Corps de u-invariant pair

Margaret Bilu
Guillaume Dubach

juin 2010

Dans son article de 1953, Kaplansky introduit deux invariants quadratiques des corps : le u-invariant et le niveau. Le niveau d'un corps k, noté $\mathfrak{s}(k)$, est le plus petit entier n tel que -1 soit une somme de n carrés dans k. Quant à son u-invariant, noté $u(k)$, c'est la dimension maximale d'une forme quadratique anisotrope sur k. S'appuyant sur ses premières découvertes, Kaplansky émit alors la conjecture selon laquelle ces invariants seraient toujours des puissances de 2, conjecture vérifiée par Pfister en 1965 pour ce qui est du niveau, et pour le reste infirmée par Merkurjev en 1988 avec la construction d'un corps de u-invariant 6. Nous présentons ici la preuve de Pfister puis la construction générale, plus récente, d'un corps de u-invariant $2n$, pour tout entier $n > 0$. Cette construction, également découverte par Merkurjev, a été notablement simplifiée depuis par Tignol dans [6]. C'est la preuve de ce dernier que nous allons suivre.

Le cœur de ce mémoire est la démonstration du théorème de Merkurjev. Dans l'énoncé suivant, $k(\psi)$ désigne le corps des fonctions de la quadrique projective associée à ψ, et $C_0(\psi)$ l'algèbre de Clifford paire de ψ.

Théorème. *Soit D une algèbre à division, centrale et de dimension finie sur k ($\mathrm{car}(k) \neq 2$) et ψ une forme quadratique anisotrope sur k de dimension au moins 2. Alors l'algèbre $D \otimes_k k(\psi)$ n'est pas à division si et seulement si D contient une image homomorphe de l'algèbre $C_0(\psi)$. Si ψ est isotrope non dégénérée de dimension au moins 3, l'énoncé vaut également, mais de manière vide, car aucune de ces conditions ne peut être satisfaite.*

C'est ce théorème, donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre reste à division après extension de ses scalaires au corps de fonctions d'une quadrique, qui nous permettra de construire, par un double passage à la limite inductive, le corps voulu.

Dans ce mémoire, k désignera un corps de caractéristique différente de 2, et k^* le groupe de ses inversibles.

Table des matières

1 Généralités **3**
1.1 Notions de base sur les formes quadratiques . . . 3
1.1.1 Définitions . . . 3
1.1.2 Espaces quadratiques . . . 3
1.1.3 Diagonalisation de formes quadratiques . . . 5
1.1.4 Isotropie et anisotropie . . . 5
1.2 Formes quadratiques et corps des fonctions . . . 8
1.3 Algèbres de quaternions . . . 10
1.4 Algèbres de Clifford . . . 11

2 Deux invariants quadratiques : le niveau et le u-invariant **16**
2.1 Les formes de Pfister . . . 16
2.2 Étude du niveau . . . 18
2.3 Présentation du u-invariant . . . 19

3 Le théorème de Merkurjev **22**
3.1 Propriétés des ordres de $D(t)$ . . . 22
3.2 Le théorème de Merkurjev . . . 23

4 Construction d'un corps de u-invariant pair **25**
4.1 Construction et propriétés de l'algèbre D . . . 25
4.2 Genèse et propriétés de la limite inductive . . . 27
4.3 Construction de K_∞ . . . 28

1 Généralités

1.1 Notions de base sur les formes quadratiques

1.1.1 Définitions

Une forme quadratique (n-aire) sur le corps k est un polynôme homogène f de degré 2 à n variables et à coefficients dans k. Sous sa forme la plus générale, il s'écrit

$$f(X) = f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{ij} X_i X_j \in k[X_1 \dots, X_n],$$

où X est le vecteur colonne de coordonnées $X_1, \dots, X_n$. Afin de rendre l'expression symétrique, il est d'usage de réécrire f sous la forme

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) X_i X_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} X_i X_j,$$

avec $a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$, et donc $a_{ij} = a_{ji}$. Ainsi, f définit une matrice symétrique $M_f = (a_{ij})$, telle que $f = {}^t X M_f X$. Le déterminant de cette matrice est appelé *déterminant de* f, et f est dite *non-dégénérée* s'il est non nul, *dégénérée* sinon.
Une forme quadratique f définit une application de k^n dans k. Dans la suite, pour alléger les notations, nous désignerons par f aussi bien le polynôme que l'application polynomiale associée.

On dira que deux formes quadratiques f et g sont équivalentes s'il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $f(X) = g(CX)$, donc si g et f ne diffèrent que par un changement de variables inversible. Remarquons qu'alors $M_f = {}^t C M_g C$, et donc que $\det(f) = \det(g)\det(C)^2$. Si f est non dégénérée, on peut donc définir le déterminant de la classe d'équivalence de f comme l'image de $\det f$ modulo les carrés de k^*. Dans ce qui suit, nous allons la plupart du temps travailler avec des formes quadratiques non dégénérées et voir le déterminant comme un élément de $k^*/(k^*)^2$.

Exemple : Soit $f = X^2 - Y^2$, $g = XY$. Alors f et g sont équivalentes. En effet,

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{M_g} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Espaces quadratiques

Soit $b : k^n \times k^n \to k$ l'application définie par $b(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y))$. On vérifie aisément que b est une forme bilinéaire symétrique. Réciproquement, si on se donne une forme bilinéaire symétrique $b : k^n \times k^n \to k$, en posant $f(x) = b(x,x)$ on obtient une forme quadratique sur k. Ainsi, il y a une correspondance bijective entre les formes quadratiques n-aires sur k et les formes bilinéaires symétriques définies sur $k^n \times k^n$. Matriciellement, si $f(x) = {}^t x M_f x$ alors $b(x,y) = {}^t x M_f y$.
Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n et $b : V \times V \to k$ une forme bilinéaire symétrique sur V. Le couple (V, b) est appelé *espace quadratique*. Si f est la forme quadratique

associée à b, alors f est à n variables et on peut aussi noter cet espace quadratique (V, f). On dira que deux espaces quadratiques sont *isométriques* (et on le notera avec le symbole $\cong$) si les formes quadratiques associées sont équivalentes.

Lemme 1.1 *Soit (V,b) un espace quadratique, f la forme quadratique associée. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) M_f est inversible.

(2) Pour tout $x \in V$, si pour tout $y \in V$ $b(x, y) = 0$, alors $x = 0$.

Lorsque l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, on dit que V est un espace quadratique non dégénéré.

Démonstration. *(1)* $\Rightarrow$ *(2)* : Soit x tel que pour tout $y \in V$ $b(x, y) = {}^t x M_f y = 0$. Puisque M_f est inversible, pour tout $y' \in V$ il existe $y \in V$ tel que $M_f y = y'$. Alors ${}^t x y' = 0$, et en appliquant cela aux vecteurs de base, $x = 0$.
(2) $\Rightarrow$ *(1)* : Supposons M_f non inversible et soit x un vecteur non nul du noyau de ${}^t M_f$. Alors pour tout $y \in V$ $b(x, y) = {}^t x M_f y = {}^t({}^t M_f x) y = 0$ sans que x soit nul, ce qui contredit *(2)*. Donc M_f est inversible. □

Soit W un sous-espace vectoriel de V. Alors $(W, b_{|W \times W})$ est aussi un espace quadratique, et on peut définir son orthogonal par

$$W^\perp = \{x \in V \mid b(x, V) = 0\}.$$

L'orthogonal $V^\perp$ de V dans lui-même, est d'après le lemme précédent réduit à $\{0\}$ si et seulement si V est non dégénéré. Dans ce cas, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.2 *Soit (V, b) un espace quadratique non dégénéré, et W un sous-espace vectoriel de V. Alors* $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Démonstration. Considérons l'application linéaire ϕ de V dans son dual V^* donnée par $\phi : x \mapsto b(\cdot, x)$. D'après le lemme 1.1, ϕ est injective (c'est même un isomorphisme, puisque V est de dimension finie). Si $p = \dim W$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de W, alors

$$W^\perp = \bigcap_{x \in W} \ker b(\cdot, x) = \bigcap_{i=1}^{p} \ker b(\cdot, e_i).$$

$W^\perp$ est l'intersection de p hyperplans, d'équations linéairement indépendantes car ϕ est injective, il est donc de dimension $n - p$. □

Soient maintenant deux espaces quadratiques (V_1, f_1) et (V_2, f_2). On définit leur *somme orthogonale* (V, f) en posant $V = V_1 \oplus V_2$ et

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

On notera $V = V_1 \perp V_2$ et $f = f_1 \perp f_2$. On remarque d'ailleurs que

$$M_{f_1 \perp f_2} = \begin{pmatrix} M_{f_1} & 0 \\ 0 & M_{f_2} \end{pmatrix},$$

et donc $\det(f_1 \perp f_2) = \det(f_1) \det(f_2)$. Ainsi, $f_1 \perp f_2$ est non dégénérée si et seulement si f_1 et f_2 le sont.

Exemple. Si $f_1 = X^2 + Y^2$ et $f_2 = 3XY - Z^2$ sont des formes respectivement binaire et ternaire alors
$$f_1 \perp f_2 = X_1^2 + X_2^2 + 3X_3X_4 - X_5^2$$
est une forme en 5 variables.

1.1.3 Diagonalisation de formes quadratiques

Soit f une forme quadratique sur k et $d \in k^*$. On dit que f représente d sur k s'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ tel que $f(x_1, \ldots, x_n) = d$. On notera $D(f)$ l'ensemble des éléments de k^* représentés par f. On remarque que $D(f)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de f. Lorsque f est associée à un espace quadratique (V, f), on peut aussi noter $D(f) = D(V)$.
Dans la suite, on notera $\langle d \rangle$ la classe d'isométrie de l'espace quadratique de dimension 1 correspondant à la forme quadratique dX^2.

Proposition 1.3 *Soit (V, f) un espace quadratique et $d \in k^*$. Alors $d \in D(f)$ si et seulement s'il existe un espace quadratique (V', f') tel que V soit isométrique à $\langle d \rangle \perp V'$.*

Démonstration. Si $V \cong \langle d \rangle \perp V'$, on a $d \in D(\langle d \rangle \perp V') = D(V)$. Pour la réciproque, ramenons-nous d'abord au cas où V est non dégénéré. Soit W un supplémentaire de $V^\perp$ dans V. Alors on a $V = V^\perp \perp W$ et comme f est nulle sur $V^\perp$, $D(V) = D(W)$, avec W non dégénéré. On peut donc supposer que l'espace de départ V est non dégénéré. Soit $d \in D(V)$, et soit $v \in V$ tel que $f(v) = d$. L'espace quadratique $(k \cdot v, f_{|k \cdot v})$ est isométrique à $\langle d \rangle$ et $k \cdot v \cap (k \cdot v)^\perp = 0$. En comparant les dimensions grâce au lemme 1.2, on obtient finalement $V \cong \langle d \rangle \perp (k \cdot v)^\perp$. □

Corollaire 1.4 *Si (V, f) est un espace quadratique de dimension n sur k, alors il existe $d_1, \ldots, d_n \in k$ tels que $V \cong \langle d_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle d_n \rangle$. En d'autres termes, toute forme quadratique n-aire sur k est équivalente à la forme diagonale $d_1X_1^2 + \ldots + d_nX_n^2$.*

Démonstration. Si $D(V)$ est vide alors f est nulle et V est isomorphe à une somme orthogonale de n espaces $\langle 0 \rangle$. Sinon, on choisit $d_1 \in D(V)$ et on écrit $V \cong \langle d_1 \rangle \perp V'$, avec V' de dimension $n - 1$, et on continue par récurrence. □

Dans la suite, on notera $\langle d_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle d_n \rangle = \langle d_1, \ldots, d_n \rangle$.

1.1.4 Isotropie et anisotropie

Soit (V, f) un espace quadratique. Un vecteur $v \in V$ est dit isotrope s'il est non nul et que $f(v) = 0$, anisotrope sinon. L'espace quadratique et la forme quadratique associée sont dits isotropes s'il existe au moins un vecteur isotrope, anisotropes sinon. Notons qu'un espace anisotrope est nécessairement non dégénéré car son orthogonal est constitué de vecteurs isotropes. Un espace constitué uniquement de vecteurs isotropes est dit *totalement isotrope*.
Nous allons tout d'abord étudier l'isotropie dans le cas des espaces quadratiques de dimension 2.

