les orbites sous l'action de Γ sur G/U par l'étude des U -orbites sur $\Gamma \backslash G$. Plus précisément, le théorème de dualité peut être énoncé dans le cas de $SL_2(\mathbb{R})$ (pour le cas général on renvoie à [15], théorème 2.2) :

Théorème 5.2 (dualité). *Pour toute fonction positive φ continue à support compact dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong G/U$ et pour tout vecteur v dont l'orbite sous Γ est dense, on a*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, \|\gamma\| \leq T} \varphi(\gamma \cdot v) \approx \int_{\|g\| \leq T} \varphi(g \cdot v) dm(g),$$

m étant une mesure de Haar sur G normalisée de façon à ce que la mesure de Haar induite sur le quotient $\Gamma \backslash G$ soit une mesure de probabilité.

Presque toute la suite est dédiée à prouver ce théorème de dualité. Comme on le verra, le théorème de Ledrappier en découle facilement.

5.1 Notations

Dans la suite, φ sera une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Γ un réseau de $SL_2(\mathbb{R}) = G$. Pour $T > 0$, on notera

$$X_T = \{g \in X \mid \|g\| \leq T\},$$

où $X \in \{U, G, \Gamma\}$. Soit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = 0\}$ et

$$\tau : E \mapsto G, \quad \tau(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\sigma : G \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \sigma \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},$$

i.e $\sigma(g) = ge_1$ pour $g \in G$. Notons que $\sigma(gg_1) = g\sigma(g_1)$, que $\sigma \circ \tau = Id$ et que l'application

$$\begin{cases} E \times U & \mapsto G \\ (e, u) & \mapsto \tau(e)u \end{cases}$$

définit un homéomorphisme sur un ensemble de mesure pleine dans G . En effet, on vérifie facilement que son image est

$$\left\{ g \in G \mid g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a \neq 0 \right\}$$

et que l'inverse est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left((a, b), \begin{pmatrix} 1 & c/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si du est la mesure de Lebesgue sur U (qu'on notera aussi L) et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on peut donc définir une mesure $m^1 = L \otimes \lambda$ sur une partie de mesure pleine de G . Un calcul facile montre que m^1 ainsi définie est une mesure de Haar sur G . Normalisons cette mesure en une mesure de Haar dm sur G telle que la mesure de Haar μ induite sur le quotient $X = \Gamma \backslash G$ soit une mesure de probabilité.

On définit sur G la norme

$$\|g\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad \text{pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a $\|gh\| \leq \|g\|\|h\|$, pour tous $g, h \in G$. Définissons

$$U_t[g] = \{u \in U \mid \|gu\| \leq t\}.$$

et notons enfin $\tilde{\sigma}(g) = \tau(\sigma(g))$ et $u_g = g^{-1}\tilde{\sigma}(g)$. Si ψ est une fonction définie sur U , positive et telle que $\int_U \psi = 1$, on définit

$$f(g) = \psi(u_g)\varphi(\sigma(g)).$$

5.2 Démonstration du théorème de dualité

Une réduction : Soit v un vecteur comme dans l'énoncé du théorème de dualité. Ecrivons $v = \sigma(g_0)$ et observons que quitte à considérer $g_0^{-1}Ug_0$ (qui reste un groupe unipotent et donc le théorème de Ratner s'applique avec exactement la même démonstration) et quitte à changer φ et σ en φ' et σ' tels que $\varphi'(\sigma'(g)) = \varphi(\sigma(gg_0))$, pour lesquels les mêmes hypothèses restent valables, on peut toujours supposer $g_0 = I_2$, ce qu'on fera dans la suite.

Commençons par évaluer la taille de $U_t[g]$:

Lemme 5.1. On a $L(U_t[g]) = \frac{2t}{\|\sigma(g)\|} + O(1)$ pour $t \rightarrow \infty$.

