Correspondance twistorielle et application au problème de Zoll

DUFOUR Quentin

2 décembre 2010

sous la direction d'Olivier Biquard

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Résultats préliminaires sur les familles de géodésiques de Zoll **2**

3 Traduction twistorielle de la notion de famille de géodésiques $[\nabla]$ de Zoll sur S^2 **3**

3.1 Construction de notre variété complexe $\mathcal{N}$ 3

3.2 Espace totalement réel et disques holomorphes de $\mathbb{CP}_2$ associés à une famille de géodésique $[\nabla]$ de Zoll sur S^2 5

4 Réciprocité et découverte de nouvelles familles de géodésiques de Zoll sur S^2 au voisinage de la famille standard **7**

5 Question similaire pour l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ **9**

1 Introduction

L'objectif de ce magistère est d'éclaircir la notion dû à Penrose [Pen76] de correspondance twistorielle entre des structures géométriques sur des variétés différentielles et des objets holomorphes sur des variétés complexes. L'idée est que l'espace des modules d'une famille de courbes complexes compactes Σ dans une variété complexe $\mathcal{N}$ tend à traduire des propriétés géométriques sur des espaces différentiels. En 2002, Claude LeBrun et L.J. Mason ont découvert dans [LM02] qu'un tel phénomène peut aussi arriver lorsque nous regardons l'espace des modules des courbes complexes à bords dans une variété complexe $\mathcal{N}$ dont les bords reposent sur une variété totalement réelle maximale de $\mathcal{N}$. Avec cette méthode ils se sont attaqués au problème des métriques de Zoll sur des surfaces compactes, c'est-à-dire aux métriques dont les géodésiques sont des courbes fermées simples de même longueur. Cette terminologie est en l'honneur de Otto Zoll qui découvrit au début du vingtième siècle toute une famille de telles métriques sur la sphère S^2 distinctes de la métrique standard :

$$g = \frac{(1+f(z))^2}{1-z^2}\mathrm{d}z^2 + (1-z^2)\mathrm{d}\theta^2, \tag{1.1}$$

où $(z,\theta) \in [-1,1]\times[0,2\pi]$ sont des coordonnées cylindriques de S^2 et f est une fonction impaire

$$f : [-1,1] \longrightarrow (-1,1), \quad f(-z) = -f(z), \quad f(1) = f(-1) = 0.$$

Plus tard, il fut énoncé par Funk puis démontré des années après par Guillemin, grâce à l'utilisation du théorème des fonctions implicites de Nash-Moser, que l'espace tangent, au point standard, à l'espace des modules des métriques de Zoll sur S^2, modulo des isométries et la multiplication par des scalaires, est isomorphe à l'espace des fonctions impaires $f : \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}$. Ainsi il existe une infinité de métriques de Zoll sur S^2 modulo des isométries et la multiplication par des scalaires. L'unique autre surface compacte admettant une métrique de Zoll, $\mathbb{RP}_2$, possède un comportement tout à fait différent puisque la conjecture de Blashke, démontrée par Leon Green nous assure que la métrique standard, modulo des isométries et la multiplication par des scalaires, est l'unique métrique de Zoll sur $\mathbb{RP}_2$. Grâce à la méthode twistorielle, LeBrun et Mason retrouvent ces résultats rapidement et élégamment et généralisent ces résultats aux connexions de Zoll, c'est-à-dire aux connexions dont les géodésiques sont des cercles plongés dans la variété en question. Observons à présent la construction twistorielle et l'utilisation de cette correspondance pour ce problème des connexions de Zoll sur la sphère S^2.

2 Résultats préliminaires sur les familles de géodésiques de Zoll

Nous allons donner dans cette partie les résultats essentiels pour s'imprégner du sujet mais nous passerons rapidement dessus car les démonstrations de ces résultats n'utilisent en rien la théorie twistorielle.