Proposition 1.5 *Soit (V, f) une espace quadratique de dimension 2. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) V est isotrope et non dégénéré.

(2) $\det f = -1 \cdot (k^*)^2$

(3) $V \cong \langle 1, -1 \rangle$.

(4) f est équivalente à la forme $X_1 X_2$.

Démonstration. On a déjà vu dans l'exemple du paragraphe 1.1.1 que (3) $\Leftrightarrow$ (4).
(1) $\Rightarrow$ (2) : À isométrie près, on peut supposer que f s'écrit $f = aX^2 + bY^2$. Puisqu'elle est non dégénérée, $ab \neq 0$. Soit $v = (v_1, v_2) \neq 0$ un vecteur isotrope. Quitte à échanger les vecteurs de base, on peut supposer $v_1 \neq 0$. Alors $av_1^2 + bv_2^2 = 0$, d'où

$$ab = -b^2 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \in -1 \cdot (k^*)^2.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Encore une fois, on peut supposer que $f = aX^2 + bY^2$. De plus, $a \in -b \cdot (k^*)^2$, donc on peut choisir $b = -a$. Donc f est équivalente à $\langle a, -a \rangle$, qui elle-même est équivalente à aX_1X_2, qui représente 1 car $a \neq 0$. Donc d'après la proposition 1.3, $V \cong \langle 1, -1 \rangle$.
L'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est claire, $\langle 1, -1 \rangle$ étant isotrope et non dégénéré. □

Lorsque (V, f) est de dimension 2 et vérifie l'une de ces propriétés, on appelle sa classe d'isométrie le *plan hyperbolique* $\mathbb{H}$ (probablement en référence à la forme X_1X_2, dont les lignes de niveau sont des hyperboles). Il joue un rôle fondamental dans l'étude des formes quadratiques. Le lemme suivant, par exemple, montre qu'une forme quadratique non dégénérée de plus de deux variables qui est réductible comme polynôme est équivalente à la forme hyperbolique.

Lemme 1.6 *Soit (V, f) un espace quadratique de dimension $n \geq 2$ non dégénéré sur k. Alors ψ est réductible dans $k[X_1, \ldots, X_n]$ si et seulement si $n = 2$ et $V \cong \mathbb{H}$.*

Démonstration. Si f admet une factorisation non triviale, les facteurs sont nécessairement deux polynômes homogènes de degré 1. Écrivons

$$f = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i b_j X_i X_j,$$

de matrice $(\frac{1}{2}(a_ib_j + a_jb_i))_{i,j}$. Cette dernière est somme des matrices $\frac{1}{2}(a_ib_j)_{i,j}$ et $\frac{1}{2}(a_jb_i)_{i,j}$, qui sont de rang 1 (elles sont non nulles car au moins l'un des a_i et au moins l'un des b_j est non nul). Donc la matrice de f est au plus de rang 2. Or f est non dégénérée et $n \geq 2$, donc $n = 2$. Alors le vecteur $(a_2, -a_1) \neq 0$ est isotrope. D'après la proposition 1.5, f est équivalente à $\langle -1, 1 \rangle$. □

On appellera *espace hyperbolique* une somme orthogonale de plans hyperboliques. La forme quadratique correspondante sera $(X_1^2 - X_2^2) + \ldots + (X_{2r-1}^2 - X_{2r}^2)$, où r est le nombre de plans hyperboliques sommés. Enfin, on dira qu'un espace quadratique (V, f) est *universel* si $D(V) = k^*$, donc si f représente tous les éléments inversibles du corps.

Proposition 1.7 *Soit (V, b) un espace quadratique non dégénéré. Alors :*

(1) *Tout sous-espace totalement isotrope $U \subseteq V$ de dimension $r > 0$ est contenu dans un sous-espace hyperbolique $T \subseteq V$ de dimension $2r$.*

(2) *V est isotrope si et seulement si V contient un plan hyperbolique.*

(3) *Si V est isotrope, alors V est universel.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on a (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). En effet, si V est isotrope, il contient un sous-espace totalement isotrope $k \cdot v$ de dimension 1 où v est un vecteur isotrope, et en appliquant (1) V contient un sous-espace hyperbolique de dimension 2, donc un plan hyperbolique. De plus, un plan hyperbolique est universel car la forme X_1X_2 l'est clairement, ce qui prouve (3). Il nous reste donc à prouver (1). Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de U et $S = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots e_r)$. Alors $U^\perp \subseteq S^\perp$, et, comme V est non dégénéré, on peut appliquer le lemme (1.2) pour écrire

$$\dim S^\perp = \dim V - \dim S > \dim V - \dim U = \dim U^\perp.$$

Ainsi, l'inclusion est stricte et il existe donc un vecteur e_1' orthogonal à $e_2, \ldots, e_r$, mais pas à e_1. Comme e_1 est isotrope, e_1' ne peut lui être colinéaire, donc (e_1, e_1') est libre. Le sous-espace $H_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_1')$ est alors de dimension 2 et a pour déterminant

$$\det(H_1) = \begin{vmatrix} 0 & b(e_1, e_1') \\ b(e_1, e_1') & b(e_1', e_1') \end{vmatrix} \cdot (k^*)^2 = -1 \cdot (k^*)^2.$$

donc $H_1 \cong \mathbb{H}$ par la proposition 1.5. On a donc décomposé $V = H_1 \perp V'$ où $V' = H_1^\perp$ contient $e_2, \ldots e_r$. Puisque V' est non dégénéré, on peut continuer par récurrence. $\square$

Remarque : On peut obtenir le résultat du (3) directement de la façon suivante : Soit v un vecteur isotrope et soit $w \in V$ tel que $b(v, w) \neq 0$ (c'est possible car V est non dégénéré). Alors

$$f(tv + w) = b(tv + w, tv + w) = 2tb(v, w) + b(w, w)$$

parcourt tout k quand t parcourt k.

Corollaire 1.8 *Soit f une forme quadratique non dégénérée, et $d \in k^*$. Alors $d \in D(f)$ si et seulement si $f \perp \langle -d \rangle$ est isotrope.*

Démonstration. On peut supposer $f = a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2$. S'il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ une représentation de d par f, $(x_1, \ldots, x_n, 1)$ est un vecteur isotrope pour $f \perp \langle -d \rangle$. Réciproquement, soit $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ un vecteur isotrope pour $f \perp \langle -d \rangle$. Alors on a

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 - dx_{n+1}^2 = 0.$$

Si x_{n+1} est non nul, alors $\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ est une représentation de d par f. Sinon, $(x_1, \ldots x_n)$ est un vecteur isotrope pour f. Dans ce cas, f est isotrope, donc universelle d'après la proposition précédente. Elle représente donc d. $\square$

1.2 Formes quadratiques et corps des fonctions

Soit ψ une forme quadratique de dimension $n+1 \geq 2$ anisotrope sur le corps k. On aimerait étendre le corps k de façon à rendre ψ isotrope. On considère pour cela l'anneau quotient $k[X_0, \ldots, X_n]/(\psi)$, noté $k[\psi]$, qui est donc de la forme $k[x_0, \ldots, x_n]$ avec $\psi(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Puisque ψ est anisotrope, elle est en particulier irréductible donc $k[\psi]$ est intègre. La première idée naturelle consiste à simplement prendre le corps des fractions de $k[\psi]$: on obtient le corps $k(\psi)^{\#} = \mathrm{Frac}(k[\psi])$. C'est le corps des fonctions algébriques sur le cône d'équation $\psi(X_0, \ldots, X_n) = 0$.
Si on écrit $\psi = a_0X_0^2 + \ldots + a_nX_n^2$ avec $a_0, \ldots, a_n \in k$, on voit facilement que

$$k(\psi)^{\sharp} = k(x_0, \ldots, x_{n-1}) \left(\sqrt{-a_n^{-1}(a_0x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2)}\right),$$

où $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont des indéterminées algébriquement indépendantes sur k.
Remarquons que le point de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ sur le cône correspond au point de coordonnées homogènes

$$\left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0}\right]$$

sur la quadrique projective d'équation $\psi(X_0, \ldots, X_n) = 0$. Posons pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ $y_i = \frac{x_i}{x_0}$. On peut ainsi travailler avec une variable de moins et se contenter d'un corps un peu plus petit

$$k(\psi) = k(y_1, \ldots, y_{n-1}) \left(\sqrt{-a_n^{-1}(a_0 + a_1y_1^2 + \ldots + a_{n-1}y_{n-1}^2)}\right),$$

donc $k(\psi)^{\sharp}$ est une extension transcendante pure de degré 1 : $k(\psi)^{\sharp} = k(\psi)(x_0)$. De plus, $k(\psi)$ et $k(\psi)^{\sharp}$ s'écrivent donc chacun comme une extension quadratique d'une extension transcendante pure de k. $k(\psi)$ peut également être défini de façon intrinsèque à partir de $k[\psi]$. En effet, ψ étant homogène, l'anneau $k[\psi]$ est gradué, et on peut définir le corps

$$k(\psi)' = \left\{\frac{P}{Q} \mid P, Q \text{ non nuls et homogènes de même degré dans } k[\psi]\right\} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Montrons que si $\psi = a_0X_0^2 + \ldots + a_nX_n^2$ alors $k(\psi) = k(\psi)'$ et on peut prendre (1) pour définition de $k(\psi)$.
Soit $\frac{P}{Q} \in k(\psi)'$. Alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(x_0, \ldots, x_n)}{Q(x_0, \ldots, x_n)} = \frac{P(1, y_1, \ldots, y_n)}{Q(1, y_1, \ldots, y_n)}$$

où $y_n = \sqrt{-a_n^{-1}(a_0 + a_1y_1^2 + \ldots + a_{n-1}y_{n-1}^2)}$, car P et Q sont homogènes de même degré. Donc $\frac{P}{Q} \in k(\psi)$.
Réciproquement, si $x \in k(\psi)$, x s'écrit $x = \frac{P(y_1,\ldots,y_n)}{Q(y_1,\ldots,y_n)}$ avec $P, Q \in k[Y_1, \ldots, Y_n]$. Rendons P et Q homogènes en ajoutant une variable : soit $d = \max\{\deg P, \deg Q\}$. On pose alors

$$P_1(X_0, \ldots, X_n) = P\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right) X_0^d \in k[X_0, \ldots, X_n]$$

et

$$Q_1\left(X_0, \ldots, X_n\right) = Q\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right) X_0^d \in k[X_0, \ldots, X_n].$$

P_1 et Q_1 sont clairement homogènes, et on a $x = \frac{P_1(x_0,\dots,x_n)}{Q_1(x_0,\dots,x_n)} \in k(\psi)'$.
Cela nous amène à la définition suivante :

Définition 1.9 *On appelle corps des fonctions d'une forme quadratique non dégénérée ψ le corps*

$$k(\psi) = \left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \text{ non nuls et homogènes de même degré dans } k[\psi] \right\} \cup \{0\}.$$

Remarques

1. Multiplier ψ par un scalaire ne change pas le corps de fonctions.
2. La définition de $k(\psi)$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'isométrie de ψ.
3. La seule chose qu'on a utilisée pour définir $k(\psi)$ est l'irréductibilité de ψ. On peut ainsi d'après le lemme 1.6 définir $k(\psi)$ dès que ψ est non dégénérée à 3 variables ou plus, ou bien anisotrope à 2 variables. Dans le cas où ψ est isotrope à 3 variables ou plus, on peut montrer que $k(\psi)$ et $k(\psi)^\sharp$ sont des extensions transcendantes pures de k.