Démonstration. Clairement, $A_1 \subset U_t[g] \subset A_2$ où

$$A_1 = \{u_s \|g \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\| \leq t - \|g\|\}, A_2 = \{u_s \|g \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\| \leq t + \|g\|\}.$$

Mais

$$\|g \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\| = |s| \|\sigma(g)\|$$

donc

$$L(A_1) = 2 \frac{t - \|g\|}{\|\sigma(g)\|}, \quad L(A_2) = 2 \frac{t + \|g\|}{\|\sigma(g)\|}$$

et la conclusion est claire. \square

Lemme 5.2. Soit $\eta > 0$ et $K \subset G$ un compact. Il existe alors O un voisinage ouvert de I_2 tel que pour tous $g \in G, k \in K, v \in O$, on ait

$$\left| \frac{\|kvg\|}{\|kg\|} - 1 \right| \leq \eta.$$

Démonstration. Montrons qu'on peut trouver O tel que $\frac{\|kvg\|}{\|kg\|} \leq 1 + \eta$. Sinon il existe $g_n \in G, \|v_n - I_2\| < 1/n$ et $k_n \in K$ avec $\|k_n v_n g_n\| > (1 + \eta) \|k_n g_n\|$. On peut supposer que k_n converge vers $k \in K$. Alors

$$(1 + \eta) \|k_n g_n\| < \|k_n v_n g_n\| + \frac{1}{n} \|g_n\| \|k_n\| \Rightarrow n\eta \|k_n g_n\| \leq \|g_n\| \|k_n\|.$$

De même on peut supposer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{\|g_n\|} = g \in M_2(\mathbb{R})$$

avec $\|g\| = 1$. Alors on obtient

$$\eta \|k_n \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \leq \frac{\|k_n\|}{n} \quad \text{donc} \quad \eta \|kg\| \leq 0,$$

ce qui est absurde. Maintenant, quitte à diminuer O , on peut supposer que $O \subset G$ et O stable par $g \rightarrow g^{-1}$. Alors pour tous $g \in G, k \in K, v \in O$ on a

$$\frac{\|kg\|}{\|kv^{-1}g\|} = \frac{\|kv^{-1}g\|}{\|kv^{-1}g\|} \leq 1 + \eta \Rightarrow \frac{\|kv^{-1}g\|}{\|kg\|} \geq \frac{1}{1 + \eta} \geq 1 - \eta \quad \text{donc} \quad \frac{\|kvg\|}{\|kg\|} \geq 1 - \eta.$$

\square

Dans la suite, on va supposer que $\text{supp}(\varphi) \subset E$ et on va considérer O comme dans le lemme 5.2 , avec $\varepsilon = \eta$ (ou η sera choisi a la fin, mais en principe il est très petit, même devant ε) et $K = \tau(\text{supp}(\varphi))$. On supposera aussi que φ est positive et que $\text{supp}(\psi) \subset O$.

Lemme 5.3.

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} \varphi(\sigma(\gamma)) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{U_{(1+\eta)T}[\tilde{\sigma}(\gamma)]} f(\gamma u^{-1}) du$$

Démonstration. Observons que

$$f(gu^{-1}) = \varphi(\sigma(gu^{-1}))\psi(u_{gu^{-1}}).$$

Mais

$$\sigma(gu^{-1}) = \sigma(g) \quad \text{et} \quad u_{gu^{-1}} = ug^{-1}\tilde{\sigma}(g) = uu_g \quad \text{donc} \quad f(gu^{-1}) = \varphi(\sigma(g))\psi(uu_g).$$

Par conséquent, si

$$A = U_{(1+\eta)T}[\tilde{\sigma}(g)], \quad \text{on a} \quad \int_A f(gu^{-1}) du = \varphi(\sigma(g)) \int_{Au_g} \psi(u) du,$$

par invariance par translation de la mesure $dL = du$. Le lemme sera démontré si on montre que $Au_g \supset \text{supp}(\psi)$ pour tout $g \in G_T$ tel que $\sigma(g) \in \text{supp}(\varphi)$. Mais si $v \in \text{supp}(\psi)$, on a $v \in O$ et donc

$$\|\tilde{\sigma}(g)vu_g^{-1}\| \leq \|\tilde{\sigma}(g)u_g^{-1}\|(1+\eta) = \|g\|(1+\eta) \leq T(1+\eta).$$

(noter que $\tilde{\sigma}(g) = \tau(\sigma(g)) \in \tau(\text{supp}\varphi) = K$). Donc $vu_g^{-1} \in A$ et $v \in Au_g$.