LeBrun et Mason considèrent de manière plus générale dans [LM02] des classes d'équivalence projective $[\nabla]$ de connexions sur une surface compacte M, ce qui revient à se donner la famille de géodésiques d'une des connexions ∇ de la classe (ou si nous voulons d'une métrique g) où les géodésiques sont vues comme des courbes non paramétrées : nous regardons simplement l'image des géodésiques sur M. Dans cette généralisation, être de Zoll revient à l'hypothèse où toutes les géodésiques de notre famille sont des cercles plongés dans M. Avec cette famille donnée nous avons alors naturellement un feuilletage de l'espace tangent projectivisé $\mathbb{P}\mathrm{T}M = (\mathrm{T}M - 0_M)/\mathbb{R}^*$ par les relevés des géodésiques. Ce feuilletage nous donne la fibration suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}\mathrm{T}M \arrow[dr, "\nu"] & \\ & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

où N est l'espace des géodésiques non orientées. Il s'avère que pour M une surface de Zoll, cet espace des géodésiques est en fait une variété différentielle, c'est même $\mathbb{RP}_2$. Nous avons alors la double fibration suivante :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}\mathrm{T}M \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ M & & \mathrm{N} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

où μ correspond à la projection du plan tangent projectivisé $\mathbb{P}\mathrm{T}M$ sur M. Notons que les plans tangents aux fibres de μ et de ν sont en tous points linéairement indépendants, c'est-à-dire $(\ker \mu_*) \cap (\ker \nu_*) = 0$. Il est bon aussi d'observer que la restriction de ν à une fibre de μ donne un plongement $\mathbb{RP}_1 \hookrightarrow \mathrm{N}$. Enonçons à présent les résultats préliminaires :

Théorème 1 (1) *Une surface compacte M admet une famille de géodésiques de Zoll si et seulement si M est difféomorphe à S^2 ou à $\mathbb{RP}_2$.*

(2) *Soit $(M, [\nabla])$ une surface compacte munie d'une famille de géodésiques de Zoll, alors l'espace N des géodésiques non orientées (vues comme des courbes non paramétrées) est difféomorphe à $\mathbb{RP}_2$.*

3 Traduction twistorielle de la notion de famille de géodésiques $[\nabla]$ de Zoll sur S^2

3.1 Construction de notre variété complexe $\mathcal{N}$

L'idée à présent repose sur la double fibration suivante :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}\mathrm{T}\mathrm{S}^2 \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ (\mathrm{S}^2, [\nabla]) & & (\mathrm{N}, \{l_x\}_{x\in \mathrm{S}^2}) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

où $\mu : \mathbb{P}\mathrm{T}\mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2$ est la projection standard. Dans ce diagramme j'ai ajouté $[\nabla]$ et $\{l_x\}_{x\in \mathrm{S}^2}$ car c'est la correspondance qui nous intéresse : étant donnée $[\nabla]$ c'est-à-dire une famille de géodésiques sur S^2, N est naturellement muni d'une famille de courbes $l_x = \nu(\mu^{-1}(x))$ qui représente l'ensemble des géodésiques qui passent par le point $x \in \mathrm{S}^2$ et réciproquement, lorsque nous nous donnons l'espace N muni d'une telle famille de courbes nous pouvons redéfinir S^2 comme étant l'espace des modules de notre famille et les géodésiques sur S^2 comme étant les courbes $C_y = \{l_x : y \in l_x\}$, pour tout $y \in \mathrm{N}$. Le problème à présent est que pour S^2 de Zoll, à un point $x \in \mathrm{S}^2$ correspond un unique autre point $x' \in \mathrm{S}^2 - \{x\}$ tel que x et x' définissent les mêmes géodésiques, c'est-à-dire tel que $l_x = l_{x'}$. Ainsi lorsque nous perturbons l'espace N avec sa famille $\{l_x\}_{x\in \mathrm{S}^2}$ il est très difficile de distinguer ce que sont devenus les l_x et $l_{x'}$ indépendamment. C'est pour cela que LeBrun et Mason construisent une variété complexe $\mathcal{N}$ contenant N telle qu'une courbe l_x borne un disque holomorphe $D_x \subset \mathcal{N}$. Nous construisons ces disques pour que ceux-ci soient deux à deux distincts, ainsi nous pouvons déformer ces disques et garder une trace distincte des l_x indépendamment.