Dans la démonstration du théorème de Merkurjev, les corps de fonctions interviennent entre autres dans la construction suivante, qui joue un rôle fondamental : soit ψ une forme quadratique non dégénérée de dimension $n+1 \geq 3$ sur k, décomposée en somme orthogonale $\psi = \phi \perp \langle a, b \rangle$ avec $a, b \in k^*$, de sorte que

$$\psi(X_0, \dots, X_n) = \phi(X_0, \dots, X_{n-2}) + aX_{n-1}^2 + bX_n^2.$$

On définit une forme quadratique θ de dimension n sur $k(t)$, où t est une nouvelle indéterminée, par $\theta = \phi \perp \langle at^2 + b \rangle$, i.e.

$$\theta(Y_0, \dots, Y_{n-1}) = \phi(Y_0, \dots, Y_{n-2}) + (at^2 + b)Y_{n-1}^2.$$

θ est donc obtenue à partir de ψ par le changement de variables $X_i \mapsto Y_i$ pour $i \in \{0, \dots, n-2\}$ et $X_{n-1} \mapsto tY_{n-1}$, $X_n \mapsto Y_{n-1}$. Le déterminant de θ est $(at^2+b)\det\phi \neq 0$ donc θ est non dégénérée. De plus, si $n = 2$, θ est anisotrope sur $k(t)$ car son déterminant n'est pas l'opposé d'un carré dans $k(t)$ puisque $a, b \neq 0$. On peut donc travailler avec les corps de fonctions $k(\psi)$ et $k(t)(\theta)$.

Proposition 1.10 *$k(\psi)$ et $k(t)(\theta)$ sont k-isomorphes.*

Démonstration. On considère le morphisme d'algèbres injectif

$$\begin{array}{rcl} f_1 : k|X_1, \dots, X_n] & \to & k(t)[Y_1, \dots, Y_{n-1}] \\ X_i & \mapsto & Y_i \ \text{ si } 1 \leq i \leq n-2 \\ X_{n-1} & \mapsto & tY_{n-1} \\ X_n & \mapsto & Y_{n-1}. \end{array}$$

Puisque $f_1(\psi(1, X_1, \dots, X_n)) = \theta(1, Y_1, \dots, Y_{n-1})$, on peut passer au quotient et définir ainsi un morphisme d'algèbres

$$f_2 : k|X_1, \dots, X_n]/(\psi(1, X_1, \dots, X_n)) \to k(t)[Y_1, \dots, Y_{n-1}]/(\theta(1, Y_1, \dots, Y_{n-1})).$$

C'est un morphisme injectif d'anneaux intègres, on peut donc passer au corps des fractions : on obtient ainsi enfin un $k-$morphisme de corps $f : k(\psi) \to k(t)(\psi)$. Il est injectif par définition, surjectif car il atteint les Y_i et t : $f(X_{n-1}X_n^{-1}) = t$. Les corps $k(\psi)$ et $k(t)(\psi)$ sont donc $k-$isomorphes. $\square$

1.3 Algèbres de quaternions

Dans ce paragraphe, afin d'éviter les conflits de notation, nous allons exceptionnellement noter le corps de base F.

Définition 1.11 *Soient $a, b \in \mathrm{F}^*$. L'algèbre de quaternions $Q = (a,b)_{\mathrm{F}}$ est l'algèbre engendrée sur* F *par deux générateurs i et j vérifiant :*

$$i^2 = a, \qquad j^2 = b, \qquad ij = -ji.$$

On pose $k = ij$. Alors $k^2 = -ab$ et les éléments i, j, k anticommutent.

Exemple : $(-1,-1)_{\mathbb{R}} = \mathbb{H}$, où $\mathbb{H}$ est le corps des quaternions de Hamilton.

Afin de prouver quelques résultats sur $(a,b)_F$, nous allons construire un isomorphisme d'algèbres de $(a,b)_F$ dans une algèbre de matrices. Fixons pour cela une extension E du corps F contenant deux éléments α, β tels que $\alpha^2 = -a$ et $\beta^2 = b$ et considérons deux matrices

$$i_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ et } j_0 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathrm{E}).$$

On voit facilement que

$$i_0^2 = aI_2, \quad j_0^2 = bI_2 \text{ et } i_0 j_0 = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & -\alpha\beta \end{pmatrix} = -j_0 i_0.$$

Ainsi, il existe un morphisme de F-algèbres $\phi : (a,b)_F \to M_2(\mathrm{E})$ avec $\phi(i) = i_0$ et $\phi(j) = j_0$. Puisque $\{I_2, i_0, j_0, i_0 j_0\}$ est clairement libre dans $M_2(\mathrm{E})$, $\{1, i, j, k\}$ l'est aussi, ce qui prouve la proposition suivante :

Proposition 1.12 $(a,b)_{\mathrm{F}}$ *est un* F*-espace vectoriel de dimension 4, de base* $(1, i, j, k)$.

De plus, cela montre que ϕ est un morphisme de F-algèbres injectif. C'est particulièrement intéressant dans le cas où F est algébriquement clos, puisqu'alors on a un isomorphisme $(a,b)_{\mathrm{F}} \simeq M_2(F)$. Remarquons de plus les faits suivants :

Proposition 1.13 *(1) Pour toute extension* E *de* F*, il y a un isomorphisme de E-algèbres*

$$\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{F}} (a,b)_{\mathrm{F}} \simeq (a,b)_{\mathrm{E}}.$$

(2) $(a,b)_{\mathrm{F}}$ *est une algèbre simple centrale.*

Démonstration.

(1) Soient les applications linéaires données par les inclusions canoniques $\mathrm{E} \to (a,b)_{\mathrm{E}}$ et $(a,b)_{\mathrm{F}} \to (a,b)_{\mathrm{E}}$. Leurs images dans l'algèbre $(a,b)_{\mathrm{E}}$ commutent, donc par propriété universelle de l'algèbre produit tensoriel, on obtient un morphisme de E-algèbres ϕ : $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{F}} (a,b)_{\mathrm{F}} \to (a,b)_{\mathrm{E}}$ tel que $\phi(\lambda \otimes x) = \lambda x$. Ce morphisme est clairement surjectif car la base canonique de $(a,b)_{\mathrm{E}}$ est atteinte. Par égalité des dimensions, c'est un isomorphisme.

(2) Choisissons comme précédemment une extension E de F. D'après ce qu'on vient de démontrer, $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{F}} (a,b)_{\mathrm{F}} \simeq (a,b)_{\mathrm{E}} \simeq M_2(\mathrm{E})$. Puisque $M_2(\mathrm{E})$ est une E-algèbre centrale simple, $(a,b)_{\mathrm{F}}$ est une F-algèbre centrale-simple. $\square$

Définition 1.14 *L'involution barre est l'application qui à un quaternion $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ associe son conjugué $\bar{x} = \alpha - (\beta i + \gamma j + \delta k)$. On définit alors la norme et la trace de ce quaternion par :*

$$N(x) = x\bar{x} \in \mathrm{F} \qquad T(x) = x + \bar{x} \in \mathrm{F}$$

Fait 1.15 $\forall x, y \in Q \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}, \quad \bar{\bar{x}} = x.$

Fait 1.16 *La norme est une forme quadratique de dimension 4 (en les coefficients). On a :*

$$N(x) = \alpha^2 - \beta^2 a - \gamma^2 b + \delta^2 ab.$$

Proposition 1.17
1. $\forall x, y \in Q \quad N(xy) = N(x)N(y)$.
2. *$x \in Q$ est inversible si et seulement si $N(x) \neq 0$ (autrement dit, si et seulement s'il est anisotrope).*

Démonstration.
1. $N(xy) = xy\overline{xy} = x(y\bar{y})\bar{x} = x\bar{x}y\bar{y} = N(x)N(y)$.
2. Si x est inversible, alors $N(x)N(x^{-1}) = N(xx^{-1}) = N(1) = 1 \neq 0$ et donc $N(x) \neq 0$. Réciproquement, si $N(x) = x\bar{x} \neq 0$, on voit que l'inverse de x est donné par $\frac{\bar{x}}{N(x)}$.

Remarque. Il existe donc sur Q une forme quadratique, N, qui est anisotrope si (et seulement si) l'algèbre est à division. Ce résultat fondamental se verra étendu à un produit tensoriel de $n-1$ algèbres de quaternions en tierce partie.

1.4 Algèbres de Clifford

Soit (V, ψ) un espace quadratique de dimension $n \geq 1$. L'algèbre tensorielle de V,

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes 2n} \oplus \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes 2n+1} = T_0(V) \oplus T_1(V)$$

est une algèbre graduée par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Considérons l'idéal bilatère $I(V, \psi)$ engendré par les élements de $T(V)$ de la forme $v \otimes v - \psi(v)$ où $v \in V$. Il est homogène quand les degrés sont pris modulo 2, donc en quotientant $T(V)$ par ce dernier, on obtient une algèbre graduée par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *l'algèbre de Clifford* $C(V, \psi)$ (ou plus simplement $C(V)$, ou $C(\psi)$) de V :

$$C(V, \psi) = T(V)/(v \otimes v - \psi(v)) = C_0(V) \oplus C_1(V).$$

L'image $C_0(V)$ de $T_0(V)$ dans le quotient est une sous-algèbre de $C(V)$ car $T_0(V)$ est une sous-algèbre de $T(V)$. On l'appelle *l'algèbre de Clifford paire* de V. Choisissons une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, dans laquelle ψ s'écrit $\psi = a_1 X_1^2 + \ldots + a_n X_n^2$. Alors dans $C(V)$ on a pour tout i, $e_i^2 = a_i$ et pour tous i, j distincts, $e_i e_j = -e_j e_i$. On obtient ainsi une caractérisation équivalente de l'algèbre de Clifford : l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique $\psi = a_1 X_1^2 + \ldots + a_n X_n^2$ sur k est une k-algèbre engendrée par n éléments $e_1, \ldots e_n$ linéairement indépendants, et vérifiant pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ les relations

$$e_i^2 = a_i \quad \text{et} \quad e_i e_j = -e_j e_i.$$

On voit facilement que l'ensemble de vecteurs

$$\mathcal{B} = \{e_{i_1} \ldots e_{i_\ell} \mid \ell \in \{1, \ldots, n\}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq n\}$$

engendre $C(V)$ comme espace vectoriel. Le sous-espace vectoriel de $C(V)$ engendré par les $e_{i_1}...e_{i_\ell}$ pour ℓ pair est exactement $C_0(V)$, celui engendré par les $e_{i_1}...e_{i_\ell}$ pour ℓ impair est $C_1(V)$. Ainsi, $\dim C(V) \leq 2^n$ et $\dim C_0(V) \leq 2^{n-1}$. Nous verrons ci-dessous qu'il y a en fait égalité, et que les vecteurs de $\mathcal{B}$ forment une base de $C(V)$.
Notons i l'injection canonique de V dans $C(V)$. La propriété suivante montre que $C(V)$ est en fait un objet universel.

Proposition 1.18 *Soit (V, ψ) un espace quadratique sur un corps k. L'algèbre de Clifford $C(V)$ vérifie la propriété universelle suivante : Si A est une k-algèbre et $\sigma : V \to A$ une application k-linéaire compatible avec la forme quadratique ψ, c'est-à-dire telle que*

$$\sigma(v)^2 = \psi(v) \quad \textit{pour tout} \quad v \in V,$$

alors il existe un unique morphisme d'algèbres $\tau : C(V) \to A$ tel que $\sigma = \tau \circ i$, autrement dit tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "i"] & A \\
C(V) \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& T(V) \arrow[dr, "s"] \arrow[dd, dashed, "\tilde{\sigma}"] & \\
V \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & T(V)/I(V,\psi) \arrow[dl, dashed, "\tau"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Soit $j : V \to T(V)$ l'inclusion canonique. D'après la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{\sigma} : T(V) \to A$ tel que $\sigma = \tilde{\sigma} \circ j$. Pour tout $v \in V$,

$$\tilde{\sigma}(v \otimes v - \psi(v)) = \tilde{\sigma}(v)^2 - \psi(v) = \sigma(v)^2 - \psi(v) = 0.$$

Ainsi, $\tilde{\sigma}(I(V, \psi)) = 0$ et donc il existe un unique morphisme d'algèbres τ tel que $\tau \circ s = \tilde{\sigma}$, où $s : T(V) \to C(V) = T(V)/I(V, \psi)$ est la surjection canonique. Or $i = s \circ j$, donc $\tau \circ i = \sigma$. $\square$

Quelques cas particuliers et remarques :

1. Lorsque $\psi = 0$, $C(V)$ coïncide avec l'algèbre extérieure $\Lambda(V)$.
2. Lorsque $V = \langle d \rangle$, $C(V)$ est une k-algèbre engendrée par un unique élément e_1 tel que $e_1^2 = d$. Donc $C(V) \simeq k(\sqrt{d})$ et $C_0(V) \simeq k$.