On peut maintenant conclure : si $\gamma \in \Gamma_T$, on a aussi $\gamma \in G_T$ et par ce qu'on vient de démontrer, ou bien $\sigma(\gamma)$ est dans $\text{supp}(\varphi)$ et alors

$$\int_{U_{(1+\eta)T}[\tilde{\sigma}(\gamma)]} f(\gamma u^{-1}) du \geq \varphi(\sigma(\gamma))$$

ou bien $\sigma(\gamma)$ n'est pas dans $\text{supp}(\varphi)$ et alors

$$0 = \varphi(\sigma(\gamma)) \leq \int_{U_{(1+\eta)T}[\tilde{\sigma}(\gamma)]} f(\gamma u^{-1}) du.$$

Il ne reste plus qu'à sommer ces inégalités . □

Lemme 5.4. Pour tout $T > 0$ on a

$$\int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm(g) \geq \int_G \int_{U_{\frac{T}{1+\eta}}[\tilde{\sigma}(g)]} f(gu^{-1}) dudm(g).$$

Démonstration. Observons que si g n'est pas dans G_T et si $\sigma(g) \in \text{supp}(\varphi)$, alors

$$U_{\frac{T}{1+\eta}}[\tilde{\sigma}(g)]u_g \cap \text{supp}(\psi) = \emptyset.$$

En effet, si $v \in O$ est un élément du terme de gauche, on a

$$vu_g^{-1} \in U_{\frac{T}{1+\eta}}[\tilde{\sigma}(g)] \quad \text{donc} \quad \|\tilde{\sigma}(g)vu_g^{-1}\| \leq \frac{T}{1+\eta} \quad \text{d'où} \quad \|\tilde{\sigma}(g)u_g^{-1}\| \leq T$$

c'est à dire $g \in G_T$, ce qui est absurde.

Deuxièmement, si $\sigma(g)$ n'est pas dans $\text{supp}(\varphi)$, f est nulle sur la U orbite de g , car $\sigma(gu) = \sigma(g)$ et donc $\varphi(\sigma(gu)) = \varphi(\sigma(g)) = 0$ pour $u \in U$, donc $f(gu) = 0$ si $u \in U$. Ainsi, en notant $A_g = U_{\frac{t}{1+\eta}}[\tilde{\sigma}(g)]$, on a

$$\begin{aligned} \int_G \int_{A_g} f(gu^{-1}) dudm(g) &= \int_{\sigma^{-1}(\text{supp}(\varphi))} \int_{A_g} f(gu^{-1}) dudm(g) = \\ &= \int_{\sigma^{-1}(\text{supp}(\varphi))} dm(g) [\varphi(\sigma(g)) \int_{A_g u_g} \psi(u) du] \leq \\ &= \int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) \left(\int_{A_g u_g} \psi(u) du \right) dm(g) \leq \int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm(g). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.5. Il existe un nombre fini d'éléments $k_1, \dots, k_N \in K$ et un voisinage symétrique de I_2 , O tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^N k_i O$ et si $x \in k_i O$ on a $U_{(1+\eta)T}[x] \subset U_{(1+\eta)^2 T}[k_i]$.

Démonstration. On prend un O comme dans le lemme 5.2 correspondant à $\eta/2$ on a alors pour $k \in K$ et $x \in kO$, $U_{(1+\eta)T}[x] \subset U_{(1+\eta)^2 T}[k]$. Il ne reste plus qu'à prendre un sous recouvrement fini de $(kO)_{k \in K}$. □

En utilisant le lemme 5.5 et un argument de partition de l'unité, on peut supposer que $\text{supp}(\varphi) \subset \sigma(bO)$ pour un $b \in K$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{\sigma}(\gamma) = \tau(\sigma(\gamma)) \in bO$ et donc $U_{(1+\eta)T}[\tilde{\sigma}(\gamma)] \subset U_{(1+\eta)^2 T}[b]$. Donc, par le lemme 5.3 et cette observation

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma_T} \varphi(\sigma(\gamma)) &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{U_{(1+\eta)T}[\tilde{\sigma}(\gamma)]} f(\gamma u^{-1}) du \leq \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{U_{(1+\eta)^2 T}[b]} f(\gamma u^{-1}) du = \int_{U_{(1+\eta)^2 T}[b]} F(\pi(I_2)u^{-1}) du \end{aligned}$$

où F est définie par $F(\pi(g)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma g)$.

