Développement de singularités dans les solutions de l’équation de Navier-Stokes

Brice Le Grignou - Alexis Drouot - Sous l’encadrement de Clément Mouhot

5 novembre 2010

Nous remercions Clément Mouhot, notre encadrant, pour sa sympathie et sa disponibilité ; nous remercions également Mickael De La Salle, Phillipe Gravejat, et les élèves venus assister à notre soutenance.

Table des matières

Le XXème siècle marque notamment en mathématiques la naissance de l'analyse fonctionnelle. A partir du moment où Léon Lebesgue s'est attaché à construire des classes de fonctions bien plus grandes que celles qu'on utilisait habituellement, la communauté mathématique prend conscience de l'importance que pourraient avoir les fonctions dites irrégulières. Jean Leray et Sergueï Sobolev sont alors les précurseurs de la théorie des distributions, formalisée par Laurent Schwartz. Celle-ci permet de voir les équations aux dérivées partielles dans un sens bien plus faible que celui qu'on a usuellement, mais simplifie consid ?rablement leur résolution.

Poincaré semble être le premier à remarquer l'importance de champs de vitesses discontinus en mécanique des fluides. En observant des tourbillons et des écoulements, il remarque des turbulences, qui donneront à Jean Leray quelques années plus tard l'idée de considérer pour l'équation de Navier-Stokes des solutions faibles, qu'il appellera « solutions turbulentes ».

A travers « Mouvement d'un liquide emplissant l'espace », article publié en 1935, Jean Leray marque un cap. Grâce à une méthode nouvelle de l'analyse mathématique, consistant à transformer l'EDP considérée en une bien plus simple mais infiniment proche, et à en rechercher les invariants pour ensuite passer à la limite, il démontre l'existence de solutions faibles, c'est-à-dire au sens des distributions, de l'équation de Navier-Stokes.

1 Schéma de preuve

La méthode que Jean Leray utilise pour déterminer les solutions de l'équation de Navier Stokes est nouvelle en 1935, et a été absolument fondatrice pour la suite de l'analyse moderne. Nous allons ici en résumer les étapes, afin de donner une idée à quiconque qui n'aurait pas le temps de le lire à quel point cet article est fort et astucieux pour son temps.

– L'équation de Navier Stokes s'écrit pour les fluides parfaits incompressibles

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle \overrightarrow{u} - \dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} - \overrightarrow{\triangledown} p = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\triangledown}) \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{\triangledown} \cdot \overrightarrow{u} = 0. \end{array} \right.$$

Tout d'abord, l'équation de Navier Stokes est non linéaire, ce qui augmente considérablement la difficulté de sa résolution. On ne peut appliquer par exemple la formule d'inversion de Fourier pour trouver des solutions, correspondant au moins à une condition initiale dans la classe de Schwarz. Leray remplace alors le seul terme non linéaire, à savoir $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown})(\overrightarrow{u})$, par un champ de forces $\overrightarrow{X}$, supposé connu.

Il applique ensuite ce qu'on appelle la méthode de Green pour l'équation linéaire et arrive à trouver des solutions sous la forme d'intégrales qui dépendent bien sur du champ de force $\overrightarrow{X}$; l'étude de ces intégrales lui permet d'établir une relation intégrale spatiale très précieuse pour la suite, appelée relation de dissipation de l'énergie, mettant en scène trois quantités : la norme de $\overrightarrow{u}$ dans L^2, celle de son gradient, et le produit scalaire dans L^2 de $\overrightarrow{u}(\cdot, t)$ par $\overrightarrow{X}(\cdot, t)$.

– Ensuite Leray repasse à l'équation de Navier Stokes en remplaçant dans les relations intégrales $\overrightarrow{X}$ par $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown})(\overrightarrow{u})$. Il utilise en fait une méthode *a priori*, ou d'analyse-synthèse : il s'affranchit de toutes les difficultés techniques, du type régularité, pour obtenir des résultats du type : si une solution existe, alors elle vérifie ceci et cela. Il obtient ainsi la relation de dissipation de l'énergie qui se trouve assurer la décroissance de la norme L^2 de $\overrightarrow{u}(\cdot, t)$ et une équation intégrale précieuse sur $\overrightarrow{u}$. L'avantage de cette équation intégrale est qu'on peut itérer l'operateur définissant l'un de ses termes sans perdre de régularité, comme on le verra au troisième chapitre. Leray arrive ainsi à construire des solutions locales en temps, à partir de toute condition initiale $\overrightarrow{u_0} \in H^1$ bornée, et démontre astucieusement leur unicité dans une certaine classe de fonctions.

  La démonstration s'adapte pour donner deux représentations des singularités qui pourraient apparaitre en temps fini, ainsi qu'une condition pour que la solution soit définie pour tout temps.

– Leray veut alors montrer l'existence pour un temps infini de solutions faibles ; cette volonté est d'autant plus astucieuse que cette notion voyait à peine le jour à plusieurs milliers de kilomètres, en Russie, avec les travaux de Sobolev. Il transforme alors le terme $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown})(\overrightarrow{u})$ en $((\rho_\varepsilon * \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown})(\overrightarrow{u})$; convoler à cet endroit est l'Idée de Leray puisque les solutions conserveront une inégalité d'énergie du type décroissante !

  En faisant tendre ε vers 0 et en extrayant astucieusement des sous-suites successives de $\overrightarrow{u}_{varepsilon}$, solution du problème régularisé, Leray construit sans avoir la moindre notion d'injection $H^1 \hookrightarrow L^2$ compacte des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes. Malheureusement il ne saura conclure quant à l'unicité de ces solutions, à cause des extractions, mais aura écrit par son travail un article fondateur de l'analyse telle qu'elle est conçue aujourd'hui. En effet, Leray a révolutionné l'étude des équations aux dérivées partielles : il montre que la recherche des quantités laissées invariantes par une équation aux dérivées partielles, ici des quantités relatives à la répartition de l'énergie est primordiale pour sa résolution.

2 Equation de Navier-Stokes linéarisée

2.1 Problème de Cauchy pour l'équation de Navier-Stokes linéarisée

On appelle équation de Navier-Stokes linéarisée le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}(x,t) + \triangle \overrightarrow{u}(x,t) - \overrightarrow{\bigtriangledown} p(x,t) = -\overrightarrow{X}(x,t) \\ \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{u}(x,t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

- $x \in \mathbb{R}^3$ est la variable d'espace.
  $t \in \mathbb{R}^+$ la variable de temps.
- $\overrightarrow{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$ désigne la vitesse d'un écoulement de fluide.
- $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la pression.
- $\overrightarrow{X} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$ désigne un champ de forces et est une donnée du problème. Il vérifiera $\overrightarrow{X}(\cdot,t) \in L^2 \cap L^\infty$, continue en t à valeurs dans $L^\infty \cap L^2$.

On appellera donnée initiale régulière $\overrightarrow{u_0}$ un champ de vitesse satisfaisant la condition d'incompressibilité $\overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{u_0} = 0$, de classe C^2 et de carré sommable. On identifiera de temps en temps les fonctions de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de carré sommable à chaque instant, aux fonctions de $\mathbb{R}^+ \longrightarrow L^2$. On nommera solution de cette équation une fonction $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire qu'on ne considérera pas la pression p comme donnée importante : si l'on connait $\overrightarrow{u}$, on en déduit la pression par intégration spatiale en résolvant l'équation $\overrightarrow{\bigtriangledown} p = \overrightarrow{\lambda}$, pour λ donné.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit* $\overrightarrow{u_0}$ *une donnée initiale régulière, et* $\overrightarrow{X}$ *continu, avec pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, $\overrightarrow{X}(\cdot, t) \in L^2$. *Alors le système* (2.1) *admet une solution correspondant à* $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{u}(\cdot, 0)$, *définie sur* $\mathbb{R}^+ \longrightarrow L^2$.