3. Lorsque $V = \langle a, b\rangle$, $C(V)$ est une k-algèbre engendrée par des éléments e_1, e_2 qui anti-commutent et tels que $e_1^2 = a$ et $e_2^2 = b$. On reconnaît là la caractérisation d'une algèbre de quaternions : $C(V) \simeq (a, b)_k$.
4. Les deux derniers cas particuliers nous montrent que dans les cas $n = 1, 2$, la dimension de l'algèbre de Clifford est bien 2^n.
5. Si $x \perp y$ dans V, alors leurs images dans $C(V)$ anticommutent. En effet :

$$x^2 + y^2 = \psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2.$$

Afin d'établir d'autres résultats sur les algèbres de Clifford, nous avons besoin de la notion de produit tensoriel gradué de deux algèbres graduées. Soient $A = A_0 \oplus A_1$ et $B = B_0 \oplus B_1$ deux algèbres graduées par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Leur produit tensoriel gradué $A \widehat{\otimes} B$ est l'espace vectoriel $A \otimes B$ muni de la graduation

$$(A\widehat{\otimes}B)_0 = (A_0 \otimes B_0) \oplus (A_1 \otimes B_1), \qquad (A\widehat{\otimes}B)_1 = (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0),$$

et du produit

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg b \deg a'}(aa') \otimes (bb')$$

où $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$ sont des éléments homogènes dont la notation deg désigne le degré.

Proposition 1.19 *Soient (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2) deux espaces quadratiques. Alors il existe un isomorphisme d'algèbres canonique*

$$C(V_1 \perp V_2) \simeq C(V_1)\widehat{\otimes}C(V_2).$$

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, hook] \arrow[dd] & V_1 \oplus V_2 \arrow[d] & V_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \\
& C(V_1 \perp V_2) \arrow[d, shift left, "f"] & \\
C(V_1) \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "\alpha_1"] & C(V_1)\widehat{\otimes}C(V_2) \arrow[u, shift left, "g"] & C(V_2) \arrow[l, hook'] \arrow[ul, dashed, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}$$

Nous allons pour $i = 1, 2$, identifier V_i à son image dans $C(V_i)$. La propriété universelle de $C(V_i)$ nous fournit un morphisme d'algèbres α_i. Les images de α_1 et α_2 dans $C(V_1 \perp V_2)$ anticommutent par la remarque 5 ci-dessus :

$$\alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) = v_1 v_2 = -v_2 v_1 = -\alpha_2(v_2)\alpha_1(v_1).$$

Par la propriété universelle du produit tensoriel gradué, on obtient un morphisme d'algèbres graduées $g : C(V_1)\widehat{\otimes}C(V_2) \longrightarrow C(V_1 \perp V_2)$. Pour la réciproque, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} h : & V_1 \oplus V_2 & \to & C(V_1)\widehat{\otimes}C(V_2) \\ & v_1 + v_2 & \mapsto & v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2. \end{array}$$

Ce morphisme est compatible avec la forme quadratique $\psi = \psi_1 \perp \psi_2$:

$$h(v_1 + v_2)^2 = (v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2)^2 = v_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes v_2^2 = \psi_1(v_1) + \psi_2(v_2) = \psi(v_1 + v_2)$$

car v_1 et v_2 sont des éléments de degré 1 de $C(V_1)$ et de $C(V_2)$ respectivement. Ainsi, par la propriété universelle de $C(V_1 \perp V_2)$, on obtient un morphisme $f : C(V_1 \perp V_2) \to C(V_1)\widehat{\otimes}C(V_2)$. Enfin, on vérifie aisément que $g \circ f = \mathrm{id}$ et $f \circ g = \mathrm{id}$ en regardant sur les systèmes de générateurs. $\square$

Par une récurrence immédiate et grâce à la remarque 4. on obtient alors :

Corollaire 1.20 *Si (V, ψ) est un k-espace quadratique de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale, alors*

(1) $\dim C(V) = 2^n$ *et* $\dim C_0(V) = 2^{n-1}$.

(2) Les éléments de l'ensemble $\mathcal{B} = \{e_{i_1} \ldots e_{i_\ell},\ \ell \in \{1, \ldots, n\},\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq n\}$, forment une base du k-espace vectoriel $C(V)$.

Lemme 1.21 *Soit (V, ψ) un espace quadratique sur k et $a \in k^*$. Alors*

(1) $C_0(a\psi) \simeq C_0(\psi)$.

(2) Soit $\phi = \langle a \rangle \perp \psi$. Alors $C_0(\phi) \simeq C(-a\psi)$.

(3) Soit $k \subset K$ une extension de corps. Alors $K \otimes_k C(V, \psi) = C(K \otimes_k V, \psi_K)$, où ψ_K est la forme quadratique ψ vue comme une forme quadratique sur le corps K.

Démonstration.

(1) Considérons le corps $K = k(\sqrt{a})$ et l'algèbre $C(\psi)_K = C(\psi) \otimes_k K$. On remarque que pour tout $v \in V$
$$(v \otimes \sqrt{a})^2 = a\psi(v) \otimes 1.$$
On a donc, par propriété universelle de $C(a\psi)$, un morphisme d'algèbres $\alpha : C(a\psi) \to C(\psi)_K$ tel que $\alpha(v) = v \otimes \sqrt{a}$. De plus, pour tous $v, v' \in V$
$$(v \otimes \sqrt{a})(v' \otimes \sqrt{a}) = avv' \otimes 1 \in C_0(\psi) \subset C(\psi)_K,$$
donc l'image de tout élément de $C_0(a\psi)$ est dans $C_0(\psi)$; α se restreint en un morphisme de $C_0(a\psi)$ dans $C_0(\psi)$. Soient $e_1, \ldots, e_n$ les générateurs de $C(a\psi)$, $f_1, \ldots, f_n$ ceux de $C(\psi)$ associés à une base de V donnée. Pour tout $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ pair et pour tous $1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq n$ on a
$$\alpha(f_{i_1} \ldots f_{i_\ell}) = a^{\frac{\ell}{2}} e_{i_1} \ldots e_{i_\ell},$$
le morphisme envoie une base sur une base : c'est un isomorphisme.

(2) Étendons l'espace V en écrivant $W = k \cdot e_0 \oplus V$ où e_0 est un vecteur orthogonal à V tel que $\psi(e_0) = a$. Si l'espace quadratique (V, ψ) a pour base $(e_1, \ldots, e_n)$, l'espace quadratique (W, ϕ) a pour base $(e_0, \ldots, e_n)$. Pour tout $v \in V$,
$$(e_0 v)^2 = e_0 v e_0 v = -e_0^2 v^2 = -\psi(e_0)\psi(v) = -a\psi(v),$$
donc par propriété universelle de $C(-a\psi)$, on construit un morphisme d'algèbres $\alpha : C(-a\psi) \to C_0(\phi)$ tel que pour tout $v \in V$, $\alpha(v) = e_0 v$. En particulier, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tous $1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq n$ on a
$$\alpha(e_{i_1} \ldots e_{i_\ell}) = e_0 e_{i_1} \ldots e_0 e_{i_\ell} = (-1)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} e_0^\ell e_{i_1} \ldots e_{i_\ell},$$
colinéaire à $e_0 e_{i_1} \ldots e_{i_\ell}$ si ℓ est impair, à $e_{i_1} \ldots e_{i_\ell}$ sinon. Ce morphisme est donc un isomorphisme.

(3) Soit le morphisme $\mathrm{id} \otimes i : K \otimes_k V \to K \otimes_k C(V)$, où $i : V \to C(V)$ est l'inclusion. Pour tout $\lambda \in K, v \in V$, on a

$$g(\lambda \otimes v)^2 = (\lambda \otimes v)(\lambda \otimes v) = \lambda^2 \otimes \psi(v) = \psi(\lambda v) \otimes 1,$$

ce qui nous fournit par propriété universelle de $C(K \otimes_k V)$ un morphisme de $K-$algèbres $g : C(K \otimes_k V) \to K \otimes_k C(V)$. Pour l'autre sens, on considère les applications K-linéaires

$$h_1 : \begin{array}{ccc} K & \to & C(K \otimes_k V) \\ \lambda & \mapsto & \lambda \end{array} \quad \text{et} \quad h_2 : \begin{array}{ccc} C(V) & \to & C(K \otimes_k V) \\ x & \mapsto & 1 \otimes x. \end{array}$$

Leurs images commutent, donc par la propriété universelle de l'algèbre produit tensoriel, on peut les factoriser en un morphisme de $K-$algèbres $h : K \otimes_k C(V) \to C(K \otimes_k V)$. Il est ensuite facile de vérifier que h et g sont inverses l'un de l'autre, en le vérifiant sur les générateurs. □

Nous pouvons maintenant démontrer un résultat essentiel sur les algèbres de Clifford, qui nous servira dans la démonstration du théorème principal.

Théorème 1.22 *Soit (V, ψ) un espace quadratique de dimension impaire $2n + 1 \geq 1$. Alors $C_0(\psi)$ est une algèbre centrale simple.*

Démonstration. Grâce au troisième point du lemme 1.21, on peut supposer que le corps k est algébriquement clos. De plus, si on écrit $\psi = \langle a \rangle \perp \phi$, d'après le lemme 1.21, $C_0(\psi) = C(-a\phi)$. Il suffit donc de prouver que l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique de dimension paire $2n$ est centrale simple. Puisque toute forme quadratique ϕ d'au moins 2 variables sur un corps algébriquement clos est isotrope, ϕ est équivalente à une somme de plans hyperboliques. Ainsi, d'après la proposition 1.19,

$$C(\phi) \simeq \underbrace{C(\mathbb{H})\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} C(\mathbb{H})}_{n \text{ fois}}.$$

Or on a vu que $C(\mathbb{H}) \simeq (-1, -1)_k \simeq M_2(k)$. On admet que $\widehat{M_p}(k)\widehat{\otimes}\widehat{M_q}(k) \simeq \widehat{M_{pq}}(k)$, où $\widehat{M_r}(k)$ est l'algèbre $M_r(k)$ graduée en « échiquier ». Cela implique $C(\phi) \simeq \widehat{M_{2^n}}(k)$ en tant qu'algèbres graduées. Puisque $M_{2^n}(k)$ est centrale simple, il en est de même pour $C(\phi)$. □

2 Deux invariants quadratiques : le niveau et le u-invariant

Dans cette partie, nous allons présenter les deux invariants introduits par Kaplansky. L'étude préalable des formes de Pfister nous permettra de démontrer le théorème de Pfister : le niveau d'un corps, s'il n'est pas infini, est toujours une puissance de 2.

2.1 Les formes de Pfister

Définition 2.1 *On définit le produit de Kronecker de deux formes quadratiques ainsi :*

$$\begin{aligned}\langle a_1, ..., a_n\rangle \otimes \langle b_1, ..., b_m\rangle &= a_1\langle b_1, ..., b_m\rangle \perp ... \perp a_n\langle b_1, ..., b_m\rangle \\ &= \langle a_1b_1, a_1b_2, ..., a_1b_m, ..., a_nb_1, ...a_nb_m\rangle\end{aligned}$$

Dans l'espace quadratique considéré, le produit de Kronecker correspond au produit tensoriel des matrices.

Fait 2.2 *Le produit de Kronecker est distributif par rapport à la somme orthogonale.*

À partir de ce moment, on écrira parfois $f = g$ pour signifier que les formes quadratiques f et g sont équivalentes. Les formes quadratiques sont toutes supposées non dégénérées.

Théorème 2.3 (Premier théorème de Witt) *Toute forme quadratique f non dégénérée s'écrit :*

$$f = \underbrace{\mathbb{H} \perp ... \perp \mathbb{H}}_{m} \perp g$$

où g est une forme quadratique anisotrope, que l'on appelle partie anisotrope de f. Cette décomposition est unique à isomorphisme de g près. L'entier m est appelé indice de Witt de f.