Pour comprendre cette construction, il faut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit* $[\nabla]$ *une famille de géodésiques de Zoll sur* S^2*. Alors il existe un difféomorphisme de* $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ *dans* $\mathbb{S}\mathrm{TN}$ *tel que l'application* $\nu : \mathbb{P}\mathrm{TS}^2 \to \mathrm{N}$ *devienne la projection* $\mathbb{S}\mathrm{TN} \to \mathrm{N}$ *avec*

$$\mathbb{S}\mathrm{TN} = (\mathrm{TN} - 0_{\mathrm{N}})\,/\mathbb{R}^+.$$

De plus, le fibré en droite $\ker \mu_*$ *au dessus de* $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ *est trivial.*

Nous cherchons à construire une variété complexe contenant l'information donnée sur la sphère S^2, c'est-à-dire la famille de géodésiques de Zoll. Pour cela on regarde l'espace

$$\mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2 = \left(\mathbb{C}\otimes \mathrm{TS}^2 - 0_{\mathrm{S}^2}\right)/\mathbb{C}^*.$$

Nous avons naturellement l'inclusion

$$\mathbb{P}\mathrm{TS}^2 = \left(\mathrm{TS}^2 - 0_{\mathrm{S}^2}\right)/\mathbb{R}^* \subset \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2.$$

Posons maintenant :

$$\mathcal{U} = \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2 - \mathbb{P}\mathrm{TS}^2.$$

Remarquons que $\mathcal{U}$ s'identifie à l'espace des structures presque complexes sur S^2 car un vecteur complexe $Y \in \mathcal{U}_y$ définit une unique application linéaire J_y sur $\mathrm{T}_y\mathrm{S}^2$ telle que $\mathrm{J}_y^2 = -1$ et Y soit l'espace propre de $-i$. Nous pouvons donc réécrire $\mathcal{U}$ comme l'union de $\mathcal{U}_+$ et de $\mathcal{U}_-$ avec $\mathcal{U}_+$ (respectivement $\mathcal{U}_-$) l'ensemble des structures presque complexes qui sont compatibles (respectivement incompatibles) avec l'orientation de S^2. Posons à présent :

$$\mathcal{Z}_+ = \mathcal{U}_+ \cup \mathbb{P}\mathrm{TS}^2.$$

Cet espace contient donc bien l'information demandée qui est le feuilletage de $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ par les relevés des géodésiques mais n'est en rien spécifique de notre famille de géodésique. Pour spécifier cette propriété nous allons définir un espace $\mathcal{N}$ comme étant l'espace à bord $\mathcal{Z}_+$ que nous contractons au niveau de son bord $\partial\mathcal{Z}_+ = \mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ via l'application $\nu : \mathbb{P}\mathrm{TS}^2 \to \mathrm{N}$ précédemment identifiée avec la projection $\mathbb{S}\mathrm{TN} \to \mathrm{N}$. Cette contraction est possible grâce à la proposition précédente. En effet par le théorème du voisinage tubulaire on reconnaît un voisinage de $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ dans $\mathcal{Z}_+$ comme étant le demi fibré normal $\mathrm{J}^{\|}(\ker \mu_*)$ de $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ dans $\mathcal{Z}_+$ où $\mathrm{J}^{\|}$ est la structure complexe canonique sur chaque fibre de $\mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2$ (demi fibré car nous ne gardons que le $[0,\infty)$ fibré correspondant aux vecteurs du fibré normal qui possèdent une orientation compatible avec celle de $\mathcal{U}_+$). Or ce fibré par la proposition précédente est l'espace totale du demi fibré trivial $\mathrm{L}^+ \to \mathbb{S}\mathrm{TN}$. Par ailleurs, d'après la description du fibré $\mathrm{L} \subset \hat{\pi}^*\mathrm{TN}$, où $\hat{\pi}$ est la projection de $\mathbb{S}\mathrm{TN}$ sur N, nous avons une 'contraction' naturelle $\psi : \mathrm{L}^+ \to \mathrm{TN}$. En effet pour tout vecteur non nul $v \in \mathrm{T}_y\mathrm{N}$ la fibre $[v] \in \mathbb{S}\mathrm{TN}$ de L^+ est $\mathrm{L}^+_{[v]} = \mathbb{R}^+ v \subset \mathrm{T}_y\mathrm{N}$ ainsi notre contraction ψ est une application qui est un difféomorphisme en dehors de la section nulle $\mathbb{S}\mathrm{TN}$ de L^+ et qui contracte cette section nulle sur la section nulle N de TN via la projection $\hat{\pi}$. En recollant $\mathcal{U}_+$ avec l'espace total TN via cette application ψ nous construisons ainsi la variété $\mathcal{N}$ et obtenons une contraction surjective lisse

$$\Psi : \mathcal{Z}_+ \longrightarrow \mathcal{N}.$$

Notons que nous avons l'inclusion $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathcal{N}$.