Le théorème d'équi-distribution fournit un T_0 tel que si $T > T_0$ on ait :

$$\left| \frac{1}{L(U_{(1+\eta)^2 T}[b])} \int_{U_{(1+\eta)^2 T}[b]} F(\pi(I_2)u^{-1}) du - \int_X F d\mu \right| < \varepsilon \int_X F d\mu.$$

Donc

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} \varphi(\sigma(\gamma)) \leq (\varepsilon + 1) \left(\int_X F d\mu \right) L(U_{(1+\eta)^2 T}[b]) \leq \int_X F d\mu (1 + \varepsilon)^2 \frac{2T(1+\eta)^2}{\|\sigma(b)\|}$$

pour $T > T_1$ (par le lemme 5.1). Donc pour T assez grand, on a :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} \varphi(\sigma(\gamma)) \leq \frac{2(1+\eta)^2(1+\varepsilon)^2}{\|\sigma(b)\|} T \int_X F d\mu \quad (5)$$

Mais comme $\text{supp}(\varphi) \subset \sigma(bO)$ et comme par le lemme 5.4 on a

$$\int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm(g) \geq \int_G \int_{U_{\frac{T}{1+\eta}}[\bar{\sigma}(g)]} f(gu^{-1}) du dm(g),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm(g) &\geq \int_G \int_{U_{\frac{T}{1+\eta}}[b]} f(gu^{-1}) du dm(g) = \\ &\int_{U_{\frac{T}{1+\eta}}[b]} du \int_G f(gu^{-1}) dm(g) = L(U_{\frac{T}{1+\eta}}[b]) \int_G f(g) dm(g). \end{aligned}$$

Mais $\int_G f(g) dm(g) = \int_X F(x) d\mu(x)$ et

$$L(U_{\frac{T}{1+\eta}}[b]) \geq \frac{2T(1-\varepsilon)}{(1+\eta)^2 \|\sigma(b)\|}$$

pour $T > T_2 > T_1$, et donc pour $T > T_2$, on a :

$$\int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm(g) \geq \frac{2(1-\varepsilon)}{\|\sigma(b)\|(1+\eta)^2} T \int_X F d\mu \quad (6)$$

En combinant (5) et (6) on voit que si $c > 1$ est fixé, on peut choisir ε suffisamment petit et après faire tendre η vers 0 dans les deux relations pour obtenir que pour T assez grand on ait

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} \varphi(\sigma(\gamma)) \leq c \int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm^1(g).$$

On montre par les mêmes arguments que pour $d > 1$, on a pour T assez grand

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} \varphi(\sigma(\gamma)) \geq \frac{1}{d} \int_{G_T} \varphi(\sigma(g)) dm^1(g).$$

Ceci finit la démonstration du théorème de dualité.

5.3 Fin de la démonstration du théorème de Ledrappier

Ayant établi de théorème de dualité, déduire le théorème de Ledrappier est juste un jeu d'écriture. Posons encore $v = \sigma(g_0)$ et observons que

$$\begin{aligned} \int_{G_T} \varphi(g\sigma(g_0)) dm &= \int_{G_T} \varphi(\sigma(gg_0)) = \int_{\|gg_0^{-1}\| \leq T} \varphi(\sigma(g)) dm(g) \\ &= \int_{\tau(E)} \int_{\|zu g_0^{-1}\| \leq T} \varphi(\sigma(zu)) du dz = \int_E \varphi(z) L(U_T(z, g_0^{-1})) dz, \end{aligned}$$

où $U_T(z, g) = \{u \mid \|zug\| \leq T\}$. Une adaptation évidente du lemme 5.1 montre que

$$L(U_T(z, g_0^{-1})) = \frac{2T}{\|\sigma(g_0)\| \cdot \|\sigma(z)\|} + O(1),$$

avec des estimations uniformes sur les compacts. Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\int_{G_T} \varphi(g\sigma(g_0)) dm \approx \frac{2T}{\|v\|} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(z)}{\|z\|} dz.$$

Il suffit de se souvenir qu'on avait normalisé la mesure de Haar m^1 pour avoir une mesure de probabilité sur le groupe quotient pour avoir précisément l'énoncé du théorème de Ledrappier.