Théorème 2.4 (Second théorème de Witt) *Si f, f_1, f_2 sont des formes quadratiques telles que $f \perp f_1$ et $f \perp f_2$ sont équivalentes, alors f_1 et f_2 sont équivalentes.*

Démonstration. On commence par démontrer le second théorème de Witt. Par une récurrence facile, on est ramené au cas où $f = \langle a\rangle$. Le problème se résout alors matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \lambda & L \\ C & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & {}^tC \\ {}^tL & {}^tP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Il s'agit de démontrer que les matrices A et B sont congruentes.

$$\begin{cases} a = a\lambda^2 + LA{}^tL \\ 0 = a\lambda{}^tC + LA{}^tP \\ (0 = a\lambda C + PA{}^tL) \\ B = PA{}^tP + aC{}^tC \end{cases}$$

On cherche une matrice Q telle que $B = QA{}^tQ$. L'astuce de Borevich et Shafarevich ([1]) consiste à la chercher sous la forme $Q = P + \xi CL$, où $\xi \in k$. On a donc :

$$\begin{aligned} B &= PA{}^tP + aC{}^tC = QA{}^tQ = (P + \xi CL)A({}^tP + \xi{}^tL{}^tC) \\ &= PA{}^tP + \xi CLA{}^tP + \xi PA{}^tL{}^tC + \xi^2 CLA{}^tL{}^tC \\ &\Rightarrow \xi^2 CLA{}^tL{}^tC + \xi CLA{}^tP + \xi PA{}^tL{}^tC - aC{}^tC = 0\end{aligned}$$

On simplifie ensuite grâce aux relations obtenues.

$$\xi^2 a(1-\lambda^2)C^tC - 2a\lambda\xi C^tC - aC^tC = 0$$

f étant supposée non dégénérée, on peut simplifier par a. Si la matrice C^tC est nulle, alors $Q = P$ convient. Lorsqu'elle ne l'est pas, on peut écrire :

$$\xi^2(1-\lambda^2) - 2\lambda\xi - 1 = 0$$

Si $\lambda^2 = 1$, on prend $\xi = -1/2\lambda$. Si l'équation est bien de degré 2, son discriminant est :

$$\Delta = 4\lambda^2 + 4(1-\lambda^2) = 4 = 2^2$$

Et donc $\xi = \frac{\lambda \pm 1}{(1-\lambda^2)} = -\frac{1}{\lambda \mp 1}$ convient.

L'existence de la décomposition se fait par une récurrence triviale à partir de la proposition 1.3. Du second théorème de Witt découle l'unicité de cette décomposition. Supposons :

$$f = \underbrace{\mathbb{H}\perp ... \perp\mathbb{H}}_{m} \perp g = \underbrace{\mathbb{H}\perp ... \perp\mathbb{H}}_{m'} \perp g'$$

Si $m' \geq m$, on peut simplifier :

$$g = \underbrace{\mathbb{H}\perp ... \perp\mathbb{H}}_{m'-m} \perp g'$$

Comme g est anisotrope, $m = m'$ et g est équivalente à g'. □

Définition 2.5 *On appelle forme de Pfister d'ordre n une forme quadratique sur k du type :*

$$\langle 1, a_1\rangle \otimes ... \otimes \langle 1, a_n\rangle = \langle 1, a_1, ..., a_n, a_1a_2, ..., a_1a_2...a_n\rangle.$$

On désignera cette forme de dimension 2^n par la notation $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle$.

Définition 2.6 *On appelle facteur de similitude de la forme quadratique f un scalaire non nul λ tel que f et λf sont équivalentes. On pose :*

$$S(f) = \{\lambda \in k^* \mid f = \lambda f\}$$

qui est un sous-groupe multiplicatif de k.

Lemme 2.7 *Pour une forme de Pfister anisotrope, $D(f) = S(f)$.*

Démonstration. Une forme de Pfister représente 1. Si $\lambda \in S(f)$, λf représente λ, donc f représente λ : $S(f) \subset D(f)$. Réciproquement, si $\lambda \in D(f)$, on raisonne par récurrence sur l'ordre. Prouvons le résultat pour $\langle\langle a\rangle\rangle$: soit $\lambda = \langle\langle a\rangle\rangle(x_0, y_0)$. On a supposé la forme anisotrope, donc $-a$ n'est pas un carré et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & -ay_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \qquad (\det A = x_0^2 + ay_0^2 \neq 0)$$

définit un changement de variable inversible entre $\langle\langle a\rangle\rangle$ et $\lambda\langle\langle a\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned} \lambda\langle\langle a\rangle\rangle(x,y) &= (x_0^2 + ay_0^2)(x^2 + ay^2) \\ &= ((xx_0 - ayy_0)^2 + a(yx_0 + xy_0)^2) \\ &= \langle\langle a\rangle\rangle(xx_0 - ayy_0, yx_0 + xy_0) \end{aligned}$$

Supposons à présent le résultat vrai au rang n.

$$f = g \otimes \langle 1, b\rangle = g \perp (bg)$$

Premier cas : $\lambda \in D(g)$**.** Par récurrence $\lambda g = g$ et $\lambda f = (\lambda g)\perp(\lambda bg) = g\perp(bg) = f$.

Deuxième cas : $\lambda \in D(bg)$**.** Dans ce cas, g représente $b^{-1}\lambda$, et $b^{-1}\lambda \in S(g)$.

$$b^{-1}\lambda g = g \Rightarrow \lambda g = bg \Rightarrow \lambda f = (bg)\perp(b^2 g) = (bg)\perp g = f$$

Troisième cas : $\lambda = \alpha + b\beta \quad (\alpha, \beta \in D(g))$**.** On a alors, en appliquant à deux reprises l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} \lambda f & = & (\alpha + b\beta)(g\perp bg) \\ & = & \alpha(1 + b\beta\alpha^{-1})(g\perp b\beta\alpha^{-1}g) \\ & = & \alpha(1 + b\beta\alpha^{-1})\langle 1, b\beta\alpha^{-1}\rangle \otimes g \\ & = & \alpha\langle 1, b\beta\alpha^{-1}\rangle \otimes g \\ & = & \alpha(g\perp b\beta\alpha^{-1}g) \\ & = & (\alpha g\perp b\beta g) = g\perp(bg) = f \end{array}$$

Cette transformation gélatino-formelle s'appuie sur la structure de groupe de $S(g)$, et sur le résultat au rang 1 pour la forme de Pfister $\langle\langle b\beta\alpha^{-1}\rangle\rangle$. Encore une fois, $D(f) \subset S(f)$. □

Lemme 2.8 *Les formes de Pfister isotropes sont hyperboliques.*

Démonstration. Par récurrence sur l'ordre. Le résultat est vrai pour $\langle\langle a_1\rangle\rangle$, qui est de dimension 2, donc soit anisotrope, soit hyperbolique selon le premier théorème de Witt. Supposons le résultat vrai à l'ordre n, et soit une f forme de Pfister isotrope d'ordre $n+1$.

$$f = g \otimes \langle 1, b\rangle$$

Si g est isotrope, elle est hyperbolique (hypothèse de récurrence) et f est hyperbolique. Sinon, g est anisotrope et $D(g) = S(g)$, or $f = g\perp(bg)$ est isotrope.

$$\exists \alpha, \beta \in D(g) \qquad \alpha = -b\beta \in D(g) = S(g)$$

$$f = g\perp(bg) = (\alpha g)\perp(b\beta g) = (\alpha g)\perp(-\alpha g)$$

La forme est bien hyperbolique. □

En résumé, deux cas se présentent pour une forme de Pfister : soit elle est hyperbolique, soit elle est anisotrope et représente exactement ses facteurs de similitude. On dit que les formes de Pfister sont *multiplicatives.*

2.2 Étude du niveau

Définition 2.9 *On appelle niveau d'un corps k, noté $\mathfrak{s}(k)$ le plus petit entier n tel que -1 s'écrive dans k comme somme de n carrés.*

Ce $\mathfrak{s}$ utilisé pour désigner le niveau vient de l'allemand *Stufe*. Par convention, on pose $\mathfrak{s}(k) = \infty$ si -1 n'est pas somme de carrés. Il est très facile de déterminer le niveau de certains corps.

Fait 2.10 $\mathfrak{s}(\mathbb{R}) = \infty, \quad \mathfrak{s}(\mathbb{Q}) = \infty, \quad \mathfrak{s}(\mathbb{C}) = 1.$

Proposition 2.11 *Le niveau d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ est 1 si q est une puissance de 2 ou si $q \equiv 1[4]$; en revanche, si $q \equiv 3[4]$ on a $\mathfrak{s}(\mathbb{F}_q) = 2$.*

Démonstration. Pour un corps de caractéristique 2, bien que ce cas ne nous intéresse pas, on aurait $-1 = 1 = 1^2$, et donc $\mathfrak{s}(k) = 1$.

Si $q \equiv 1$ [4] alors -1 est un carré, car $(-1)^{\frac{q-1}{2}} = 1$ et $\mathbb{F}_q*$ est cyclique. Par conséquent $\mathfrak{s}(\mathbb{F}_q) = 1$.

Si $q \equiv 3$ [4], par le même argument -1 n'est pas un carré. Il est en revanche somme de deux carrés : si x et y parcourent $\mathbb{F}_q$, x^2 et $-y^2 - 1$ prennent chacun $\frac{q+1}{2}$ valeurs. Ils ont donc au moins une valeur en commun, $x_0^2 = -y_0^2 - 1$ et $-1 = x_0^2 + y_0^2$. On a $\mathfrak{s}(\mathbb{F}_q) = 2$. □

Théorème 2.12 (Pfister) *Le niveau d'un corps, s'il n'est pas infini, est toujours une puissance de* 2*.*

Démonstration. Soit k un corps, de niveau $\mathfrak{s}(k) \neq \infty$. On a donc $2^n \leq \mathfrak{s}(k) < 2^{n+1}$ pour un certain n. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{s}(k) = 2^n$. Considérons la forme de Pfister $f = \langle\langle 1, ..., 1\rangle\rangle$, de dimension 2^{n+1}. On peut l'écrire :

$$f = f_0 \perp f_1 = \underbrace{\langle 1, ..., 1\rangle}_{\mathfrak{s}(k)} \perp \underbrace{\langle 1, ..., 1\rangle}_{2^{n+1}-\mathfrak{s}(k)}$$

Par définition du niveau, f_0 représente -1 ; or $f_1(1, 0, ..., 0) = 1$, donc f est une forme de Pfister isotrope et l'on sait qu'elle est hyperbolique :

$$f = \underbrace{\mathbb{H} \perp ... \perp \mathbb{H}}_{2^n} = \underbrace{\langle 1, ..., 1\rangle}_{2^n} \perp \underbrace{\langle -1, ..., -1\rangle}_{2^n} = g_0 \perp g_1$$

Or par définition, $f = g_0 \perp g_0$. Par le second théorème de Witt, les formes g_0 et g_1 sont équivalentes, et g_1 représente 1. Par conséquent, -1 est somme de 2^n carrés, ce qui conclut. □

2.3 Présentation du u-invariant

Définition 2.13 *Si k est un corps, on appelle u-invariant de k, noté $u(k)$, la dimension maximale d'une forme quadratique anisotrope sur ce corps, i.e. le plus petit entier n tel qu'il existe une forme anisotrope de dimension n, tandis que toutes les formes de dimension supérieure sont isotropes sur k.*

Cette dénomination, « u-invariant », est l'abréviation d'*invariant universel*. En effet, il existe une caractérisation équivalente du u-invariant en termes de formes universelles.

Proposition 2.14 *Le u-invariant de k est aussi la dimension à partir de laquelle toutes les formes quadratiques sur k sont universelles.*

Démonstration. Soit $n = u(k)$. Par définition, toute forme de dimension $k > n$ est isotrope sur k, donc universelle. Soit f une forme de dimension n. Si elle est isotrope, elle est universelle. Sinon, soit $d \in k$. La forme $f \perp \langle -d\rangle$ est de dimension $n + 1$, elle est donc isotrope et comme f est anisotrope, f représente d. Ceci étant vrai pour tout d, f est universelle. On a montré que toute forme de dimension $k \geq n$ était universelle.