Lemme 2.1.1. *Soit l'équation*

$$\triangle \overrightarrow{u} = \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Alors quel que soit $\overrightarrow{u_0} \in L^2$, *il existe une solution de cette équation qui s'ecrit pour tout* t *strictement positif*

$$\overrightarrow{u}(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u_0}(y) \exp\left(\frac{-\|y - x\|^2}{4t}\right) dy. \tag{2.3}$$

De plus, cette solution vérifie la condition dite d'incompressibilité $\overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{u} = 0$

Démonstration. La preuve est très simple et s'effectue par exemple *via* la transformée de Fourier. On consultera par exemple [3]. □

Lemme 2.1.2. *Soit l'équation*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \triangle \overrightarrow{u} - \overrightarrow{\bigtriangledown} p = -\overrightarrow{X} \\ \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{u}(x, t) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\overrightarrow{X}(\cdot, t) \in L^2$, *il existe une solution de cette équation satisfaisant à une condition initiale nulle et qui s'écrit pour tout* t *strictement positif*

$$\overrightarrow{u}(x, t) = -\int_{\tau=0}^{t} \int_{\mathbb{R}^3} T(x - y, t - \tau) \cdot \overrightarrow{X}(y, \tau) dy d\tau. \tag{2.5}$$

T *est alors une fonction connue explicitement* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+_* \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ *de classe* C^∞ *et qui satisfait aux inégalités suivantes :*

$$\|T(x, t)\|_\infty \leq \frac{A}{(\|x\|^2 + t)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.6}$$

$$\left\| \frac{\partial^n T}{\partial_{x_1^k x_2^l x_3^m}}(x,t) \right\|_\infty \leq \frac{A_n}{(\|x\|^2+t)^{\frac{3+n}{2}}} \tag{2.7}$$

où $k+l+m=n$ et A_n est une constante.

Enfin, le multiplicateur de Lagrange p associé à cette équation vérifie sous l'hypothèse $\overrightarrow{X} \in L^2$, $p \in H^1$.

Démonstration. On se réfèrera à l'ouvrage de Oseen, Hydrodynamik, [2]. □

Démonstration. En sommant les deux solutions de (2.2) (associée à notre condition initiale régulière) et (2.4) (associée à notre champ de force de carré sommable), on obtient une solution de (2.1) satisfaisant les hypothèses du théorème $2.1.1$; ceci est du au fait que le semi groupe de la chaleur conserve l'incompressibilité $\overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{u}$ initialement présente. □

Nous en arrivons alors au problème de l'unicité. L'avantage de la classe des fonctions L^2 est qu'on est sur, non seulement d'une existence, mais aussi de l'unicité de la solution, à donnée initiale régulière :

Théorème 2.1.2. *Soit $\overrightarrow{u_0}$ une condition initiale régularisée. Il existe une unique solution de Navier-Stokes linéarisée dans la classe des fonctions régulières et de carré sommable à chaque instant, satisfaisant la condition initiale $\overrightarrow{u}(\cdot,0) = \overrightarrow{u_0}$*

Démonstration. L'équation étant linéaire, il suffit de vérifier le théorème à condition initiale nulle, et champ de force nul. Soit $\overrightarrow{u}$ une solution de Navier-Stokes linéarisée, et p la pression correspondante. On définit alors, pour ρ une approximation de l'unité quelconque, les quantités :

$$\overrightarrow{v}(x,t) = \int_0^t \rho * \overrightarrow{u}(x,\tau)d\tau$$

$$q(x,t) = \int_0^t \rho * p(x,\tau)d\tau.$$

Ces fonctions sont de classe C^∞ spatialement, C^1 en temps, par construction.
De plus on a

$$\begin{cases} \triangle \overrightarrow{v} - \dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} - \overrightarrow{\bigtriangledown} q = 0 \\ \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$$

car d'une part, la convolution permet de faire porter les dérivées sur les fonctions $\overrightarrow{u}$ et p, et d'autre part le champ de force est supposé nul. En passant la première ligne à l'opérateur divergence, et en utilisant à la fois le lemme de Schwarz (commutativité des opérateurs dérivées) et la condition d'incompressibilité, on obtient $\triangle q = 0$. En passant alors à nouveau la première ligne à l'opérateur laplacien, on obtient une équation vérifiée par $\triangle \overrightarrow{v}$:

$$\triangle \triangle \overrightarrow{v} - \frac{\partial \triangle \overrightarrow{v}}{\partial t} = 0.$$

De plus, comme $\overrightarrow{u_0}$ est de divergence nulle, il en est de même pour $\overrightarrow{v}(\cdot, 0)$. On déduit alors par une transformée de Fourier dans l'espace des distributions tempérées que $\triangle \overrightarrow{v} = 0$. Or par les inégalités classiques sur la convolution $\overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{v} \in L^2$ d'où l'on déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{v}(x,t)\|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{v}(x,t) \triangle \overrightarrow{v}(x,t) dx = 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{v}(\cdot, t)$ est une constante, de carré sommable (toujours par les inégalités de convolution) d'où l'on déduit $\overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{0}$. Cette nullité étant réalisée pour toutes les approximations de l'unit ?, on en déduit $\overrightarrow{u} \equiv \overrightarrow{0}$. $\square$

La solution de Navier-Stokes linéarisée à condition initiale $\overrightarrow{u_0}$ est alors décrite explicitement par la formule

$$\overrightarrow{u}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overrightarrow{u_0}(y)}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy - \int_{\tau=0}^{t} T(\cdot, t-\tau) * \overrightarrow{X}(\cdot, \tau) d\tau.$$

Cette écriture explicite permet alors de déduire de nombreuses propriétés des solutions. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.2 Propriétés des solutions de l'équation de Navier Stokes

Dans ce paragraphe nous allons utiliser une propriété fondamentale pour la suite : si $\overrightarrow{u}$ est une solution de l'équation de Navier Stokes linéarisée, sous les hypothèses du théorème 2.1.1 alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{u}$ sont continues en t à valeur dans L^2. Nous ne démontrerons pas cette continuité ; elle résulte en fait de la forme explicite de $\overrightarrow{u_1}$ et des inégalités concernant la matrice T, énoncées au lemme (2.1.2). Le lecteur désireux d'en savoir plus pourra consulter par exemple [1].

Nous tirerons de cette propriété la relation de dissipation de l'énergie, également fondamentale pour la suite :

$$\int_0^t \|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau + \frac{1}{2}[\|\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2]_0^t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot\overrightarrow{X}(x,\tau)dxd\tau. \quad (2.8)$$

Théorème 2.2.1. *Soit $\overrightarrow{u}$ une solution régulière de Navier-Stokes linéarisée, sous les hypothèses du théorème* 2.1.1*, d'état initial $\overrightarrow{u_0}$. Alors $\overrightarrow{u}$ satisfait la relation de dissipation de l'énergie* (2.8) *énoncée ci-dessus.*

Démonstration. La preuve se fait en deux temps : dans un premier temps on établit le théorème dans le cas où notre champ de force est à chaque instant à support compact, et dans un deuxième temps on conclura en appliquant des résultats de densité. Supposons donc à présent que pour tout t, $\overrightarrow{X}(\cdot,t)$ est C^∞ à support compact.

Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont respectivement solutions des équations (2.2) et (2.4). Soit $\varepsilon > 0$. On va établir un développement asymptotique de $\overrightarrow{u_1}$, à $t > 0$ fixé.

D'une part, par les critères de convergence d'intégrale, nous avons :

$$\exists R \in \mathbb{R}^+, \int_{\|x\|\geq R} \|\overrightarrow{u_0}(x)\|^2 dx \leq \varepsilon.$$

D'autre part, comme $\|y-x\| \geq |\|y\| - \|x\||$, on a

$$\forall \|x\| \geq R, \int_{\|y\|\leq R} \|x\|^4 \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \|x\|^4 \exp\left(-\frac{(\|x\|-R)^2}{4t}\right).$$

D'où l'on déduit par croissances comparées que :

$$\exists M \geq R, \forall \|x\| \geq M, \int_{\|y\|\leq R} \|x\|^4 \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy \leq \varepsilon.$$

Ces deux inégalités montrent alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|x\| \geq M$,

$$\begin{aligned}
\|x\|^4 \cdot \|\overrightarrow{u_1}(x,t)\| &= \|x\|^4 \cdot \left\| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u_0}(y) \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy \right\| \\
&\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \left\| r \mapsto r^4 \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\right\|_\infty \int_{\|x\|\geq R} \|\overrightarrow{u_0}(y)\| dy \\
&+ \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \|\overrightarrow{u_0}\|_2 \int_{\|x\|\leq R} \|x\|^4 \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy \\
&\leq M(t)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci est l'exacte traduction de $\overrightarrow{u_1}(x,t) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{-4})$ à temps fixé strictement positif. La même comparaison asymptotique s'applique au gradient et au laplacien de $\overrightarrow{u_1}$.

Par une méthode de découpage similaire en tout point à celle utilisée au-dessus, les inégalités sur la matrice T ainsi que le fait que $\overrightarrow{X}$ est à support compact montrent que pour tout $t > 0$,

- $\overrightarrow{u_2}(x,t) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{-3})$
- $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{u_2}(x,t) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{-4})$
- $\triangle\overrightarrow{u_2}(x,t) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{-5})$.