Conclusion

Les travaux de Furstenberg, Dani, Margulis, Ratner ont ouvert un domaine assez fécond, essentiellement celui de l'étude des problèmes de théorie des nombres par des méthodes de systèmes dynamiques. Pour donner une idée de la profondeur des résultats obtenus ces dernières années (en généralisant les résultats présentés dans ce mémoire), citons par exemple la démonstration par Margulis de la conjecture d'Oppenheim, des progrès remarquables vers la conjecture de Littlewood (affirmant que si a, b sont des nombres réels, alors il existe une suite infinie d'entiers k_n tels que $k_n \|ak_n\| \cdot \|bk_n\|$ tende vers 0, $\| \cdot \|$ étant la distance à l'entier le plus proche) ou bien des méthodes de comptage des points entiers dans des variétés algébriques, comme dans [24]. Et pourquoi pas, le très récent résultat de Terence Tao et Ben Green affirmant qu'il existe des progressions arithmétiques de nombres premiers de longueur arbitrairement grande. Bien évidemment, il s'agit ici de résultat extrêmement profonds, qui sont très très loin du niveau de cet exposé qui se veut tout à fait élémentaire. Mais nous espérons avoir montré que même dans un cadre restreint comme celui de $SL_2(\mathbb{R})$, on peut obtenir des résultats tout à fait non triviaux. On laisse donc le plaisir au lecteur intéressé de plonger (injectivement !) dans l'énorme littérature disponible, dont on n'a cité qu'une faible partie dans les références.

Références

- [1] F. Ledrappier, M. Pollicott, Distribution results for matrices in $SL(2, \mathbb{Q}_p)$, Bull Braz Math Soc, New Series, 32(2), 143-176.
- [2] B. Schapira, Propriétés ergodiques du flot horocyclique d'une surface hyperbolique géométriquement finie, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, Vol 21 (2003), 147-163
- [3] A. Eskin, C. McMullen, Mixing, counting and equidistribution in Lie groups, Duke Math. J. 71, 1 (1993), 181-209
- [4] A. Gorodnik, B. Weiss, Distribution of lattice orbites on homogeneous varieties
- [5] S. G. Dani, On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, Ergodic Theory Dynam. Systems 6 (1986), 167-182
- [6] S.G. Dani, J. Smilie, Uniform distribution of horocycle flows for Fuchsian groups, Duke Math. J. 51 (1984) 185-194
- [7] E. Ghys, Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes, Astérisque 206 (1992), 93-136
- [8] G.A. Margulis, On the action of unipotent subgroups in a space of lattices, Math. USSR-Sb. 15 (1987), 249-253

- [9] M. Ratner, Raghunathan's conjecture for $SL(2, \mathbb{R})$, Israel J. Math. 80 (1992), 1-31
- [10] M. Ratner, On Raghunathan's measure conjecture, Ann. of Math. (2) 134 (1991), 545-607
- [11] A. F. Beardon, The geometry of discrete groups, 1983, Springer-Verlag
- [12] D. Kleinbock, Some applications of homogeneous dynamics to number theory, preprint
- [13] S. Katok, Fuchsian groups, 1992, University of Chicago Press
- [14] F.Ledrappier , Distribution des orbites des réseaux sur le plan réel. C.R.Acad.Sci Paris t.329, Série I p.61-64, 1999
- [15] A.Gorodnik B.Weis, Distribution of lattice orbits on homogeneous varieties, préprint 2004
- [16] S.G.Dani, On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, Ergod.Th Dynam, Syst.4, 1984, p.25-34
- [17] S.G.Dani, On invariant measures, minimal sets and a lemma of Margulis, Invent.Math.51, 1979, p.239-260
- [18] E.Hopf, fuchsien groups and ergodic theory, Trans.Am.Math.Soc 39, 1936, p.299-314
- [19] A.Borel, Introduction aux Groupes Arithmétiques, Hermann, 1969
- [20] G.Hedlund, Dynamics of geodesic flows, Bull.Am.Math.Soc 45, 1939, p.241-260
- [21] M.Babillot, Points entiers et groupes discrets : de l'analyse aux systèmes dynamiques, Panoramas et Synthèses, 13 , 2002
- [22] V.S.Varadarajan Groups and automorphisms of Borel spaces, Trans.Amer.Math.Soc 109, 1963, P.191-220
- [23] M.Bachir Bekka, Mathias Mayer, Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces, London.Math.Soc., Lecture note series 269, Cambridge University press, 2000
- [24] A.Eskin, G.A.Margulis, S.Mozes, Upper bounds and asymptotics in a quantitative version of Oppenheim conjecture, Ann.Math.147, 1998 , P.93-141