Réciproquement, il existe f une forme quadratique de dimension n anisotrope.

$$f = g \perp \langle a \rangle$$

Il existe donc une forme quadratique g de dimension $n-1$ et un élément $a \in k$ tel que g ne représente pas $-a$. □

Fait 2.15 $u(\mathbb{R}) = \infty, \quad u(\mathbb{Q}) = \infty, \quad u(\mathbb{C}) = 1, \quad u(\mathbb{Q}_p) = 4$ *(Hasse, 1923).*

Proposition 2.16 *Les corps finis de caractéristique $p \neq 2$ sont de u-invariant* 2.

Démonstration. Soit k un corps fini de cardinal $q = p^n$. Il y a dans ce corps $\frac{q+1}{2}$ carrés. Soit s un élément de k qui n'est pas un carré. Alors la forme quadratique de dimension 2 :

$$\phi(X,Y) = X^2 - sY^2$$

est anisotrope ; ainsi $u(k) \geq 2$. D'autre part, soit une forme quadratique de dimension 3 sur ce même corps :

$$\phi(X,Y,Z) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$$

On suppose $\beta, \gamma \neq 0$ (si ce n'est pas le cas, la forme est dégénérée et donc isotrope). Si l'on fixe $X = 1$ et que Y et Z parcourent k, $\alpha + \beta Y^2$ et $-\gamma Z^2$ prennent chacun $\frac{q+1}{2}$ valeurs distinctes. On peut donc trouver $(y,z) \in k^2$ tels que :

$$\alpha + \beta y^2 = -\gamma z^2 \quad \Rightarrow \quad \phi(1,y,z) = 0$$

Toute forme de dimension 3 étant isotrope, $u(k) = 2$. □

Définition 2.17 *Pour un corps k, on suppose connus l'anneau des séries formelles $k[[t]]$ et son corps des fractions, appelé corps des séries formelles de Laurent, noté $k((t))$.*

Proposition 2.18 *Si $u(k) < \infty$, on a $u(k((t))) = 2u(k)$.*

Démonstration. D'une part, si ϕ est une forme quadratique anisotrope de dimension n sur k, on considère la forme de dimension $2n$:

$$\Phi(X_1, ..., X_{2n}) = \phi(X_1, ..., X_n) + t\phi(X_{n+1}, ..., X_{2n})$$

qui est anisotrope sur $k((t))$. En effet, si $(X_1, ..., X_{2n}) \in k((t))^{2n}$ est un vecteur isotrope, quitte à multiplier par une série on peut supposer $(X_1, ..., X_{2n}) \in k[[t]]^{2n}$. $\phi(X_1, ..., X_n)$, $\phi(X_{n+1}, ..., X_{2n})$ sont donc des séries de $k[[t]]$ vérifiant :

$$\phi(X_1, ..., X_n) + t\phi(X_{n+1}, ..., X_{2n}) = 0$$

Le coefficient constant de $\phi(X_1, ..., X_n)$ est donc nul. Comme ϕ est anisotrope sur k, les coefficients constants de $X_1, ..., X_n$ sont nuls, et ces séries sont divisibles par t.

$$\forall i = 1, ..., n \quad X_i = tY_i \quad \Rightarrow \quad \phi(X_1, ..., X_n) = t^2\phi(Y_1, ..., Y_n)$$

$$t^2\phi(Y_1, ..., Y_n) + t\phi(X_{n+1}, ..., X_{2n}) = 0$$

On divise tout par t puis on recommence pour obtenir par récurrence que $(X_1, ..., X_{2n}) = (0, ..., 0)$. Ceci montre que $u(k((t))) \geq 2u(k)$. L'autre sens, plus compliqué, fait appel au lemme d'Hensel. □

Corollaire 2.19 $u(\mathbb{C}((X_1))...((X_n))) = 2^n$.

Proposition 2.20 *On a toujours l'inégalité $u(k) \geq s(k)$.*

Démonstration. En effet, si n est le niveau de k, la forme $X_1^2 + ... + X_{n-1}^2$ ne représente pas -1 et par conséquent $X_1^2 + ... + X_n^2$ est une forme quadratique de dimension n et anisotrope sur k. □

u-invariant et niveau d'un corps semblent très liés. C'est ce qui a conduit Kaplansky à conjecturer que l'un comme l'autre étaient toujours des puissances de deux.

Conjecture fausse : *Le u-invariant d'un corps est toujours une puissance de* 2.

(Kaplansky, 1953)

Fait 2.21 *Il existe des corps de u-invariant* $2n$ *pour tout* n *(Merkurjev, 1988), ainsi que des corps de u-invariant* 9 *(Izhboldin, 2001) et* $2^r + 1$ *pour tout* $r \geq 3$ *(Vishik, 2005). Il n'existe pas de corps de u-invariant* 3, 5 *ni* 7 *(résultat élémentaire, plus ancien).*

Le premier de ces résultats fait l'objet du présent travail. La forme générale du u-invariant est toujours inconnue. On ne sait pas, par exemple, s'il existe un corps de u-invariant 11. Nous donnons au lecteur, en exclusivité, un résultat qui paraîtra bientôt :

Fait 2.22 *Le corps* $\mathbb{Q}_p(t)$ *est de u-invariant* 8*, ainsi que toutes ses extensions finies.*

Le cas $p \neq 2$ a été démontré par Parimala et Suresh en 2007, et le cas $p = 2$ par Heath-Brown et Leep en 2009.

3 Le théorème de Merkurjev

3.1 Propriétés des ordres de $D(t)$

On considère ici une algèbre à division D, de dimension finie sur son centre $k = Z(D)$.

Définition 3.1 *On note $D[t]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans D, et $D(t)$ l'algèbre des quotients centraux, que l'on définit par :*

$$D(t) = (k[t]\backslash\{0\})^{-1}D[t].$$

Fait 3.2 *On a $D[t] \simeq D \otimes_k k[t]$, $D(t) \simeq D \otimes_k k(t)$.*

Proposition 3.3 *$D[t]$ est un anneau principal à gauche.*

Démonstration. Il s'agit d'établir dans $D[t]$ un algorithme de division euclidienne à gauche. Tout fonctionne comme dans le cas commutatif. Soient $A, B \in D[t]$, il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $D[t]$ tel que :

$$A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On le montre par récurrence sur le degré de A. Soit maintenant I un idéal à gauche de $D[t]$, et P dans I un élément de degré minimal. La division euclidienne à gauche d'un élément de I par P montre que tout élément est de la forme QP, et donc que $I = D[t].P$. □

Proposition 3.4 *$D(t)$ est une algèbre à division.*

Démonstration. Il est facile de voir que $D(t)$ est intègre. L'intégrité de D implique celle de $D[t]$ (prendre les coefficients dominants), qui est équivalente à celle de $D(t)$. Or, pour une algèbre associative unitaire de dimension finie, il est équivalent d'être intègre et d'être à division : soit x un élément non nul de $D(t)$, il possède un polynôme minimal μ_x dont le coefficient constant est non nul (par intégrité). D est à division, par conséquent ce coefficient constant non nul est inversible, et x est inversible dans $D(t)$. □

Définition 3.5 *On appelle ordre de $D(t)$ sur k[t] un sous-anneau de $D(t)$ qui est également un k[t]-module de type fini.*

Lemme 3.6 *Tout ordre de $D(t)$ est conjugué à un sous-anneau de $D[t]$.*

Démonstration. Soit Λ un ordre de $D(t)$. Il s'agit de montrer que pour un certain $x \in D[t]$, on a :

$$x.\Lambda.x^{-1} \subset D[t]$$

On définit l'ensemble :

$$M = D[t].\Lambda$$

C'est un sous-module de type fini de $D(t)$ sur $k[t]$; le ppcm d des dénominateurs de ses générateurs est donc aussi le ppcm des dénominateurs de tous ses éléments. Ainsi :

$$d.M \subset D[t]$$

C'est un idéal à gauche de $D[t]$ dont on sait qu'il est principal à gauche et par conséquent :

$$\exists x \in D[t] \quad d.M = D[t].x$$

On peut considérer

$$\Lambda' = \{z \in D(t) \mid d.M.z \subset d.M\}$$

On vérifie sans problème que $\Lambda \subset \Lambda'$ et que $\Lambda' \subset x^{-1}.D[t].x$:

$$z \in \Lambda \Rightarrow d.M.z = d.D[t].\Lambda.z = d.D[t].\Lambda = d.M$$

$$z \in \Lambda' \Rightarrow d.M.z \subset d.M \Rightarrow D[t].xz \subset D[t].x \Rightarrow xz \in D[t]x \Rightarrow z \in x^{-1}.D[t].x,$$

d'où l'on conclut *in fine* que $x.\Lambda.x^{-1} \subset D[t]$.

3.2 Le théorème de Merkurjev

Théorème 3.7 (Théorème de réduction d'indice de Merkurjev) *Soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur k et ψ une forme quadratique anisotrope sur k de dimension au moins 2. Alors l'algèbre $D \otimes_k k(\psi)$ n'est pas à division si et seulement si D contient une image homomorphe de l'algèbre $C_0(\psi)$. Si ψ est isotrope non dégénérée de dimension au moins 3, l'énoncé vaut également, mais de manière vide, car aucune de ces conditions ne peut être satisfaite.*

Démonstration. Supposons d'abord ψ anisotrope. Quitte à la multiplier par un scalaire, ce qui ne change ni $k(\psi)$ ni $C_0(\psi)$, on peut supposer que ψ s'écrit

$$\psi = -X_0^2 + a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2,$$

où $a_1, a_2, \ldots a_n \in k$. D'après le lemme 1.21 $C_0(\psi)$ est isomorphe à $C(a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2)$. Par définition de l'algèbre de Clifford $C(a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2)$, le théorème se reformule alors de la façon suivante :

> $D \otimes_k k(\psi)$ n'est pas à division si et seulement si D contient des éléments $d_1, \ldots, d_n$ satisfaisant les relations
>
> $$\begin{cases} d_i^2 = a_i \text{ pour } i \in \{1, \ldots, n\} \\ d_id_j = -d_jd_i \text{ pour } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Nous allons démontrer cela par récurrence sur n.
Dans le cas $n = 1$ l'énoncé devient : $D \otimes_k k(\sqrt{a_1})$ n'est pas à division si et seulement si D contient un sous-corps isomorphe à $k(\sqrt{a_1})$. Puisque ψ est anisotrope, on a $\sqrt{a_1} \notin k$.
Si $D \otimes_k k(\sqrt{a_1})$ n'est pas à division, elle n'est pas intègre, donc il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in D$ tels que $(\alpha \otimes 1 + \beta \otimes \sqrt{a_1})(\gamma \otimes 1 + \delta \otimes \sqrt{a_1}) = 0$. En développant, cela donne deux équations :

$$\begin{cases} \alpha\gamma + a_1\beta\delta = 0 \\ \alpha\delta + \beta\gamma = 0. \end{cases}$$

Ainsi on a, puisque D est à division,

$$\begin{cases} a_1 = -\alpha\gamma\delta^{-1}\beta^{-1} \\ \gamma\delta^{-1} = -\beta^{-1}\alpha. \end{cases}$$

Finalement, en remplaçant, $a_1 = -\alpha(-\beta^{-1}\alpha)\beta^{-1} = (\alpha\beta^{-1})^2$, donc D contient un élément de carré a_1.
Réciproquement, si D contient un élément $\sqrt{a_1}$ de carré a_1,

$$(\sqrt{a_1} \otimes 1 - 1 \otimes \sqrt{a_1})(\sqrt{a_1} \otimes 1 + 1 \otimes \sqrt{a_1}) = a_1 \otimes 1 - 1 \otimes a_1 = 0,$$

donc $D \otimes_k k(\sqrt{a_1})$ n'est pas intègre, donc pas à division.
Supposons à présent le résultat vrai au rang $n-1$ où $n \geq 2$. On introduit la forme quadratique

$$\theta = -Y_0^2 + a_1 Y_1^2 + \ldots + a_{n-2} Y_{n-2}^2 + (a_{n-1} t^2 + a_n) Y_{n-1}^2$$

de dimension n sur $k(t)$, obtenue comme dans le paragraphe 1.2. D'après la proposition 1.10, les corps $k(\psi)$ et $k(t)(\theta)$ sont isomorphes, et donc $D \otimes_k k(\psi) \simeq D \otimes_k k(t)(\theta)$. D'autre part,

$$D \otimes_k k(t)(\theta) = D \otimes_k \big(k(t) \otimes_{k(t)} k(t)(\theta)\big) = (D \otimes_k k(t)) \otimes_{k(t)} k(t)(\theta) = D(t) \otimes_{k(t)} k(t)(\theta).$$