Ces comparaisons vont nous servir pour établir la relation de dissipation d'énergie. En multipliant la première ligne de l'équation (2.1) par $\overrightarrow{u}$, on obtient

$$\overrightarrow{u}\cdot\triangle\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\|\overrightarrow{u}\|^2}{\partial t} - \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\bigtriangledown}p = -\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{X}.$$

que l'on peut intégrer spatialement pour tout $t > 0$ sous la forme

$$\|\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_2^2 - \frac{1}{2}) \in_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial\|\overrightarrow{u}(x,\cdot)\|^2}{\partial t}dx - \int_{\mathbb{R}^3}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\bigtriangledown}p = -\int_{\mathbb{R}^3}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{X}.$$

La continuité à valeurs dans L^2 permet alors d'intégrer temporellement : en effet, cette relation reste évidemment vraie en $t = 0$ et chacun des termes de cette égalité sont les expressions de fonctions continues de t (par définition de la continuité à valeur dans L^2). Nous en déduisons dès lors la relation de dissipation de l'énergie :

$$\int_0^t \|\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau + \frac{1}{2}[\|\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2]_0^t = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot\overrightarrow{X}(x,\tau)dxd\tau.$$

Considérons à présent le cas où $\overrightarrow{X}$ est seulement L^2, de carré sommable. Les théorèmes de densité montrent qu'on peut approcher au sens L^2 notre champ de force $\overrightarrow{X}(\cdot,t)$ par des fonctions $\overrightarrow{X_n}(\cdot,t)$ C^∞ à support compact. On peut même imposer à cette approximation qu'elle soit uniforme en temps, sur tout compact : c'est une conséquence du fait que le maximum de $\overrightarrow{X}(\cdot,t)$ est une fonction continue du temps. Posons $\overrightarrow{u_n}$ la solution correspondant au théorème 2.1.2 avec champ de force $\overrightarrow{X_n}$. Nous avons dès lors :

$$\|x\|^{\frac{5}{2}}\|\overrightarrow{u}(x,t) - \overrightarrow{u_n}(x,t)\| \leq \int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^3}\|T(x,\tau)\|^2\cdot\|x\|^{\frac{5}{2}}dx\right)\cdot\|\overrightarrow{X}(\cdot,\tau) - \overrightarrow{X_n}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau.$$

L'uniformité de la convergence assure alors que $\overrightarrow{u}(x) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{\frac{5}{2}})$. Des relations de comparaisons similaires s'en déduisent de la même manière : nous avons

- $\overrightarrow{u_2}(x,t) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{-5/2})$
- $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{u_2}(x,t) = o_{\|x\|\to+\infty}(\|x\|^{-7/2})$.

On en déduit ainsi que l'on peut également intégrer spatialement, puis temporellement (en s'appuyant sur la continuité à valeurs dans L^2) l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{u}\cdot\triangle\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\|\overrightarrow{u}\|^2}{\partial t} - \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\bigtriangledown}p = -\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{X},$$

qui donne là encore la relation de dissipation de l'energie. □

On va à présent donner certaines inégalités simples, nécessaires dans le paragraphe suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ les fonctions présentées au paragraphe précédent. Posons pour $t \in \mathbb{R}^+$, $V_1(t) = \sup\{\|\overrightarrow{u_1}(x,t)\|, x \in \mathbb{R}^3\}$ et son analogue $V_2(t)$. Alors on a :*

- $\forall t \geq 0$, $V_1(t) \leq \|\overrightarrow{u_0}\|_\infty = V_1(0)$
- $\forall t \geq 0$, $V_2(t) \leq A\int_0^t \|\overrightarrow{X}(\cdot,t)\|_\infty \dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$

Démonstration. La démonstration est très simple et nécessite les inégalités à propos du comportement de la matrice T, (2.6) et (2.7). On consultera éventuellement [1] et [2] pour une résolution plus détaillée. □

3 Equation de Navier-Stokes dans le cas régulier

3.1 Etude *a priori* de l'équation de Navier-Stokes

On appelle équation de Navier-Stokes le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \triangle\overrightarrow{u} - \dfrac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} - \overrightarrow{\bigtriangledown}p = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\bigtriangledown})\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{\bigtriangledown}\cdot\overrightarrow{u} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

On appellera solution régulière de ce système une fonction $\overrightarrow{u}$ vérifiant :

- $\overrightarrow{u}$ est définie sur $[0,t_0[\times\mathbb{R}^3$;
- $\overrightarrow{u}$ est de classe C^2 en x, C^1 en t ;
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{u}$ sont continues en t à valeurs dans L^2 (ce qui implique en particulier que $\overrightarrow{u}(\cdot,t) \in H^1$ à tout instant t) ;

– $\sup\{\|\overrightarrow{u}(x,t)\|, x \in \mathbb{R}^3\}$ est inférieure à une fonction continue de t.

Supposons que pour une certaine donnée initiale $\overrightarrow{u_0}$ cette équation admette une solution régulière définie sur un intervalle $[0, t_0[$. Alors le théorème d'unicité (2.2.1) montre que

$$\overrightarrow{u}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overrightarrow{u_0}(y)}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \exp(\frac{-\|y-x\|^2}{4t})dy + \int_{\tau=0}^{t} T(\cdot, t-\tau) * (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

Cette équation intégrale incite dès lors à introduire l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} L: & F(\mathbb{R}_*^+, H^1) & \longrightarrow & F(\mathbb{R}_*^+, H^1) \\ & \overrightarrow{u} & \longmapsto & L\overrightarrow{u} \end{array}$$

où $L\overrightarrow{u}(t) = \int_{\tau=0}^{t} T(\cdot, t-\tau) * (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)d\tau$, et $F(\mathbb{R}_*^+, H^1)$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_*^+$ vers H^1

Cet opérateur est bien défini, notamment en ce qui concerne l'espace d'arrivée. En effet, l'action de la matrice T (qui est C^∞ en x et en $t > 0$) sur une donné de classe C^2 $\overrightarrow{u}$ conserve la régularité, et l'appartenance à l'espace de Sobolev H^1.

On va alors raisonner d'une manière similaire à la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz : on ne perd pas de régularité en appliquant l'opérateur L, qui conserve donc la classe $C^2 \cap H^1$ des données initiales, ce qui permet une itération de L, et la construction d'un point fixe pour l'opérateur $L + \overrightarrow{u}^0$ où $\overrightarrow{u}^0$ est une fonction que l'on définira par la suite. Cette propriété est fondamentale pour ce qui suit.

Notons tout de même une subtilité : comme $T(\cdot, t)$ est C^∞ seulement pour les instants strictements positifs, nous devrons vérifier que (sous reserve de convergence) la solution obtenue par itération de L se prolonge bien en une solution de classe C^2 correspondant à la donnée initiale pour $t = 0$.

C'est **la méthode « *a priori* »de Jean Leray** : sous l'hypothèse d'existence de solutions de classe C^2, on a une équation intégrale vérifiée par celles-ci, ce qui incite à introduire certaines actions. Leray met ainsi de coté l'intuition dans son article fondateur [1] au profit de cette démarche : il explique implicitement les fondements de son analyse, à travers notamment l'équation de Navier-Stokes linéarisée.

3.2 Existence locale de solutions fortes de l'équation de Navier-Stokes

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Soit $\overrightarrow{u_0}$ une donnée initiale régulière (on rappelle que c'est une fonction vectorielle de classe C^2, de carré sommable et de divergence nulle), qui de plus est dans H^1. Alors le système* (3.1) *admet une solution correspondant à $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{u}(\cdot, 0)$, définie sur un intervalle $[0, t_0[$ avec $t_0 > 0$, éventuellement infini, et dans la classe des fonctions $C^1([0, t_0[, H^1 \cap C^2)$*

De plus, la preuve est constructive, on peut donc disposer d'un algorithme qui approxime les solutions.

Démonstration. Le but est comme on l'a proposé dans le paragraphe précédent d'itérer l'opérateur L. Le problème est que l'on ne dispose pas au départ d'une fonction du temps, de classe C^2. L'idée de Leray pour contrer ce problème est d'utiliser l'équation de la chaleur pour en créer une, pas "trop" éloignée des équations de Navier-Stokes.

Posons à ce titre

$$\overrightarrow{u}^0(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u_0}(y) \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy \tag{3.3}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \overrightarrow{u}^{n+1} = L\overrightarrow{u}^n + \overrightarrow{u}^0. \tag{3.4}$$

On va commenter formellement cette définition :

- Notre fonction vectorielle $\overrightarrow{u}^0$ satisfait la condition initiale $\overrightarrow{u}^0(\cdot, 0) = \overrightarrow{u_0}$.
- L'opérateur L envoie les fonctions $\overrightarrow{u}$ sur les solutions de l'équation (2.4) satisfaisant une condition initiale nulle, avec un champ de vecteur $\overrightarrow{X} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown})(\overrightarrow{u})$. Ainsi rajouter $\overrightarrow{u}^0$ permet d'assurer une condition initiale égale à $\overrightarrow{u_0}$.
- Sous réserve de convergence dans un sens L^2 et uniforme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{u}$, on peut intuiter qu'une limite satisferait l'équation de Navier-Stokes. Le problème est de montrer d'une part que notre limite est bien régulière au sens défini ci-dessus et de plus qu'elle satisfait la condition initiale.