Il faut ensuite donner une structure complexe à notre variété $\mathcal{N}$. Pour cela nous allons invoquer un théorème analogue au théorème de Newlander-Nirenberg assurant une structure complexe sur $\mathcal{N}$ lorsque nous avons une structure presque complexe, avec une certaine régularité, telle que l'espace tangent $(0,1)$ soit intégrable. Nous cherchons donc une distribution involutive de dimension 2 sur $\mathcal{N}$ qui sera notre espace tangent (0.1). Nous définissons d'abord une distribution D sur $\mathcal{Z}_+$. Pour cela munissons nous d'une connexion $\nabla \in [\nabla]$ afin de pouvoir parler de l'espace horizontal de $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathcal{Z} = \mathrm{T}\mathcal{Z} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par rapport à la connexion ∇. Nous avons donc la décomposition suivante :

$$\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathcal{Z} = \mathrm{V}_{\mathbb{C}} \oplus \mathrm{H}_{\mathbb{C}},$$

avec $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ l'espace vertical et $\mathrm{H}_{\mathbb{C}} \cong \hat{\mu}^*\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2$ l'espace horizontal ($\hat{\mu}$ étant la projection de $\mathcal{Z}$ sur S^2). Etant donné que chaque fibre de $\mathcal{Z}$ est un $\mathbb{CP}_1$ qui est une variété complexe, $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ vient naturellement équipé d'une structure presque complexe $\mathrm{J}^{\|} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$. Ainsi nous définissons $\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ par :

$$\mathrm{L}_1 = \mathrm{V}^{0,1}_{\mathrm{J}^{\|}}.$$

Remarquons maintenant que l'isomorphisme $\hat{\mu}_* : \mathrm{H}_{\mathbb{C}} \overset{\cong}{\to} \hat{\mu}^*\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2$ induit un fibré en droite tautologique $\mathrm{L}_2 \subset \mathrm{H}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathrm{L}_2|_{[w]} = (\hat{\mu}_{*[w]})^{-1}(\mathbb{C}w).$$

Posons enfin :

$$\mathrm{D} = \mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2 \subset \mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathcal{Z}_+. \tag{3.2}$$

Cependant la distribution D ne définit pas une structure complexe sur $\mathcal{Z}_+$ étant donné que sur $\partial\mathcal{Z}_+ = \mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ il y a des vecteurs tangents réels qui sont dans D. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

$$\dim(\mathrm{D}_z \cap \overline{\mathrm{D}}_z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \in \mathcal{Z}_+ - \partial\mathcal{Z}_+, \\ 1 \text{ si } z \in \partial\mathcal{Z}_+ \end{cases} \tag{3.3}$$

car $\mathrm{L}_2|_{\mathbb{P}\mathrm{TS}^2}$ est simplement la complexification $\mathbb{C} \otimes \ker(\nu_*)$ de l'espace tangent au feuilletage de $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ par les relevés des géodésiques. Mais lorsque nous appliquons la contraction Ψ à D nous obtenons une distribution sans vecteurs tangents réels comme précédemment car la distribution L_2 au dessus de $\mathbb{P}\mathrm{TS}^2$ est la partie contractée. Cette distribution $\Psi(\mathrm{D})$ va modulo un théorème dû à Hill et Taylor [HT03], plus puissant que le théorème de Newlander-Nirenberg, nous fournir une structure complexe sur $\mathcal{N}$.

3.2 Espace totalement réel et disques holomorphes de $\mathbb{CP}_2$ associés à une famille de géodésique $[\nabla]$ de Zoll sur S^2

Observons à présent comment est traduite la notion de famille de géodésiques de Zoll sur S^2 dans notre variété complexe $\mathcal{N}$. Pour cela il s'agit dans un premier temps de reconnaitre le couple $(\mathrm{N}, \mathcal{N})$ dans le cas où la sphère S^2 est munie de la famille de géodésiques standard.