Ainsi, $D \otimes_k k(\psi)$ n'est pas à division si et seulement si $D(t) \otimes_{k(t)} k(t)(\theta)$ n'est pas à division, ce qui par l'hypothèse de récurrence, est équivalent au fait que $D(t)$ contienne des éléments $e_1, \ldots, e_{n-1}$ satisfaisant les relations

$$\begin{cases} e_i^2 = a_i \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, n-2\} \\ e_{n-1}^2 = a_{n-1} t^2 + a_n \\ e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{pour} \quad i, j \in \{1, \ldots, n-1\}, \ i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Il suffit donc de prouver que D contient des éléments $d_1, \ldots, d_n$ vérifiant les relations (2) si et seulement si $D(t)$ contient des éléments $e_1, \ldots, e_{n-1}$ vérifiant les relations (3).
Si cette dernière condition est satisfaite, considérons la sous $k[t]$-algèbre Λ de $D(t)$ engendrée par les éléments $e_1, \ldots, e_{n-1}$. C'est un module de type fini sur $k[t]$, donc un ordre de $D(t)$. D'après le lemme 3.6, quitte à remplacer Λ par un ordre conjugué, ce qui ne change pas les relations vérifiées par les e_i, on peut supposer que $\Lambda \subseteq D[t]$, et donc que $e_1, \ldots, e_{n-1} \in D[t]$. Ainsi, pour $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, puisque e_i^2 est de degré zéro dans $D[t]$, on doit avoir $e_i \in D$. D'autre part, e_{n-1}^2 est de degré deux, donc e_{n-1} est de la forme $e_{n-1} = xt + y$ pour $x, y \in D$ bien choisis. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ on a $e_i x t + e_i y = e_i e_{n-1} = -e_{n-1} e_i = -x e_i t - y e_i$ et donc par identification des coefficients, x et y anticommutent avec e_i. De plus, $(xt+y)^2 = e_{n-1}^2 = a_{n-1} t^2 + a_n$ donne

$$x^2 = a_{n-1}, \quad xy = -yx, \quad y^2 = a_n.$$

En posant $d_i = e_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $d_{n-1} = x$ et $d_n = y$ on obtient donc des élements $d_1, \ldots, d_n \in D$ vérifiant les relations (2), ce qui prouve un sens de l'équivalence.
Réciproquement, si D contient des élements $d_1, \ldots, d_n$ satisfaisant (2), alors les éléments $e_1, \ldots, e_{n-1} \in D(t)$ définis par $e_i = d_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ et $e_{n-1} = d_{n-1} t + d_n$ vérifient les relations (3), ce qui conclut l'autre sens de l'équivalence.
Dans le cas où ψ est isotrope, on peut supposer de plus que $a_1 = 1$. Il est alors impossible de trouver des éléments $d_1, \ldots, d_n$ tels que les conditions (2) soient vérifiées car sinon d_1 serait un élément non central de D tel que $d_1^2 = 1$, et le corps $k(d_1)$ aurait trois éléments de carré 1. De plus, le corps $k(\psi)$ est alors une extension transcendante pure de k et $D \otimes_k k(\psi)$ est donc à division. $\square$

4 Construction d'un corps de u-invariant pair

La construction présentée procède d'un double passage à la limite inductive. Partant d'une algèbre D construite *ad hoc* comme produit tensoriel d'algèbres de quaternions, on étend successivement les scalaires aux corps des fonctions de toutes les formes quadratiques de dimension $2n+1$. L'enjeu de cette construction est double : pour que le u-invariant soit $2n$, il faut d'une part que les formes quadratiques de dimension supérieure soient isotropes, et d'autre part qu'il existe une forme anisotrope de dimension $2n$.

4.1 Construction et propriétés de l'algèbre D

La proposition suivante nous garantira l'existence d'une forme quadratique anisotrope de dimension $2n$ après extension des scalaires.

Proposition 4.1 *Soit $A = Q_1 \otimes_{\mathrm{F}} ... \otimes_{\mathrm{F}} Q_{n-1}$ un produit d'algèbres de quaternions sur un corps F. Il existe une forme quadratique q_A de dimension $2n$ sur F telle que si l'on étend les scalaires à une extension F' de F et telle que $A \otimes_F \mathrm{F}'$ demeure à division, q_A est anisotrope sur F'.*

Démonstration. Pour $l = 1, ..., n-1$, l'algèbre de quaternions Q_l est engendrée en tant que F-algèbre par deux éléments dont nous notons i_l, j_l les images dans A. Nous rappelons que ces éléments anticommutent et que leurs carrés sont centraux, i.e. :

$$\forall l = 1, ..., n-1 \qquad i_l^2 \in \mathrm{F}^*, \quad j_l^2 \in \mathrm{F}^*, \quad k_l = i_l j_l = -j_l i_l$$

D'autre part, les éléments de deux de ces algèbres commutent pour le produit naturel défini sur le produit tensoriel A.

$$\forall l \neq m \qquad i_l i_m = i_m i_l \quad i_l j_m = j_m i_l \quad j_l j_m = j_m j_l$$

On définit alors, pour $l = 1, ..., n-1$ les éléments :

$$u_l = k_1 ... k_{l-1} i_l \qquad v_l = k_1 ... k_{l-1} j_l \qquad w = k_1 ... k_{n-1}$$

dont on vérifie qu'ils anticommutent et sont de carrés centraux.

$$w^2 = k_1^2 ... k_{n-1}^2 \in \mathrm{F}^*, \quad \forall l \; u_l^2 = k_1^2 ... k_{l-1}^2 i_l^2 \in \mathrm{F}^* \text{ et de même pour } v_l.$$

$$\begin{aligned} \forall l < m \qquad u_l u_m &= k_1 ... k_{l-1} i_l k_1 ... k_{m-1} i_m &&= -k_1 ... k_{l-1} k_1 ... k_{m-1} i_l i_m \\ &= -k_1 ... k_{m-1} k_1 ... k_{l-1} i_m i_l &&= -k_1 ... k_{m-1} i_m k_1 ... k_{l-1} i_l \\ &= -u_m u_l \text{ et ainsi de suite.} \end{aligned}$$

Ces éléments forment la base d'un F-espace vectoriel de dimension $2n-1$:

$$V = \Big(\bigoplus_{l=1}^{n-1} u_l \mathrm{F} \oplus v_l \mathrm{F} \Big) \oplus w\mathrm{F} \subset A$$

Tout élément de V a son carré dans F ; en effet, les carrés des éléments de la base sont centraux et les produits croisés s'annulent par anticommutativité, on peut donc écrire :

$$x \in V, \quad x = wz + \sum_{l=1}^{n-1} u_l x_l + v_l y_l, \quad x^2 = \phi(x_1, y_1, ..., x_{n-1}, y_{n-1}, z) \in \mathrm{F}$$

Où ϕ est une forme quadratique sur F de dimension $2n-1$. On pose enfin :

$$q_A = T^2 - \phi(X_1, Y_1, ..., X_{n-1}, Y_{n-1}, Z)$$

Il reste à voir que q_A vérifie la propriété attendue : supposons qu'elle soit isotrope, et soit alors (t, x) un vecteur isotrope.

$$(t, x) \in \mathrm{F} \times V \backslash (0, 0) \Rightarrow t - x,\ t + x \neq 0 \text{ car } \mathrm{F} \cap V = 0$$

$$q_A(t, x) = t^2 - \phi(x) = t^2 - x^2 = (t - x)(t + x) = 0$$

ce qui est impossible si A est à division. □

Remarque. Dans le cas d'une seule algèbre de quaternions, la construction précédente redonne la norme définie en première partie. Cette norme est bien une forme quadratique de dimension 4 anisotrope sur l'algèbre tant que celle-ci est à division, puisque les vecteurs isotropes sont exactement les éléments non inversibles.

De même pour un produit de deux algèbres de quaternions : on trouve alors la forme d'Albert, bien connue, de dimension 6, qui est anisotrope sur F' si et seulement si $A \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{F}'$ est à division (C'est le théorème d'Albert, [3] p.69). A partir de trois algèbres, une seule implication demeure (celle de la proposition).

Le problème est maintenant de construire un produit tensoriel de $n-1$ algèbres de quaternions qui soit à division.

Définition 4.2 *Soit σ un automorphisme d'un anneau R. On note $R[t, \sigma]$ l'anneau des polynômes σ-tordus de la variable t à coefficients dans R. Ce sont des polynômes non commutatifs, dans lesquels on pose :*

$$\forall r \in R \quad tr = \sigma(r)t$$

Remarque. Si $\sigma = Id$, $R[t, \sigma] = R[t]$ est l'anneau des polynômes habituel.

Proposition 4.3 *Si R est un anneau intègre, $R[t, \sigma]$ est intègre.*

Démonstration. Par l'absurde, soient $P, Q \in R[t, \sigma]$ deux polynômes non nuls vérifiant :

$$\deg P = n \qquad \deg Q = m \qquad PQ = 0$$

Si $p, q \in R$ sont les coefficients dominants à gauche respectifs de ces deux polynômes, le coefficient à gauche de degré mn de PQ est $p.\sigma^n(q) = 0$. Par intégrité de R, $p = 0$ ou $\sigma^n(q) = 0$, ce qui est impossible par hypothèse, σ étant un automorphisme. □

Remarque. Ce résultat tient au fait plus général que si R est intègre, on a dans $R[t, \sigma]$ comme dans $R[t]$ l'égalité :

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q$$

quand P et Q sont des polynômes non nuls.

Ici, on considère le cas particulier où $R = A[x]$, quand A est une algèbre centrale simple à division. On prend pour σ l'automorphisme qui vaut l'identité sur A et envoie x sur $-x$, de telle sorte que $A[x][t, \sigma]$ est l'algèbre des polynômes anticommutatifs en x et t.

Proposition 4.4 *Soit A une algèbre à division sur* F*. Il existe une algèbre de quaternions Q sur une extension* E *de* F *telle que l'algèbre $A \otimes_{\mathrm{F}} Q$ soit encore à division.*

Démonstration. On considère l'algèbre $A[x][t,\sigma]$. On rappelle un fait déjà utilisé en proposition 2.2 : pour une algèbre associative de dimension finie, il est équivalent d'être intègre et d'être à division. Or si l'on étend les scalaires à $\mathrm{F}(t^2,x^2)$, on observe que l'algèbre :

$$B = A[x][t,\sigma] \otimes_{\mathrm{F}[t^2,x^2]} \mathrm{F}(t^2,x^2)$$

est intègre et de dimension finie sur son centre $E = F(t^2,x^2)$. Elle est donc à division, et E est un corps. Si l'on s'intéresse à l'algèbre $E[x][t,\sigma]$, on voit qu'elle s'écrit de manière évidente comme une algèbre de quaternions sur E : on ne fait qu'ajouter à E deux éléments anticommutatifs de carrés respectifs x^2 et t^2.

$$E[x][t,\sigma] = Q = (x^2,t^2)_E$$

On observe enfin que :

$$B = A \otimes_{\mathrm{F}} E[x][t,\sigma] = A \otimes_{\mathrm{F}} Q$$

est une algèbre à division, ce que l'on espérait. □

Proposition 4.5 *Pour tout $n \geq 2$ il existe une algèbre $D = Q_1 \otimes_k ... \otimes_k Q_{n-1}$ sur une extension* F *de notre corps k, qui est à division.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 2$, il suffit de prendre une algèbre de quaternions à division sur le corps k ; c'est l'embarras du choix (pour un k idoine). Si l'on dispose déjà de l'algèbre $A = Q_1 \otimes_k ... \otimes_k Q_{n-1}$ sur F, la construction précédente nous donne une algèbre de quaternions Q_n, sur une extension F' de F, telle que $A \otimes_k Q_n = Q_1 \otimes_k ... \otimes_k Q_n$ soit une algèbre à division, ce qui conclut. □

4.2 Genèse et propriétés de la limite inductive

Définition 4.6 *Soit $(I,\leq)$ un ensemble ordonné. On dit que l'ordre est filtrant s'il vérifie :*

$$\forall (i,j) \in I^2 \ \exists k \in I \quad i \leq k \text{ et } j \leq k.$$

Nous n'aurons à considérer ici que des ordinaux, qui sont des ensembles bien ordonnés, et donc filtrants.