Les inégalités du lemme $(2.2.1)$ nous montrent alors que, si l'on note $V_n(t) = \|\overrightarrow{u}^n(\cdot, t)\|_\infty$, on a $V_0(t) \leq \|\overrightarrow{u_0}\|_\infty := V(0)$ mais aussi et surtout :

$$V_{n+1}(t) \leq A \int_0^t \frac{V_n(\tau)^2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + V(0).$$

Par une récurrence assez simple, si ϕ est une application qui vérifie

$$\phi(t) \geq A \int_0^t \frac{\phi(\tau)^2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + V(0) \tag{3.5}$$

alors on a pour tout $n \geq 0$, $V_n(t) \leq \phi(t)$. Ces inégalités sont précieuses car elles vont permettre d'évaluer le temps t_0 d'existence des solutions, et également donner des informations sur la nature d'éventuelles singularités. En effet, posons

$$\phi(t) = (1+A)V(0)$$
$$t_0 = \left[\frac{1}{2(1+A)^2 V(0)}\right]^2$$

alors ϕ vérifie (3.5) sur $[0, t_0[$. De plus, considérons les $\overrightarrow{u}^n$ que l'on restreint à $[0, t_0[\times \mathbb{R}^3$. Nous avons dès lors :

$$\|\overrightarrow{u}^{n+1} - \overrightarrow{u}^n\|_\infty \leq 2AV(0)\sqrt{t_0}\|\overrightarrow{u}^n - \overrightarrow{u}^{n-1}\|_\infty = \frac{A}{(1+A)^2}\|\overrightarrow{u}^n - \overrightarrow{u}^{n-1}\|_\infty.$$

Cette inégalité montre alors qu'avec ce choix de t_0, la convergence des $\overrightarrow{u}^n$ a un sens uniforme : c'est une conséquence de la règle de d'Alembert et de la complétude de l'ensemble des fonctions continues bornées. On peut de plus montrer de la même manière que la convergence des dérivées spatio (première et seconde) - temporelle (première) sont uniforme. De plus, remarquons que

$$L\overrightarrow{u}(\cdot, t) = \int_0^t \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_k}(\cdot, t-\tau) * (u_k \overrightarrow{u})(\cdot, \tau) d\tau$$

de sorte que l'opérateur L est continu dès que les espaces d'arrivée et de départ sont munis de la norme de la convergence uniforme (en effet, $\overrightarrow{\bigtriangledown} T(x,t) = O(\|x\|^{-4})$ uniformément en t par l'inégalité (2.7)).

On peut montrer de plus que $\overrightarrow{u} \in C^0([0, t_0[, H^1)$, par des calculs similaires à ceux effectués pour montrer que $(\overrightarrow{u_n})$ était bien uniformément convergente (on pourra par exemple consulter [1]), qui impliqueront entre autres que $\overrightarrow{u_n}$ converge vers $\overrightarrow{u}$ dans H^1. Montrons à présent que l'opérateur L à t fixé est continu lorsque les espaces sous-jacents sont munis de la norme de H^1 :

$$\|L\overrightarrow{w} - L\overrightarrow{v}\|_{H^1} \leq \int_0^t (\|T(\cdot,\tau)\|_1 + \|\overrightarrow{\bigtriangledown} T(\cdot,\tau)\|_1)\|(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown}\overrightarrow{v})(\cdot,\tau)\|_2 d\tau$$

$$\Rightarrow \|L\overrightarrow{w} - L\overrightarrow{v}\|_{H^1} \leq Cte(t) \cdot \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|_{H^1}^2,$$

en utilisant les inégalités vérifiées par la matrice T, (2.6) et (2.7).

Ainsi $\overrightarrow{u}$ vérifie $\overrightarrow{u} = L\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_0}$, par continuité de L, ce qui est exactement l'équation intégrale.

Reste à montrer que $\overrightarrow{u}$ se prolonge en une solution régulière lorsque t tend vers 0, satisfaisant la condition initiale. C'est en fait une conséquence classique des propriétés du semi-groupe de la chaleur : en effet, pour toute application f de classe C^2, pour tout entier $i \in \{0,1,2\}$

$$f^{(i)}(x,0) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^{(i)}(y)}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{-\|y-x\|^2}{4t}\right) dy.$$

Ce qui implique en particulier que notre solution $\overrightarrow{u} \in C^2(]0,t_0[\times\mathbb{R}^3)$ se prolonge en une solution de $C^2([0,t_0[\times\mathbb{R}^3)$, satisfaisant la condition initiale. Ainsi par le théorème d'unicité $(2.2.1)$, d'après les propriétés de régularité de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ vérifie l'équation de Navier-Stokes, et se trouve même être solution régulière. □

3.3 Relation de dissipation de l'énergie et propriétés des solutions

Nous allons démontrer l'analogue de la formule (2.8). Cette formule est à la fois très simple à montrer à partir de l'équation intégrale et se trouve être fondamentale pour la suite de l'article.

Théorème 3.3.1. *Soit $\overrightarrow{u}$ une solution régulière de l'équation de Navier-Stokes régulière au sens défini précédemment. Alors $\overrightarrow{u}$ vérifie la relation de dissipation suivante :*

$$\forall\theta \in [0,t], \int_\theta^t \|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau + \frac{1}{2}[W(\tau)]_\theta^t = 0, \tag{3.6}$$

où l'on a noté $\|\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_2^2 = W(t)$.

Démonstration. D'après la formule (2.8) de dissipation de l'énergie pour l'équation linéarisée, $\overrightarrow{u}$ vérifie l'équation de dissipation suivante :

$$\int_0^t \|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau - \int_0^t \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}(\cdot,\tau)\|_2^2 d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u})(x,\tau) dx d\tau.$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}2\int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u})(x,\tau)dx &= \int(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})(\|\overrightarrow{u}(x,\tau)\|^2)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\|\overrightarrow{u}(x,\tau)\|^2\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u}(x,\tau)dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

en utilisant les relations d'intégration par partie et la condition d'incompressibilité. Ainsi la relation de dissipation (3.8) est prouvée. □

Nous allons à présent donner deux inégalités dont on omettra la preuve (consulter [1] par exemple). Ces inégalités sont des propriétés des solutions construites lors de la preuve du théorème $3.2.1$ et serviront au chapitre suivant :

Lemme 3.3.1. *Soit $\overrightarrow{u}$ solution régulière de Navier-Stokes construite par le procédé du paragraphe précédent. Posons alors à nouveau $W(t) = \|\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_2^2$ et $V(t) = \|u(\cdot,t)\|_\infty$, ainsi que $J(t) = \|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_2^2$. Alors nous avons les inégalités (où A', A'', A''' sont des constantes) :*

$$V(t) \leq A'\int_{t_0}^{t}\min\left(\frac{V^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}},\frac{W(\tau)}{(t-\tau)^2}\right)d\tau + \min\left(V(t_0),\frac{A'''J(t_0)}{(t-t_0)^{1/4}}\right) \tag{3.7}$$

$$J(t) \leq A''\int_0^t \frac{J(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{3.8}$$

3.4 Unicité au problème de Cauchy pour l'équation de Navier-Stokes :

Une fois le théorème d'existence acquis, ainsi que la relation de dissipation de l'énergie nous allons nous focaliser sur l'unicité. Celle-ci peut paraître moins fondamentale mais c'est une fausse impression : c'est bien l'unicité donnée par le théorème $2.2.1$ qui amène l'équation intégrale fondamentale.