Proposition 3 *Dans le cas standard, le couple* $(\mathrm{N}, \mathcal{N})$ *est le couple* $(\mathbb{RP}_2, \mathbb{CP}_2)$ *standard. De plus les disques holomorphes* $D_x = \Psi(\mathcal{Z}_{+x})$ *sont les demi hémisphères des* $\mathbb{CP}_1$ *contenant un* $\mathbb{RP}_1$ *coupés par les* $\mathbb{RP}_1$ *correspondant.*

Je vais donner ici l'idée d'une démonstration de cette proposition mais qui est surtout l'idée de la démonstration de la rigidité de la notion de famille de géodésiques de Zoll sur $\mathbb{RP}_2$, c'est-à-dire qu'il existe une unique famille de géodésiques de Zoll sur $\mathbb{RP}_2$. La rigidité des familles de géodésiques de Zoll sur $\mathbb{RP}_2$ provient du fait que lorsque nous construisons, de manière semblable au cas S^2, l'espace $\mathcal{N}$, nous ne considérons pas la contraction d'un espace $\mathcal{Z}_+$ comme dans le cas de S^2 mais la contraction de tout l'espace tangent complexe $\mathcal{Z} = \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathbb{RP}_2$. Ainsi par cette contraction nous observons que nous avons sur $\mathcal{N}$, comme dans le cas de S^2, une structure complexe mais avec en plus une involution réelle et des courbes complexes $\Sigma_x \cong \mathbb{CP}_1$ sur l'espace $\mathcal{N}$ qui sont les images, par la contraction, des fibres $\mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}x}\mathbb{RP}_2 \cong \mathbb{CP}_1$. Dans le cas des familles de géodésiques de Zoll sur S^2 l'histoire n'est pas la même car nous ne contractons que la moitié du fibré tangent $\mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^2$. Ainsi nous ne travaillons qu'avec une famille de disques holomorphes et non plus avec une famille de courbes complexes. Cependant dans le cas standard nous pouvons de manière naturelle reconnaitre l'involution et les courbes complexes nécessaires à montrer que $(\mathrm{N}, \mathcal{N})$ est $(\mathbb{RP}_2, \mathbb{CP}_2)$, lorsque nous avons bien compris la contraction effectuée pour construire $\mathcal{N}$: les disques opposés $D_x = \Psi(\mathcal{Z}_{+x})$ et $D_{-x} = \Psi(\mathcal{Z}_{+-x})$ se recollent par Ψ pour former les courbes complexes en questions et l'involution est naturellement (dans ce cas précis) donnée par l'involution standard sur S^2, $\sigma : x \mapsto -x$. Ainsi dans les deux cas précédents nous avons la proposition suivante :

Proposition 4 *Soit $[\nabla]$ la famille de géodésiques standard sur S^2. Notons $\mathrm{N} \cong \mathbb{RP}_2$ l'espace des géodésiques associé. Et soit, $\mathcal{N}$ la surface complexe compacte précédemment définie. Alors :*

(i) $\pi_1(\mathcal{N}) = 0$ *;*

(ii) il existe une involution antiholomorphe $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dont l'ensemble des points fixes est N *;*

(iii) pour tout $x \in \mathrm{S}^2/\{\pm 1\} \cong \mathbb{RP}_2$, il existe une courbe complexe σ-invariante $\Sigma_x \subset \mathcal{N}$, telle que :

$$l_x = \Sigma_x \cap \mathrm{N};$$

(iv) les Σ_x représentent tous le même élément de $\pi_2(\mathcal{N})$;

(v) si x et x' sont deux points distincts de $\mathrm{S}^2/\{\pm 1\} \cong \mathbb{RP}_2$, alors Σ_x et $\Sigma_{x'}$ sont transverses et se rencontrent en exactement un seul point.

Grâce à cette proposition qui décrit les propriétés des courbes holomorphes sur l'espace complexe $\mathcal{N}$ associés à une famille de géodésiques, nous pouvons appliquer un théorème de géométrie complexe pour démontrer la rigidité de nos familles de géodésiques de Zoll dans le cas $\mathbb{RP}_2$ et dans le cas standard dans S^2.

Théorème 5 *Soit $\mathcal{S}$ une surface complexe compacte simplement connexe équipée d'une classe d'homologie $a \in H_2(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$ telle que $a.a = 1$. Supposons que pour tout $p \in \mathcal{S}$ il existe une courbe complexe régulièrement plongée $\Sigma \subset \mathcal{S}$ de genre 0, passant par p, de classe d'homologie $[\Sigma] = a$. Alors $\mathcal{S}$ est biholomorphe à $\mathbb{CP}_2$ de telle manière que toutes ces courbes Σ deviennent des droites projectives.*

Enfin pour le cas général d'une famille de géodésiques de Zoll sur S^2, nous utilisons ici un théorème de géométrie complexe dû à Yau [Yau77] :

Théorème 6 (Yau) *Soit $\mathcal{S}$ une surface complexe simplement connexe et compacte avec $b_2(\mathcal{S}) = 1$, alors $\mathcal{S}$ est biholomorphe à $\mathbb{CP}_2$.*