Définition 4.7 *Soit C une catégorie, et $(I,\leq)$ un ensemble ordonné filtrant. On appelle système inductif d'objets de C indexé par I la donnée d'une famille d'objets $(E_i)_{i\in I}$ et de morphismes $f_{i,j} : E_i \to E_j$ pour $i \leq j$ vérifiant :*

$$\forall i \in I \ f_{i,i} = Id_{E_i} \quad \text{et} \quad \forall (i,j,k) \in I^3,\ i \leq j \leq k \Rightarrow f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$$

Autrement dit, tels que les diagrammes triangulaires commutent.

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "f_{i,k}"] \arrow[d, "f_{i,j}"'] & E_k \\ E_j \arrow[ur, "f_{j,k}"'] & \end{tikzcd}$$

On travaillera ici avec la catégorie des corps, et les morphismes seront des injections canoniques.

Définition 4.8 *Si l'on dispose d'un système inductif, on appelle limite inductive de ce système la donnée d'un objet E_∞ de la catégorie C et de morphismes $\Phi_i : E_i \to E_\infty$ compatibles avec les $f_{i,j}$, i.e. vérifiant :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \leq j \Rightarrow \Phi_i = \Phi_j \circ f_{i,j}.$$

On demande également que cette propriété soit universelle : si E'_∞ est un autre objet de C vérifiant les mêmes propriétés, il existe un unique morphisme $u : E_\infty \to E'_\infty$ compatible avec les autres flèches.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[dd, "f_{i,j}"'] \arrow[dr, "\Phi_i"'] \arrow[drr, "\Phi'_i"] & & \\
& E_\infty \arrow[r, "u"] & E'_\infty \\
E_j \arrow[ur, "\Phi_j"] \arrow[urr, "\Phi'_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.9 *La limite inductive d'un système inductif de corps existe et elle est unique à isomorphisme unique près.*

Démonstration. Soit $(K_i)_{i \in I}$ un système inductif de corps. On commence par construire la limite inductive des ensembles sous-jacents. Pour cela, on considère l'union disjointe de ces ensembles :

$$K_{\text{dis}} = \bigsqcup_{i \in I} K_i = \{(i,x) \mid i \in I, x \in K_i\}$$

On considère la relation d'équivalence suivante sur l'union disjointe :

$$(i,x) \sim (j,y) \quad \iff \quad \exists k \in I,\ i \leq k,\ j \leq k,\ f_{i,k}(x) = f_{j,k}(y)$$

Cette relation est bien définie car l'ordre de I est filtrant, et que la famille est un système inductif. La limite inductive est le quotient de K_{dis} par cette relation. Les morphismes Φ_i sont naturels : à $x \in K_i$ on associe la classe d'équivalence de (i,x).

$$K_\infty = \varinjlim K_i = {}^{K_{\text{dis}}}\!/_{\sim}$$

Munissons à présent l'ensemble K_∞ de la structure de corps induite par les $(K_i, +, \times)$. Il est aisé de vérifier que toutes les propriétés sont vérifiées, et que les Φ_i sont des morphismes de corps.

Le corps construit vérifie la propriété universelle de la limite inductive ; il est donc unique à unique isomorphisme près. $\square$

4.3 Construction de K_∞

Théorème 4.10 *Soit n un entier naturel non nul. Il existe un corps de u-invariant $2n$.*

Résumé de la démonstration. Pour construire un corps de u-invariant $2n$, il nous faut rendre isotropes toutes les formes quadratiques de dimension $2n+1$, en s'assurant qu'une certaine forme de dimension $2n$ demeurera, elle, anisotrope. On peut rendre une forme isotrope en étendant les scalaires à son corps de fonctions. Le théorème de Merkurjev nous assurera que l'algèbre A reste à division sur le nouveau corps, et par conséquent la forme quadratique q_A, de dimension $2n$, dont on a prouvé l'existence, demeurera anisotrope.

Il faut faire cela pour toutes les formes quadratiques de dimension $2n+1$ sur F : on passe une première fois à la limite inductive (selon le cardinal I de l'ensemble de ces formes) pour obtenir un corps F^+. Mais cette extension des scalaires a fait apparaître de nouvelles formes qui, elles, n'ont pas été prises en compte : on passe donc une nouvelle fois à la limite inductive (selon ω), et l'on vérifie que le corps obtenu convient.

Démonstration. Pour tout corps ℓ, étant donnée une forme quadratique non dégénérée ψ, on sait construire le corps des fonctions $\ell(\psi)$, qui est une extension de ℓ sur laquelle ψ est isotrope. On peut de cette manière construire une extension de ℓ dans laquelle toutes les formes voulues (à coefficients dans ℓ) deviennent isotropes.

Première étape. À tout corps ℓ on associe $\mathfrak{A}_\ell$ l'ensemble des classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées de dimension $2n+1$ sur ℓ. On indexe ces formes, à équivalence près, par le cardinal I de cet ensemble.

$$\mathfrak{A}_\ell = (\psi_i)_{i\in I}$$

I est muni d'un bon ordre, donc en particulier d'un ordre filtrant. On pose :

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \ell \\ \forall i\in I \quad \ell_{i+1} &= \ell_i(\psi_i) \\ \text{Si } i\in I \text{ est limite,} \quad \ell_i &= \varinjlim(\ell_j)_{j<i} \\ \mathrm{Is}(\ell) &= \varinjlim(\ell_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

Par propriété de la limite inductive, $\mathrm{Is}(\ell)$ est un corps. Toutes les flèches étant des inclusions, c'est une extension de ℓ. Si ϕ est une forme quadratique anisotrope de dimension $2n+1$ sur ℓ, elle est équivalente à une certaine forme ψ_i ; elle est isotrope dans ℓ_{i+1}, et donc dans $\mathrm{Is}(\ell)$. À tout corps ℓ, on est donc en mesure d'associer une extension telle que les formes quadratiques de dimension $2n+1$ à coefficients dans ℓ sont isotropes sur $\mathrm{Is}(\ell)$.

Nous n'en sommes pas quittes pour autant : de nouvelles formes anisotropes de dimension $2n+1$ sont apparues dans $\mathrm{Is}(\ell)$, qu'il s'agit de rendre isotropes à leur tour.

Seconde étape. On part cette fois-ci de notre corps k, et l'on pose :

$$\begin{aligned} K_0 &= k \\ \forall i\in\omega \quad K_{i+1} &= \mathrm{Is}(K_i) \\ K_\infty &= \varinjlim(K_i)_{i\in\omega} \end{aligned}$$

Encore une fois, K_∞ est un corps, et c'est une extension de k.

$$k = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_\infty = \bigcup_{i\in\omega} K_i$$

Soit ψ une forme quadratique de dimension $2n+1$ sur K_∞. Elle n'a qu'un nombre fini de coefficients, et chaque coefficient est dans $K_\infty = \bigcup_{i\in\omega} K_i$. Il existe donc un entier n tel que ψ soit à coefficients dans K_n ; elle est isotrope dans K_{n+1}, et donc dans K_∞.

Il reste à établir l'existence d'une forme quadratique de dimension $2n$ anisotrope sur K_∞. Soit A l'algèbre construite en 3.3. C'est une algèbre centrale, à division, et de dimension finie sur k. La forme q_A construite en 3.1 est anisotrope sur K_∞ à condition que l'algèbre $A\otimes_k K_\infty$ soit à division, ce qui demande une vérification étape par étape qui retrace le plan de la construction.

Usage chirurgical du théorème de Merkurjev. Si ℓ est un corps tel que $D = A\otimes_k \ell$ est à division, et si ψ est une forme quadratique non dégénérée de dimension $2n+1 \geq 3$ sur ce corps, le théorème de Merkurjev nous donne l'équivalence suivante : *$D\otimes_k \ell(\psi)$ n'est pas à division si et seulement si D contient une image homomorphe de l'algèbre $C_0(\psi)$.* Or cette seconde éventualité n'est pas envisageable : ψ étant de dimension impaire, $C_0(\psi)$ est simple en vertu du théorème 1.1. S'il existait un morphisme d'algèbres non trivial $u : C_0(\psi) \to D$, ce serait une injection.

$$\begin{aligned}
\dim_k C_0(\psi) &= \tfrac{1}{2}2^{\dim\psi} = 2^{2n}\\
\dim_k D &= \dim_k Q_1 \otimes_k \ldots \otimes_k Q_{n-1} = 4^{n-1} = 2^{2n-2}\\
\\
\dim_k C_0(\psi) &> \dim_k D
\end{aligned}$$

Pour une simple question de dimension en tant que k-espaces vectoriels, il est impossible que D contienne $C_0(\psi)$. L'algèbre demeurera à division à chaque extension de scalaires.

Première étape. Si l'on part d'une extension ℓ de k telle que $A\otimes_k \ell$ est à division, on pose :

$$\begin{aligned}
A_0 &= A\otimes_k \ell\\
\forall i\in I \quad A_{i+1} &= A\otimes_k \ell_{i+1} = A_i \otimes_k \ell(\psi_i)\\
\text{Si } i\in I \text{ est limite,}\quad A_i &= \varinjlim (A_j)_{j<i}\\
\mathrm{Is}(A) &= A\otimes_k \mathrm{Is}(\ell) = \varinjlim (A_i)_{i\in I}
\end{aligned}$$

Le théorème de Merkurjev nous permet de dire que si A_i est à division, A_{i+1} l'est aussi. Comme une limite inductive d'algèbres à division est à division, le fait d'être à division est préservé par notre construction.

Seconde étape. On applique simplement le résultat précédent à notre tour d'extensions.

$$\begin{aligned}
D_0 &= A\\
\forall i\in\omega \quad D_{i+1} &= A\otimes_k K_{i+1} = \mathrm{Is}(A\otimes_k K_i) = \mathrm{Is}(D_i)\\
D_\infty &= A\otimes_k K_\infty = \varinjlim (A\otimes_k K_i)_{i\in\omega}
\end{aligned}$$

L'algèbre D_0 est à division selon la proposition 3.3. Le fait d'être à division passe encore une fois à la limite inductive. Issue de cette construction, $A\otimes K_\infty$ est une algèbre à division, et q_A est une forme quadratique de dimension $2n$ anisotrope sur K_∞.

On a établi que $u(K_\infty) = 2n$. □

Notre mémoire s'achève sur ce résultat qui en est l'aboutissement. Le corps obtenu restera pour toujours dans les sphères de la théorétique : il ne serait pas raisonnable d'en étudier plus avant la structure. Comme nous l'avons dit, on ne connaît à ce jour aucune forme générale du u-invariant d'un corps ; mais tous ceux dont la structure nous est « accessible » ont pour u-invariant une puissance de 2, ce qui explique en partie la longévité de la conjecture émise par Kaplansky.

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur Wittenberg qui nous a guidés et conseillés tout au long de ce travail.

Références

[1] Borevich, Z.I. et Shafarevich, I.R. - *Number Theory.*

[2] Kaplansky, I. - *Quadratic forms* J. Math. Soc. Japan 5(1953), 200-207

[3] Lam, T.-Y. - *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, GSM 67, 2004.

[4] Merkurjev, A., Karpenko, N. et Elman, R. - *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms*, AMS 56, 2008.

[5] Scharlau, W. - *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol 270, 1985.

[6] Tignol, J.-P. - *Réduction de l'indice d'une algèbre simple centrale sur le corps des fonctions d'une quadrique*, 1990.