Théorème 3.4.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ deux solutions régulières de l'équation de Navier-Stokes, définie sur $[0,t_0[\to H^1$ et qui coïncident en $\theta\in[0,t_0[$. Alors elles sont égales pour tout $t\in[\theta,t_0[$*

Démonstration. On remarque que $\overrightarrow{v}$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases}\triangle\overrightarrow{v} - \dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}p = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u}) + ((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{v}) \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v} = 0.\end{cases} \tag{3.9}$$

Posons alors $w(t) = \|\overrightarrow{v}(\cdot,t)\|_2^2$ et $j(t) = \|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{v}(\cdot,t)\|_2$; ainsi que $V(t) = \|\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_\infty$. Nous avons alors par la relation intégrale donnée par l'unique solution de l'équation de Navier-Stokes linéarisée :

$$\begin{aligned}\int_\theta^t j^2(\tau)d\tau + \frac{1}{2}w(t) &= \int_\theta^t \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{v} \cdot [(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u}) + ((\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{v})] \\ &= \int_\theta^t \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u})\end{aligned}$$

par, comme d'habitude, les formules d'intégration par partie et la condition d'incompressibilité. Cette égalité montre que w est continue partout et dérivable presque partout et nous en sortons ainsi (toutes les égalités que nous écrivons sont valables presque partout à présent) :

$$j^2(t) + \frac{1}{2}w'(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u}). \tag{3.10}$$

De plus, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{u}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{v}) \leq j(t)V(t)\sqrt{w(t)}.$$

Ainsi $w(t)$ vérifie l'inéquation différentielle suivante :

$$j^2(t) + \frac{1}{2}w'(t) \leq j(t)\sqrt{w(t)}V(t).$$

La mise en forme canonique montre alors que :

$$2w'(t) \leq w(t)V^2(t).$$

Or posons $g(t) = w(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_\theta^t V(\tau)^2 d\tau\right)$, g décroit, est positive et nulle en $t = \theta$ d'où w est nulle presque partout, continue, elle est donc nulle. $\square$

3.5 Caractère des singularités

Le but de ce chapitre est de représenter les éventuelles singularités d'une solution $\overrightarrow{u}$ qui ne serait pas définie pour tout instant postérieur à l'instant initial. Nous en tirerons des caractères de régularité, et ces formules seront extrêmement importantes pour le chapitre suivant.

Théorème 3.5.1. *Soit une solution régulière de l'équation de Navier-Stokes, régulière sur* $[0, t_0[$*, maximale, avec* t_0 *fini. Alors* $\overrightarrow{u}$ *est non bornée au voisinage de* t_0*, et plus précisément,*

$$V(t) \geq (1 + A)\sqrt{\frac{2}{t_0 - t}}. \tag{3.11}$$

où $V(t) = ||\overrightarrow{u}(\cdot, t)||_{infty}$*. Nous appellerons cette formule le premier caractère d'irrégularité.*

Démonstration. Soit $\theta \in [0, t_0[$. Posons $\overrightarrow{v}(x, t) = \overrightarrow{u}(x, \theta + t)$. Alors $\overrightarrow{v}$ est solution régulière des équations de Navier-Stokes, coïncide avec $\overrightarrow{u}(\cdot, \theta)$ en $t = 0$ et n'est pas définie dès que $t = t_0 - \theta$. En effet, dans le cas contraire, $\overrightarrow{v}(\cdot, \cdot - \theta)$ prolongerait strictement $\overrightarrow{u}$ d'après le théorème d'unicité.

De plus, dans la démonstration du théorème d'existence, on a montré que $\overrightarrow{v}$ existait pour un temps supérieur à $(2(1+A)^2 \sup \|\overrightarrow{v}(\cdot, 0)\|_\infty)^{-2}$. Il en résulte que

$$t_0 - \theta \geq \frac{1}{(2(1 + A)^2 V(\theta))^2}$$

ce qui permet de conclure. □

Nous allons maintenant donner une représentation supplémentaire des irrégularités, ainsi qu'un critère de régularité à temps infini. Nous omettrons les preuves, le lecteur consultera avantageusement [1] par exemple.

Théorème 3.5.2. *Soit* $\overrightarrow{u}$ *une solution régulière maximale de l'équation de Navier-Stokes, définie sur* $[0, t_0[$*. Posons* $J(t) = \|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}(\cdot, t)\|_2^2$ *et* $W(t) = \|\overrightarrow{u}(\cdot, t)\|_2^2$*. Alors*

- *Si* t_0 *est fini, alors* $J(t) \leq \dfrac{A}{(t_0 - t)^{1/4}}$ *;*
- *Si* $[W(t) \cdot J^2(t)] \leq A$ *(où A est une constante universelle indépendante de* $\overrightarrow{u}$*, qui a été définie à partir de* T *dans le chapitre précédent), pour un instant* $t \in [0, t_0[$ *quelconque, alors nous avons* $t_0 = +\infty$*.*

Plus généralement, il existe des critères sur les normes L^p *des solutions concernant leur régularité ou leur irrégularité, dès que* $p \in [2, 6]$ *(ce qui a un sens puisque par injection de Sobolev,* $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$*).*

4 Equation de Navier-Stokes régularisée :

4.1 Problème de Cauchy associé à l'équation régularisée

Soit ρ_ε l'approximation de l'unité mentionnée en annexe, et l'équation dite "régularisée" de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \triangle \overrightarrow{u} - \dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla} p = ((\rho_\varepsilon * \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Cette équation est intuitivement très proche des équations de Navier-Stokes lorsque $\varepsilon \to 0$. Aussi on a :

Théorème 4.1.1. *Le système précédent admet une unique solution régulière $\overrightarrow{u_\varepsilon}$ correspondant à un état régulier initial donné ; de plus cette solution est définie pour tout temps positif.*

Notations :
Pour tout indice a, si $\vec{u_a} \in \mathbb{R}^3$ est une fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, alors on note $W_a(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \|\vec{u_a}(x,t)\|^2 dx$, $J_a(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \vec{u_a}(x,t)\|^2 dx$ et $V_a(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \|u_a(x,t)\|$.

On remarque que la partie linéaire de la première équation de ce système est la même que pour les équations de Navier-Stokes. Dès lors en faisant la même étude que précédemment, on obtient :

Démonstration. Tout ce qui a été vu sur l'équation de Navier-Stokes peut s'appliquer à l'équation régularisée. On a donc existence et unicité d'une solution régulière sur un intervalle $[0, T[$ avec $T > 0$. Il ne reste plus qu'à montrer que $T = \infty$.
En appliquant l'inégalité de Schwartz, on obtient, pour tout t :

$$\|(\rho_\varepsilon * \vec{u_\varepsilon})(., t)\|_\infty \leq A \varepsilon^{-3/2} \sqrt{W_\varepsilon(t)}$$

ce qui permet, avec la relation de dissipation de l'énergie de réécrire (voir chapitre précédent : 3.6) :

$$V_\varepsilon(t) \leq B \varepsilon^{-3/2} \sqrt{W_\varepsilon(0)} \int_0^t \frac{V_\varepsilon(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + V_\varepsilon(0).$$

On en déduit le fait que sur $[0,T[$, $V(t)$ reste inférieure à la fonction $\varphi(t)$ qui satisfait l'équation intégrale :

$$\varphi(t) = B\varepsilon^{-3/2}\sqrt{W_\varepsilon(0)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + V_\varepsilon(0).$$

Dès lors, si T est fini, $V(t)$ reste borné ; ceci contredit le premier caractère des irrégularités. D'où $T = \infty$. $\square$

4.2 Répartition de l'énergie cinétique

Nous cherchons alors à nous renseigner sur la manière dont est localisée l'énergie cinétique $\frac{1}{2}||\overrightarrow{u_\varepsilon}(x,t)||^2$ d'une telle solution $\overrightarrow{u_\varepsilon}$. En effet, cela revient à rechercher des quantités qui pourraient s'avérer invariantes ou quasi-invariantes par rapport à ε.

Théorème 4.2.1. *Soit $\overrightarrow{u_\varepsilon}$ solution du système précédent, alors on a $\forall t \geq 0$, $\forall R_1 \leq R_2$,*

$$\int_{||x||\geq R_2} \frac{1}{2}||\overrightarrow{u_\varepsilon}(x,t)||^2 dx \leq \int_{||x||\geq R_1} \frac{1}{2}||\overrightarrow{u_\varepsilon}(x,0)||^2 dx + \frac{W_\varepsilon(0)\sqrt{t}}{\sqrt{2}(R_2-R_1)} + \frac{W_\varepsilon(0)^{3/2}t^{1/4}}{2^{1/4}\pi^{1/2}(R_2-R_1)}.$$

Démonstration. On considère la fonction f :

- $f(x) = 0$ pour $\|x\| \leq R-1$
- $f(x) = \frac{\|x\|-R_1}{R_2-R_1}$ pour $R_1 \leq \|x\| \leq R_2$
- $f(x) = 1$ pour $\|x\| \geq R_2$

Un calcul analogue à celui qui fournit la relation de dissipation de l'énergie nous donne :

En minorant le premier terme (assez grossièrement) et en majorant le deuxième terme (en utilisant notamment des inégalités de Schwartz), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \|\vec{u_\varepsilon}(x,t)\|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \|\vec{u_\varepsilon}(x,0)\|^2 dx + \\ \frac{\sqrt{W_\varepsilon(0)}}{R_2R_1}\int_0^t J_\varepsilon(\tau)d\tau \\ + \frac{\sqrt{W_\varepsilon(0)}}{R_2R_1}\int_0^t d\tau\sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} {p_\varepsilon}^2(x,\tau)dx} \\ + \frac{\sqrt{W_\varepsilon(0)}}{R_2R_1}\int_0^t d\tau\frac{1}{2}\sqrt{W_\varepsilon(\tau)}\end{aligned}$$

.