L'idée de LeBrun et Mason est ensuite de reconnaître grâce à la construction de $\mathcal{N}$ que la classe de difféomorphisme de $(\mathrm{N}, \mathcal{N})$ est indépendante de la famille de géodésiques de Zoll choisie et est donc la classe de difféomorphisme du couple $(\mathbb{RP}_2, \mathbb{CP}_2)$ standard. Ainsi pour toute famille de géodésiques de Zoll, il existe un difféomorphisme $\phi : \mathbb{CP}_2 \to \mathcal{N}$ tel que $\phi(\mathbb{RP}_2) = \mathrm{N}$. Par ce fait nous pouvons alors appliquer le théorème 6 et obtenir le théorème de LeBrun-Mason suivant.

Définition 7 (1) *Une sous variété X de dimension n d'une variété complexe (Y, J) de dimension complexe n, est dite totalement réelle si $\mathrm{T}_pX \cap J(\mathrm{T}_pX) = 0$ pour tout point $p \in X$.*

(2) *Un plongement $j : \mathbb{RP}_2 \hookrightarrow \mathbb{CP}_2$ est dit faiblement sans noeud s'il existe un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{CP}_2 \to \mathbb{CP}_2$ tel que $j = \Phi \circ i$ avec $i : \mathbb{RP}_2 \hookrightarrow \mathbb{CP}_2$ le plongement standard $[x, y, z] \mapsto [x, y, z]$.*

Théorème 8 (LeBrun-Mason) *Soit $[\nabla]$ une famille de géodésiques lisse de Zoll sur S^2. Alors, modulo une transformation linéaire, la famille de géodésiques $[\nabla]$ détermine uniquement un plongement totalement réel et faiblement sans noeud de l'espace des géodésiques N dans $\mathbb{CP}_2$.*

De plus, l'image de chaque cercle $l_x = \{$géodésiques qui passent par $x\} \subset \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{S}^2$, borde un plongement holomorphe d'un disque $\mathrm{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}_2$. Et les intérieurs de ces disques forment un feuilletage de $\mathbb{CP}_2 - \mathrm{N}$.

4 Réciprocité et découverte de nouvelles familles de géodésiques de Zoll sur S^2 au voisinage de la famille standard

A la vue du résultat précédent, nous allons naturellement chercher à énoncer une réciproque. C'est-à-dire qu'étant donné un plongement totalement réel et faiblement sans noeud d'un $\mathbb{RP}_2$ dans $\mathbb{CP}_2$ munie d'une famille convenable de disques holomorphes de bords reposant sur le $\mathbb{RP}_2$ plongé, alors nous avons une famille de géodésiques lisse de Zoll sur S^2 qui correspond via le théorème 8 au plongement et à la famille de disques donnés. Il est cependant difficile de décrire cette famille de disques de manière générale pour à coup sûr obtenir une famille de géodésiques de Zoll associée. Heureusement LeBrun dans [LeB06] montre que si nous avons un plongement totalement réel d'un $\mathbb{RP}_2$ dans $\mathbb{CP}_2$ muni d'une famille de disques holomorphes de bords reposant sur le $\mathbb{RP}_2$ plongé, alors dans un voisinage de ce plongement tout plongement $\mathrm{N} \cong \mathbb{RP}_2$ possède une famille de disques holomorphes de bords reposant sur N. Nous allons donc partir du plongement que nous connaissons le mieux, c'est-à-dire le plongement standard muni de la famille de disques holomorphes provenant de la famille de géodésiques standard sur S^2, pour dans un premier temps trouver une famille de disques pour un plongement proche du plongement standard et montrer dans un deuxième temps que cette famille de disques provient effectivement d'une famille de géodésiques de Zoll sur S^2.

