

Inégalités Isosystoliques

Oriane Blondel
&
Quentin Dufour

Juin 2008

Introduction

Sur une variété riemannienne (c'est-à-dire sur laquelle on peut définir des longueurs) compacte non simplement connexe, il apparaît une longueur particulière : la systole. Elle peut, au même titre que l'aire, être considérée comme un paramètre de la variété. Il s'avère que l'on peut établir des inégalités reliant aire et systole d'une certaine classe de variétés. Dans ce mémoire, nous retrouverons ces inégalités pour les tores, les plans projectifs, les bouteilles de Klein et les rubans de Möbius. Pour ce faire, nous mettrons en avant deux méthodes : l'une faisant appel aux isométries de la variété (pour le plan projectif), l'autre reposant sur l'exploitation des courbes systoliques (pour la bouteille de Klein). Mais nous commencerons par étudier l'exemple concret de la transformation de Mercator pour introduire les notions importantes de variété riemannienne et de représentation conforme. On énoncera également un théorème de représentation conforme indispensable à la résolution du problème.

Table des matières

1	Introduction au sujet	3
1.1	Un exemple d'introduction	3
1.1.1	Observation	3
1.1.2	Résolution	3
1.2	Quelques définitions	5
1.3	Définition de la problématique	5
2	Inégalité isosystolique pour le tore de dimension 2	5
2.1	Tores plats	6
2.1.1	Caractérisation des tores plats	6
2.1.2	Systole des tores plats	6
2.1.3	Inégalité isosystolique pour les tores plats	7
2.2	Inégalité isosystolique pour les tores de dimension 2	7
3	Inégalité isosystolique pour le plan projectif	8
3.1	Démarche pour établir une inégalité isosystolique	8
3.2	Inégalité isosystolique pour le plan projectif	10
3.2.1	Inégalité pour des métriques sphériques	10
3.2.2	Groupe de Lie d'isométries du plan projectif sphérique	10
3.2.3	Résultat	10
4	Inégalités isosystoliques pour la bouteille de Klein et le ruban de Möbius	11
4.1	Classification des bouteilles de Klein plates	11
4.2	Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein	13

1 Introduction au sujet

1.1 Un exemple d'introduction

Observons pour nous éclairer le problème suivant :

Mercator, au seizième siècle, afin de réaliser des cartes terrestres plus proches de la réalité, trouva la transformation de la sphère sur le plan qui conserve les angles en envoyant les latitudes sur les droites horizontales et les méridiens sur les droites verticales. Une application qui, comme celle-ci, conserve les angles est dite conforme. Nous allons donc retrouver ce résultat avec les outils mathématiques modernes.

1.1.1 Observation

Dans ce sujet, nous allons être amenés à calculer des longueurs et des angles sur des variétés. Nous avons donc besoin d'une notion de métrique définie sur une variété. On appelle alors variété riemannienne une variété sur laquelle on peut définir en chaque point une forme quadratique définie positive sur l'espace tangent, et donc une métrique, de telle manière que localement ces métriques "s'arrangent bien".

Pour résoudre le problème de Mercator, commençons par l'observation suivante. La notion d'angle est une notion locale qui se joue au niveau d'un point. En effet, l'angle formé par deux courbes qui se coupent au point x est l'angle formé par les vecteurs vitesses de ces courbes en ce point. Une application conforme $f : X \rightarrow Y$ est donc une application qui conserve "de manière infinitésimale" les angles, c'est-à-dire, pour tout couple de chemins dérivables $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, dont les dérivées ne s'annulent pas, l'angle orienté $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ est égal à l'angle orienté $(Tf_x(\gamma_1'(0)), Tf_x(\gamma_2'(0)))$. Notons de plus qu'un angle est défini au voisinage du point où les courbes se croisent et que par conséquent, il suffit de connaître la métrique en ce point pour parler d'angle. On voit donc ici surgir le caractère demandé pour une variété riemannienne qui est de posséder en chaque point une forme quadratique définie positive sur l'espace tangent en ce point, car cela nous permet alors de définir les angles sur cet espace.

1.1.2 Résolution

La première étape pour résoudre ce problème est donc de trouver en chaque point de la sphère et du plan la forme quadratique associée. Sur le plan cette forme quadratique est indépendante du point du plan et elle correspond bien à la distance usuelle : c'est la forme quadratique $q(x, y) = x^2 + y^2$. Pour la sphère, ce n'est pas la même histoire. Nous proposons de retrouver en un point M de la sphère la forme quadratique associée de la manière suivante.

Soit $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$ qui à $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ associe $M(u, v) \in \mathbb{R}^3$; c'est une paramétrisation de la variété X . On prend un chemin $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Alors $M \circ \gamma$ est une courbe tracée sur la variété X . Sa longueur est alors :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{\left\| \frac{dM(\gamma(t))}{dt} \right\|^2} dt \\ \text{mais } \frac{dM(\gamma(t))}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ \text{donc } \left\| \frac{dM(\gamma(t))}{dt} \right\|^2 &= \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \\ \text{Ainsi } L &= \int_0^1 \sqrt{A \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2B \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + C \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \\ \text{i.e. } L &= \int_0^1 \sqrt{q_\gamma(t)(\gamma'(t))} dt \end{aligned}$$

La forme quadratique dépendant du point de la variété qui apparaît sous le signe intégrale est en fait la forme quadratique associée pour les variétés riemanniennes. C'est donc par ce biais que l'on va trouver la forme quadratique associée à chaque point de la sphère. On choisit la paramétrisation de la sphère suivante :