Il ne nous reste plus qu'à majorer les trois derniers termes du membre de droite de l'inégalité.

– Pour le premier, on utilise l'inégalité de Schwarz :

$$\int_0^t J_\varepsilon(\tau)d\tau \leq \sqrt{\frac{W_\varepsilon(0)}{2}}\sqrt{t}.$$

– Pour le deuxième, l'expression de la pression (voir chapitre précédent) ainsi que l'inégalité de Hardy, puis l'inégalité de Schwarz nous apprennent que :

$$\int_0^t dl \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} {p_\varepsilon}^2(x,l)dx} \leq \frac{W_\varepsilon(0)}{\sqrt{2\pi}} t^{1/4}.$$

– Enfin, pour le dernier terme, on a (voir la démonstration de l'inégalité de Hardy) ;

$$\frac{1}{2}\|\vec{u_\varepsilon}(x,t)\|^2 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}\frac{1}{\|x-y\|}.\vec{\nabla}\vec{u_\varepsilon}(y,t).\vec{u_\varepsilon}(y,t)dy.$$

D'où :

$$\int_0^t \frac{1}{2}\sqrt{W_\varepsilon(\tau)}d\tau \leq \frac{W_\varepsilon(0)}{\sqrt{2\pi}} t^{1/4}.$$

Ces trois majorations nous permettent d'obtenir facilement le résultat final. □

Ce résultat nous servira dans la démonstration du théorème suivant (on l'utilise dans le troisième point des préliminaires de la démonstration).

5 Existence globale d'une solution turbulente

On revient au problème principal : l'équation de Navier-Stokes. Nous allons essayer de trouver une solution dans un espace plus grand que l'ensemble des fonctions régulières. Ainsi, plutôt que de s'intéresser à la définition ponctuelle d'une éventuelle solution, nous allons nous intéresser à son action sur des fonctions tests. Ainsi, on a vu que pour les solutions régulières (à temps petit) de Navier-Stokes, on avait, en notant $\vec{u}$ la solution régulière et si $\vec{a}(x,t)$ est régulière, de divergence nulle et dont toutes les dérivées sont uniformément et fortement continue en t (voir annexe), l'équation intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(x,t)\cdot\vec{a}(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(x,0)\cdot\vec{a}(x,0)dx$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot[\vec{\triangle}\overrightarrow{a}(x,\tau) + \frac{\partial \overrightarrow{a}(x,\tau)}{\partial t}]dx$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)(\vec{\nabla}\overrightarrow{u}(x,\tau))\overrightarrow{a}(x,\tau)dx.$$

C'est ce qui motive la définition suivante de solution turbulente.

Définition :
On dit que $\overrightarrow{u}(x,t)$ est une solution turbulente de l'équation de Navier Stokes si

– $\overrightarrow{u}$ est défini pour presque tout $t > 0$ et $\overrightarrow{u}(.,t) \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

– $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ lorsque $\overrightarrow{u}(\cdot,t)$ est définie.

– Si $\overrightarrow{a}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ est régulière, de divergence nulle et dont toutes les dérivées sont uniformément et fortement continue en t (voir annexe), alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(x,t)\cdot\vec{a}(x,t)dx - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot[\vec{\triangle}\overrightarrow{a}(x,\tau) + \frac{\partial \overrightarrow{a}(x,\tau)}{\partial t}]dx$$
$$- \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)(\vec{\nabla}\overrightarrow{u}(x,\tau))\overrightarrow{a}(x,\tau)dx$$

est une fonction constante de t (définie presque partout). On dit de plus que $\vec{U}(x) \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est l'état initial si :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(x,t)\cdot\vec{a}(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{U}(x)\cdot\vec{a}(x,0)dx$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot[\vec{\triangle}\overrightarrow{a}(x,\tau) + \frac{\partial \overrightarrow{a}(x,\tau)}{\partial t}]dx$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot\vec{\nabla}\overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot\overrightarrow{a}(x,\tau)dx$$

Les fonctions $\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial x_k}$ (présentes dans le gradient de $\overrightarrow{u}$) sont les dérivées au sens des distributions de $\overrightarrow{u}$.

– La fonction

$$\int_0^t J^2(\tau)d\tau + \frac{1}{2}W(t)$$

(où $W(t) = \|\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_{L^2}^2$ et $J(t) = \|\vec{\nabla}\overrightarrow{u}(\cdot,t)\|_{L^2}^2$) est décroissante : cela correspond à la dissipation de l'énergie.

Théorème 5.0.2. *Si $\vec{U}(x) \in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ et tel que $\vec{\nabla}.\vec{U} = 0$ alors il existe $\overrightarrow{u}(x,t)$ solution turbulente de l'équation de Navier-Stokes (définie donc pour t>0 à un ensemble de temps de mesure nulle près) d'état initial $\vec{U}(x)$.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

5.1 Préliminaires

On considère $\vec{u_n}(x,t)$ la solution du problème régularisé pour $\varepsilon = 1/n$ et d'état initial $\rho_{1/n} * \vec{U}$.
Nous utiliserons essentiellement trois propriétés de cette suite de fonctions.

– (A). Si $\overrightarrow{a}(x,t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, régulière, de divergence nulle, et dont toutes les dérivées sont uniformément et fortement continues en t, alors : pour t strictement positif et n un entier, on retrouve l'équation intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u_n}(x,t)\cdot\vec{a}(x,t)dx = &\int_{\mathbb{R}^3}(\rho_{1/n} * \vec{U})(x)\cdot\vec{a}(x,0)dx \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u_n}(x,\tau)\cdot[\vec{\triangle}\overrightarrow{a}(x,\tau) + \frac{\partial\overrightarrow{a}(x,\tau)}{\partial t}]dx \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3}(\rho_{1/n} * \vec{u_n})(x,\tau)\cdot\vec{\nabla}\overrightarrow{a}(x,\tau)\cdot\vec{u_n}(x,\tau)dx\end{aligned}$$

.

– (B). La relation de dissipation de l'énergie : Si $0 \le t_0 \le t$ alors

$$\int_{t_0}^t J_n(\tau)^2 d\tau + \frac{1}{2}W_n(t) = W_n(t_0).$$

– (C). Soit $R(\eta)$ une longueur telle que $\int_{\|x\|>R(\eta)} \|\overrightarrow{u}(x)\|^2 dx = \eta/2$, et soit $b(\eta,t)$ la boule de centre 0 et de rayon :

$$R(\eta) + \frac{4}{\eta}\left[\frac{W(0)\sqrt{t}}{\sqrt{2}} + \frac{W(0)^{3/2}t^{1/4}}{2^{1/4}\pi^{1/2}}\right[.$$

On a, en utilisant le paragraphe précédent sur la répartition de l'énergie cinétique :

$$\limsup_n \int_{\mathbb{R}^3 - b(\eta,t)} \|\vec{u_n}(x,t)\|^2 dx \leq \eta.$$

5.2 1ère étape : convergence L^2-faible de u_n vers u

En notant $W(0) = \|\overrightarrow{u}(x)\|_{L^2}$, on a :

$$\forall t, W_n(t) \leq W(0).$$

Dès lors, le procédé diagonal de Cantor permet d'extraire une sous-suite telle que les fonctions $W_n(t)$ convergent pour chaque valeur rationnelle de t vers une fonction décroissante que l'on note W. On a de plus : $\forall t$,

$$\liminf_n W_n(t) \leq \liminf_{t' \leq t; t' \in Q} W(t)$$

et

$$\limsup_n W_n(t) \geq \limsup_{t' \leq t; t' \in Q} W(t)$$

.