La construction des disques holomorphes au voisinage du $\mathbb{RP}_2$ standard se fait de manière consciencieuse en appliquant le théorème d'inversion locale et nous obtenons ainsi la proposition suivante :

Proposition 9 *Soit $\mathrm{N} \subset \mathbb{CP}_2$ l'image d'un plongement $\mathbb{RP}_2 \hookrightarrow \mathbb{CP}_2$ suffisamment proche au sens $\mathcal{C}^\infty$ du plongement standard. Alors N possède une unique famille de cercles orientés $l_x \subset \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{S}^2$, dont chaque cercle borde un disque holomorphe $D^2 \subset \mathbb{CP}_2$, et dont chaque cercle est $\mathcal{C}^\infty$ près de l'image d'une droite projective orientée $\mathbb{RP}_1 \hookrightarrow \mathbb{RP}_2$. De plus la famille de disques* *holomorphes peut être réalisée par une application lisse, holomorphe sur les fibres, du fibré en disques dans le fibré en droites complexes $\mathcal{O}(4)$ au dessus de $\mathrm{S}^2 = \mathbb{CP}_1$, dans $\mathbb{CP}_2$. Ces disques sont tous plongés et leurs intérieurs feuillettent $\mathbb{CP}_2 - \mathrm{N}$.*

Avec ce résultat en main il s'agit à présent de trouver de nouvelles familles de géodésiques de Zoll sur S^2 au voisinage de la famille standard. Pour cela nous avons besoin d'un lemme nous permettant de retrouver une famille de géodésiques $[\nabla]$ sur S^2 étant donné un certain nombre de conditions :

Lemme 10 *Soit* M *une variété lisse connexe de dimension* 2, *et soit* $\varpi : \mathcal{X} \to \mathrm{M}$ *un fibré en* $\mathbb{CP}_1$ *lisse. Soit* $\rho : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *une involution qui commute avec la projection* ϖ, *et dont l'ensemble des points fixes* $\mathcal{X}_\rho$ *est un fibré en cercle au dessus de* M *qui déconnecte* $\mathcal{X}$ *en deux fibrés en disques* $\mathcal{X}_\pm$ *de bord commun* $\mathcal{X}_\rho$. *Supposons à présent avoir une distribution* $\Xi \subset \mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathcal{X}$ *de dimension complexe* 2 *vérifiant :*

(i) $\rho^*\Xi = \overline{\Xi}$ *;*

(ii) la restriction de Ξ *à* $\mathcal{X}_+$ *est lisse (bords compris) et involutive ;*

(iii) $\Xi \cap \ker \varpi_*$ *est l'espace tangent* $(0,1)$ *des fibres* $\mathbb{CP}_1$ *de* ϖ *; et*

(iv) la restriction de Ξ *à une fibre de* $\mathcal{X}$ *a un* $c_1 = -3$ *en respectant l'orientation complexe.*

Alors il existe une unique famille de géodésiques lisse $[\nabla]$ *sur* M *telle que* Ξ *soit le tiré en arrière de la distribution* D *sur* $\mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M}$, *donnée par la recette (3.2), par un difféomorphisme* $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M}$ *uniquement déterminé qui fait commuter les diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varpi"'] & & \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M} \arrow[dl, "\hat{\mu}"] \\ & \mathrm{M} & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M} \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M} \end{tikzcd}$$

avec $c : \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M} \to \mathbb{P}\mathrm{T}_{\mathbb{C}}\mathrm{M}$ *la conjugaison complexe usuelle.*

Reste alors à appliquer ce lemme. Posons $\mathcal{X}_+$ le fibré en disque dans le fibré en droite complexe $\mathcal{O}(4)$ au dessus de $\mathrm{S}^2 = \mathbb{CP}_1$. Définissons alors l'espace $\mathcal{X}$ comme étant le double de $\mathcal{X}_+$ obtenu en recollant une copie de $\mathcal{X}_+$ et $\mathcal{X}_+$ le long de leur bord commun. Notons $\mathcal{X}_-$ la copie de $\mathcal{X}_+$ et $\rho : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ l'application lisse qui interchange $\mathcal{X}_+$ et $\mathcal{X}_-$. Nous avons vu dans la proposition précédente, qu'au voisinage du $\mathbb{RP}_2$ standard dans $\mathbb{CP}_2$ la famille de disques holomorphes associée à N se réalise par une application lisse $f : \mathcal{X}_+ \to \mathbb{CP}_2$, holomorphe sur les fibres, qui est un difféomorphisme de l'intérieur de $\mathcal{X}_+$ dans $\mathbb{CP}_2 - \mathrm{N}$. Ainsi nous allons poser $\Xi = \ker f_*^{1,0}$. Il est naturel de définir Ξ ainsi car la distribution D donnée par une famille de géodésiques de Zoll lisse est en fait l'espace $\mathrm{T}^{0,1}\mathbb{CP}_2$. Puis en observant que nous avons perturbé comme il faut $\mathbb{RP}_2$ dans $\mathbb{CP}_2$ nous montrons que nous pouvons appliquer le lemme au fibré $\mathcal{X} \to \mathrm{S}^2$ et à la distribution $\Xi = \ker f_*^{1,0}$ pour obtenir une nouvelle famille de géodésiques que nous reconnaitrons comme étant de Zoll. Ainsi nous avons le théorème de LeBrun et Mason suivant :

Théorème 11 (LeBrun-Mason) *Soit* N *un plongement de* $\mathbb{RP}_2$ *dans* $\mathbb{CP}_2$ *qui est* $\mathcal{C}^\infty$ *proche du plongement standard. Soit* $\{l_x : x \in \mathrm{S}^2\}$ *la famille de cercles qui bornent les disques holomorphes. Pour chaque* $y \in \mathrm{N}$ *nous posons*

$$C_y = \{x \in \mathrm{S}^2 : y \in l_x\}.$$

Alors il existe une unique famille de géodésiques de Zoll lisse sur S^2 *pour laquelle les courbes* C_y *sont des géodésiques.*

5 Question similaire pour l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$

Dans cette partie je souhaite parler brièvement de la question que je me pose pour ma thèse. Dans ma thèse, nous regardons le problème similaire des métriques de Zoll pour l'espace de Minkowski compactifié $M = SO(2,4)/S(O(2) \times O(4))$, l'espace de Minkowski étant l'espace-temps de la relativité restreinte $(\mathbb{R}^{1,3}, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_1^2 - \mathrm{d}x_2^2 - \mathrm{d}x_3^2)$. Ici, nous ne parlons plus de métrique mais de pseudo-métrique et en particulier de métrique lorentzienne :

Définition 12 (1) *Une métrique lorentzienne g sur une variété M^n est la donnée d'une famille $g = \{g_x\}$ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur les espaces tangents $\mathrm{T}_x M$ de signature constante $(1, n-1)$.*

(2) *Soit (M, g) une variété lorentzienne, les géodésiques nulles de (M, g) sont les géodésiques γ de M telles que $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$ en tout point de la géodésique γ (c'est-à-dire en un point de la géodésique γ car $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ est constant sur une géodésique).*

(3) *Une métrique lorentzienne de Zoll g sur une variété M^n est une métrique pour laquelle toutes les géodésiques nulles maximales sont des cercles plongés dans M.*

Notons qu'ici nous ne regardons plus l'ensemble des géodésiques mais seulement l'ensemble des géodésiques nulles (qui correspondent dans le modèle relativiste aux trajectoires de la lumière) qui vu comme des courbes non paramétrées, sont conformément invariantes. En effet, la métrique fg où f est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas, défini les mêmes géodésiques nulles que g. Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est alors dite de Zoll si toutes ses géodésiques nulles maximales sont des cercles plongés dans M. Comme précédemment nous avons aussi une double fibration

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{D} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ (\mathrm{M}, g) & & (\mathrm{N}, \{Q_x\}_{x \in \mathrm{M}}) \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

où $\mathrm{D} = \{v \in \mathbb{P}\mathrm{TM} : v \neq 0 \text{ et } g(v, v) = 0\}$ est l'ensemble des directions nulles dans $\mathbb{P}\mathrm{TM}$, N est l'espace des géodésiques nulles non orientées et $Q_x = \nu(\mu^{-1}(x))$ la quadrique représentant toutes les géodésiques nulles passant par le point $x \in \mathrm{M}$.

La question que je me pose est donc de savoir s'il existe d'autres métriques lorentziennes de Zoll sur M, autres que la métrique lorentzienne standard. Je compte évidemment rechercher une construction twistorielle pour répondre à cette question.

Références

[HT03] C.D. Hill and M.E. Taylor. Integrability of rough almost complex structures. *J. Diff. Anal.*, 13(1) :163–172, mars 2003.

[LeB06] C. LeBrun. Twistors, holomorphic disks, and riemann surfaces with boundary. In *Perspectives in Riemannian Geometry*, 2006.

[LM02] C. LeBrun and L.J. Mason. Zoll manifolds and complex surfaces. *J. Diff. Geom.*, 61 :453–535, 2002.

[Pen76] R. Penrose. Nonlinear gravitons and curved twistor theory. *General Relativity and Gravitation*, 7 :31–52, 1976.

[Yau77] S.T. Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Nat. Acad. USA*, 74 :1789–1799, 1977.