Or les points de discontinuité d'une fonction décroissante sont dénombrables. Donc hormis pour un nombre dénombrable de valeurs de t, on a

$$\liminf_{t' \leq t; t' \in Q} W(t) = \limsup_{t' \leq t; t' \in Q} W(t)$$

et donc on a convergence (au procédé diagonal près) de $W_n(t)$ vers une valeurs $W(t)$. Par un second procédé diagonal de Cantor, on extrait à nouveau une sous-suite telle que $W_n(t)$ converge pour les valeurs restantes de t. Notons que la fonction $W(t)$ est décroissante. Par ailleurs cette nouvelle définition de $W(0)$ est en accord avec $W(0) = \|\overrightarrow{u}(x)\|_{L^2}$.
Par ailleurs, l'inégalité $W_n(t) \leq W(0)$ prouve que, lorsque ϖ est borné, chacune des intégrales :

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\varpi} \vec{u_n}(x,\tau) dx$$

et

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\varpi} \|\vec{u_n}(x,\tau)\|^2 dx$$

restent bornées indépendamment de n (il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant la bornitude de ϖ). Une troisième application du procédé diagonal de Cantor permet d'extraire une sous suite telle que chacune de ces intégrales converge pour t_1 et t_2 rationnels et pour ϖ un cube d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées et de sommets à coordonnées rationnelles. Alors, si $\overrightarrow{a}(x,t)$ est régulière, uniformément et fortement continue en t, et comme $\forall n, W_n(t) \leq W(0)$, on peut affirmer que chacune des intégrales

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u_n}(x,\tau) \cdot [\vec{\triangle} \overrightarrow{a}(x,\tau) + \frac{\partial \overrightarrow{a}(x,\tau)}{\partial t}]dx$$

et

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_{1/n} * \vec{u_n})(x,\tau) \cdot \vec{\nabla} \overrightarrow{a}(x,\tau) \cdot \vec{u_n}(x,\tau)dx$$

a une limite quand n tend vers ∞ (il suffit d'utiliser des arguments de densité avec le résultat précédent). On en déduit, à partir de l'équation de Navier-Stokes régularisée, que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u_n}(x,t) \cdot \overrightarrow{a}(x,t)dx$$

converge vers une limite unique. En d'autres termes, pour chaque valeur de t, $\vec{u_n}(\cdot,t)$ converge faiblement dans L^2 vers une limite $\overrightarrow{u}(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.
On a donc montré qu'il existe une extraction φ telle que pour tout t, $\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(\cdot,t)$ converge faiblement dansL^2 vers une limite $\overrightarrow{u}(.,t)$. Etudions maintenant plus précisément la limite $\overrightarrow{u}$.

5.3 2ème étape : $\overrightarrow{u} \in H^1$

Remarquons d'abord que comme $\overrightarrow{u}(.,t)$ est la limite faible dans L^2 de $\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(\cdot,t)$, on a :

$$\forall t, W(t) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}(x,t)\|^2 dx.$$

D'autre part la relation de dissipation de l'énergie (B), valable pour tous les $\vec{u_{\varphi(n)}}$ nous donne :

$$\int_0^\infty [\liminf J_{\varphi(n)}(\tau)]^2 d\tau \leq \frac{1}{2}W(0).$$

La limite inférieure de $J_{\varphi(n)}(t)$ ne peut donc être égale à ∞ que pour un ensemble de valeurs noté A^c dont la mesure est nulle. Soit t_1 dans le complémentaire de cet ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire $t_1 \in A$. Par définition de la liminf, on peut extraire une sous-suite de $(\varphi(n))$ telle que les suites de fonctions

$\frac{\partial \overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(\cdot,t_1)}{\partial x_i}$ soient bornées dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Dès lors, la suite $(\vec{u}_{\varphi(n)})_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. Par le théorème de Kakutani , et comme $H^1(\mathbb{R}^3)$ est réfléxif, il existe une nouvelle extraction que l'on note ψ telle que $\overrightarrow{u}_{\varphi(\psi(n))}(\cdot,t_1)$ converge faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ vers une limite $\vec{g} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Comme $\overrightarrow{u}_{\varphi(\psi(n))}(\cdot,t_1)$ converge déjà faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ vers $\overrightarrow{u}(\cdot,t_1)$, on en déduit que $\overrightarrow{u}(\cdot,t_1) = \vec{g}$ et donc $\overrightarrow{u}(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$. On note $\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial x_i}(\cdot,t_1)$ ses dérivées (au sens des distributions).
Par ailleurs, la convergence faible dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ nous donne le fait que $\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{u}(\cdot,t_1) = 0$.

5.4 3ème étape : dissipation de l'énergie pour $\overrightarrow{u}$

On considère toujours $t_1 \in A$. Sur tout ouvert borné et régulier ϖ, comme l'inclusion $H^1(\varpi) \to L^2(\varpi)$ est compacte, il existe une extraction χ telle que les fonctions $\overrightarrow{u}_{\varphi(\chi(n))}(\cdot,t_1)$ convergent fortement dans $L^2(\varpi)$ vers $\overrightarrow{u}(\cdot,t_1)$. On notera désormais $\varphi(n)$ au lieu de $\varphi(\chi(n))$ pour ne pas alourdir les notations. Si on prend $\varpi = b(\eta,t)$ alors en utilisant le troisième point des préliminaires (C), on obtient :

$$\limsup \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(x,t_1)\|^2 dx \leq \int_{b(\eta,t_1)} \|\overrightarrow{u}(x,t_1)\|^2 dx + \eta$$

.

D'où, comme η est arbitrairement petit et que $\int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(x,t_1)\|^2 dx$ a une limite :

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(x,t_1)\|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}(x,t_1)\|^2 dx.$$

On en déduit :

$$W(t_1) = \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}(x,t_1)\|^2 dx.$$

D'autre part, en notant :

$$J(t_1) = \sum_i \|\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial x_i}(.,t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

alors, on a :

$$J(t_1) \leq \liminf_n J_{\varphi(n)}(t_1).$$

La relation de dissipation de l'énergie :

$$\int_{t_0}^{t} J_{\varphi(n)}(\tau)^2 d\tau + \frac{1}{2} W_{\varphi(\chi(n))}(t) = \frac{1}{2} W_{\varphi(n)}(t_0)$$

nous donne alors :

$$\int_{t_0}^{t} J(\tau)^2 d\tau + \frac{1}{2}W(t) \leq \frac{1}{2}W(t_0)$$

ce qui nous donne immédiatement le dernier point de la définition d'une solution turbulente. Remarquons ici que l'égalité devient, par le passage à la limite, une inégalité et donc que la constance de "l'énergie" devient une décroissance.

5.5 4ème étape : équation intégrale

Comme $\lim \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(x,t_1)\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}(x,t_1)\|^2 dx$ (voir étape précédente) et comme $\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(\cdot,t_1)$ converge faiblement dans L^2 vers $\overrightarrow{u}(\cdot,t_1)$ on peut montrer que $\overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(\cdot,t_1)$ converge fortement dans L^2 vers $\overrightarrow{u}(\cdot,t_1)$. De la même façon $(\rho_{1/(\varphi(n))} * \overrightarrow{u}_{\varphi(n)})(\cdot,t_1)$ converge fortement dans L^2 vers $\overrightarrow{u}(\cdot,t_1)$. Ceci nous permet d'obtenir le fait que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\rho_{1/(\varphi(n))} * \overrightarrow{u}_{\varphi(n)})(x,t) \cdot \vec{\nabla}\overrightarrow{a}(x,t).u_{\varphi(n)}(x,t)dx$$

converge vers

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,t) \cdot \vec{\nabla}\overrightarrow{a}(x,t) \cdot \overrightarrow{u}(x,t)dx$$

pour tout t de A. Cette intégrale est d'autre part inférieure à $3W(0)\max_k \|\frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Dès lors, par convergence dominée :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_{1/(\varphi(n))} * \overrightarrow{u}_{\varphi(n)})(x,\tau) \cdot \vec{\nabla}\overrightarrow{a}(x,\tau) \cdot \overrightarrow{u}_{\varphi(n)}(x,\tau)dx = \\ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau) \cdot \vec{\nabla}\overrightarrow{a}(x,\tau) \cdot \overrightarrow{u}(x,\tau)dx = \\ -\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau) \cdot \vec{\nabla}\overrightarrow{u}(x,\tau) \cdot \overrightarrow{a}(x,\tau)dx \\ .\end{aligned}$$

Le cas des autres membres de l'équation intégrale (A) se traitent de la même façon, si bien que par passage à la limite dans cette équation on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(x,t)\cdot\vec{a}(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{U}(x)\cdot\vec{a}(x,0)dx \\
+\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot[\vec{\triangle}\overrightarrow{a}(x,\tau)+\frac{\partial\overrightarrow{a}(x,\tau)}{\partial t}]dx \\
+\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot\vec{\nabla}\overrightarrow{u}(x,\tau)\cdot\overrightarrow{a}(x,\tau)(x,\tau)dx.
\end{aligned}
$$

Ceci termine la preuve.

Conclusion : $\overrightarrow{u}$ est donc bien une solution turbulente de l'équation de Navier-Stokes. On a donc montré l'existence d'une solution. Il nous manque l'unicité et c'est un problème ouvert ; cette unicité faible permettrait d'autant plus de répondre à la question d'une éventuelle unicité forte.

Il n'a cependant toujours pas été montré que le système (3.1) possède des solutions qui explosent en temps fini ; la communauté mathématiques a progressé à ce sujet et a même montré que le système d'équations

$$
\begin{cases}
\triangle\overrightarrow{y}(x)-\overrightarrow{y}(x)-(x\cdot\overrightarrow{\triangledown})(\overrightarrow{y})(x)-\overrightarrow{\triangledown}p(x)=(\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y})(x) \\
\overrightarrow{\triangledown}\cdot\overrightarrow{y}(x)=0
\end{cases}
$$

n'avait pas de solutions non nulle. Leray avait montré dans [1] que si ce système admettait une solution non triviale, alors le système (3.1) admettait des solutions irrégulières ; mais cette hypothèse a été réfutée par J. Necas, M. Ruczicka et V. Sverak en 1996.

6 Structure d'une solution turbulente

Les résultats que nous présentons ici nous renseignent sur la structure d'une solution turbulente. Nous ne les démontrons pas.

6.1 Etat initial semi-régulier :

Pour une donnée initiale $\vec{U}$ dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$ et de divergence nulle, il existe un temps maximal strictement positif T tel qu'il existe $\overrightarrow{u}$ solution régulière du système de Navier-Stokes égale à $\vec{U}$ pour $t = 0$, et de classe C^∞ sur $]0, T[$ et telle que :

- la fonction $t \in [0, T[\to \overrightarrow{u}(., t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est L^2
- la fonction $t \in [0, T[\to \overrightarrow{u}(., t) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est continue.
- $\overrightarrow{u}$ vérifie la relation de dissipation de l'énergie :

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \|\vec{\nabla}\overrightarrow{u}(x,\tau)\|^2 dx + 1/2 \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}(x,t)\|^2 dx = 1/2 \int_{\mathbb{R}^3} \|\overrightarrow{u}(x,0)\|^2 dx.$$

De plus, si $(T', \overrightarrow{u'})$ vérifie les mêmes conditions, alors $T' = T$ et $\vec{u'} = \overrightarrow{u}$.

6.2 Structure d'une solution turbulente

- Une solution turbulente correspondant à un état initial dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ coïncide avec la solution semi-régulière qui correspond à cet état initial aussi longtemps que celle-ci existe.
- Faisons tendre en croissant t vers l'extrémité T de l'intervalle de régularité. La solution $\overrightarrow{u}(x, t)$, qui est régulière pour $0 < t < T$ devient alors irrégulière.
- L'ensemble des temps d'irrégularité d'une telle solution est de mesure nulle.

Définitions, notations et rappels mathématiques

Equations mathématiques

On appellera :

– équation de Stokes ou équation de Navier-Stokes linéarisée, le système

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}(x,t) + \triangle \overrightarrow{u}(x,t) - \overrightarrow{\triangledown} p(x,t) = -\overrightarrow{X}(x,t) \\ \overrightarrow{\triangledown} \cdot \overrightarrow{u}(x,t) = 0 \end{cases}$$

– équation de Navier-Stokes, le système

$$\begin{cases} \triangle \overrightarrow{u} - \dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} - \overrightarrow{\triangledown} p = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\triangledown})\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{\triangledown} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$

– équation de Navier-Stokes régularisée, le système

$$\begin{cases} \triangle \overrightarrow{u} - \dfrac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} - \overrightarrow{\triangledown} p = (\rho_\varepsilon * \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\triangledown})\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{\triangledown} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$

.

Topologie des espaces sous-jacents

On notera :

– $\|\cdot\|$ la norme euclidienne classique d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Pour une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, cela désigne simplement la norme euclidienne de la matrice comme vecteur de $\mathbb{R}^9$.
– $\|\cdot\|_2$ la norme naturelle sur L^2. Cependant, on reviendra souvent à l'écriture sous la forme d'une intégrale de cette norme pour ne pas préter à confusion.
– $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme (lorsque l'entité normée est une fonction).
– $\|\cdot\|_\infty$ le maximum des coefficients (lorsque l'entité normée est un vecteur en dimension finie).

Compléments mathématiques

Formules d'intégration spatiale : Sous les hypothèses d'intégrale finie, nous avons les formules suivantes :

– $\sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \overrightarrow{u}^2(x,\tau) dx d\tau} \leq \int_0^t \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{u}^2(x,\tau) dx d\tau}$

- $\|\rho * \overrightarrow{u}\|_2 \leq \|\rho\|_1 \cdot \|\overrightarrow{u}\|_2$.
- Si ϖ est ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ et Σ sa surface, si $\overrightarrow{u} \in H^1$ et $\overrightarrow{a} \in H^1$ alors nous avons la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}^3-\varpi} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\bigtriangledown} \overrightarrow{u} = -\int_{\Sigma} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} d\sigma.$$

Continuité forte : On dira que $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ est fortement continue en t si pour tout instant $t \geq 0$, $\overrightarrow{u}(\cdot, t) \in L^2$ et si $\|\overrightarrow{u}(\cdot, t)\|_2$ est l'expression d'une fonction continue de t.

Continuité uniforme : On dira que $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ est uniformément continue en t si pour tout instant $t \geq 0$, $\overrightarrow{u}(\cdot, t) \in {}^\infty$ et si $\|\overrightarrow{u}(\cdot, t)\|_\infty$ est l'expression d'une fonction continue de t.

Théorème de Kakutani : Si E est un Banach, alors E est réfléxif, c'est-à-dire isomorphe à son bidual, si et seulement si sa boule unité est compacte pour la topologie faible.

Egalité de Hardy : Soit f est une fonction de $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, de carré sommable et dont les dérivées premières dont de carré sommable. Alors :

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_i \frac{\partial \frac{1}{\|x-y\|}}{\partial y_i} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy.$$

Inégalité de Hardy : Soit f est une fonction de $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, de carré sommable et dont les dérivées premières dont de carré sommable. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|x-y\|^2} f^2(y) dy \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} \|\vec{\nabla} f\|^2 dy.$$

Preuve des relations de Hardy :
Si g est une fonction de $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, de carré sommable et dont les dérivées premières dont de carré sommable, $i \in \{1, 2, 3\}$ et $s(0, r)$ est la sphère de centre 0 et de rayon r, alors posons :

$$\varphi(r) = \int_{s(0,r)} f(x) g(x) n_i d\sigma.$$

On a :

$$\varphi(r) = \int_{B(0,r)} f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx$$

ce qui nous montre (f, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, g et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de carré sommable) que φ a une limite en $+\infty$. De plus, comme :

$$|\varphi(r)| \leq \int_{s(0,r)} |f(x)g(x)| d\sigma$$

alors :

$$\int_0^\infty |\varphi(r)| dr \leq \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)g(x)| dx.$$

Donc, $\lim_\infty \varphi = 0$, et donc :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = 0.$$

Plus généralement :

$$\int_{\mathbb{R}^3 - B(x,r)} f(y)\frac{\partial g(y)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(y)}{\partial x_i} g(y) dy = -\int_{s(x,r)} f(y)g(y) n_i d\sigma.$$

En prenant $g(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{\|x-y\|}}{\partial y_i}$ en ajoutant les relations pour toute les valeurs de i puis en faisant tendre r vers 0, on obtient la première inégalité.
Si, on prend $g(y) = \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^2} f(y)$ alors en ajoutant les relations pour toute les valeurs de i et en faisant tendre r vers 0, on obtient :

$$2\int_{\mathbb{R}^3} \sum_i \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^2}\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|x-y\|^2} f^2(y) dy.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier membre de l'égalité, on obtient l'inégalité de Hardy pour f.

Approximation de l'unité : Soit une fonction $\lambda : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ de classe C^∞, identique à 0 en dehors de $\{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| \leq 1\}$ et telle que :

$$4\pi \int_0^1 \lambda(s) s^2 ds = 1$$

Alors si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, on pose :

$$(\rho_\varepsilon * u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\mathbb{R}^3} \lambda(\frac{\|x-y\|^2}{\varepsilon^2})u(y)dy$$

C'est une fonction C^∞ qui converge presque partout vers u lorsque ε tend vers 0.

Références

[1] J. LERAY, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, 1934*. Acta Math. 63, no. 1, 193-248.

[2] C. W. OSEEN, *Hydrodynamik, 1927*.

[3] G. CARLIER, *Analyse Fonctionnelle, 2009*.

[4] J.-Y. CHEMIN, *Le système de Navier-Stokes incompressible soixante-dix ans après Leray, 2004*. Seminaire et congrès, numero 9, Société Mathématique de France.