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \quad \text{où } u \in (-\pi, \pi) \quad v \in (-\pi/2, \pi/2)$$

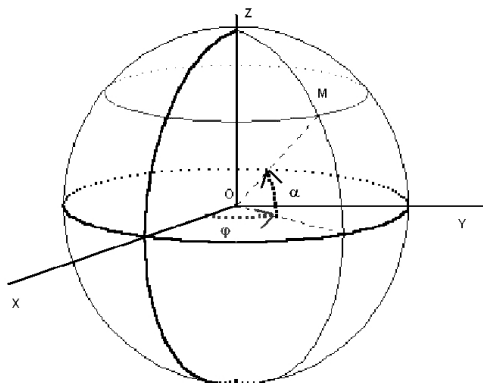


FIG. 1 – Paramétrisation de la sphère

Ensuite, on prend $\gamma : [0, 1] \rightarrow (-\pi/2; \pi/2) \times (-\pi, \pi) \quad C^1$. Alors,

$$L = \int_0^1 \sqrt{\cos^2(v(t)) \left(\frac{du}{dt}(t) \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}(t) \right)^2} dt$$

Donc la forme quadratique recherchée est :

$$M(q(u,v)) = \begin{pmatrix} \cos^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant rechercher la transformation de Mercator sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi : (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) &\rightarrow (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto (u, f(v)) \end{aligned}$$

où f est une fonction C^∞ . Ceci se justifie par le fait qu'une application conforme envoie les latitudes sur des droites horizontales et les méridiens sur les droites verticales de manière équidistante (car en tout point de croisement les latitudes et les méridiens sont orthogonaux, et sur l'équateur les distances sont conservées) ; on cherche donc la hauteur d'un méridien en fonction de l'angle v qui le caractérise. Sachant que $f(0) = 0$, il ne nous reste plus qu'à exprimer le caractère de conservation d'angles. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux courbes régulières tracées sur la sphère et vérifiant $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = P$. On veut que l'angle orienté $(\gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0))$ soit égal à l'angle orienté $(T\psi_P(\gamma'(0)), T\psi_P(\tilde{\gamma}'(0)))$. La conservation d'angles se voit par la conservation de l'orthogonalité, ce qui équivaut à (avec $P = (u_0, v_0)$) :

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle_{(u_0, v_0)} = 0 &\iff \langle T\psi_P(\gamma'(0)), T\psi_P(\tilde{\gamma}'(0)) \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \\ v'(0)\tilde{v}'(0) + \cos(v_0)^2 u'(0)\tilde{u}'(0) = 0 &\iff \langle (u'(0), v'(0)f'(v_0)), (\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0)f'(v_0)) \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \\ v'(0)\tilde{v}'(0) + \cos(v_0)^2 u'(0)\tilde{u}'(0) = 0 &\iff v'(0)\tilde{v}'(0)(f'(v_0))^2 + u'(0)\tilde{u}'(0) = 0 \end{aligned}$$

Et ce, quels que soient les chemins γ et $\tilde{\gamma}$ se coupant en P . Donc la conservation d'angle orienté revient à l'équation différentielle suivante : $f'(v_0) = \frac{1}{\cos(v_0)}$ (on a choisi le signe + lorsqu'on a pris la racine carrée pour exprimer l'orientation).

La solution recherchée est donc :

$$f(v) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right)\right).$$

1.2 Quelques définitions

Nous aurons besoin par la suite des définitions suivantes :

Définition 1 Soient M, \tilde{M} deux variétés riemanniennes de même dimension munies respectivement des métriques g et \tilde{g} . (M, g) est dite conforme à (\tilde{M}, \tilde{g}) s'il existe un difféomorphisme $F : M \rightarrow \tilde{M}$ et une fonction positive $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $F_*g = f\tilde{g}$.

Définition 2 (M, g) est une variété plate si au voisinage de chaque point, la forme quadratique associée à la métrique g s'écrit $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ dans des coordonnées adaptées.

On s'intéresse particulièrement aux métriques plates à cause du résultat suivant :

Théorème 1 Toute variété riemannienne compacte de dimension 2 et de caractéristique d'Euler nulle est conforme à une variété plate.

Théorème 2 Le plan projectif muni d'une métrique continue positive quelconque est conforme à un plan projectif muni d'une métrique sphérique.

Nous admettons ces théorèmes. Pour une démonstration du premier théorème, voir [Tro86].

Remarque : Soit un difféomorphisme $F : M \rightarrow \tilde{M}$, où (M, g) et (\tilde{M}, \tilde{g}) sont des variétés riemanniennes, tel que F_*g soit conforme à \tilde{g} . Si γ est une courbe tracée sur M , sa longueur est égale à celle de $F(\gamma)$ dans (\tilde{M}, F_*g) .

1.3 Définition de la problématique

Définition 3 La systole d'une variété riemannienne compacte M est la plus petite longueur d'une courbe non contractile. On note alors cette valeur $Sys M$.

La question que l'on se pose est de savoir si on peut contrôler la systole d'une variété par l'aire de celle-ci et ce, de manière indépendante de la variété. Un contrôle de manière absolue n'est pas envisageable : en effet, il est possible d'avoir une systole arbitrairement petite pour une variété d'aire constante et l'inverse se produit aussi pour certaines variétés. Cependant un contrôle au moins partiel est parfois possible. Par exemple, il est possible de majorer pour toute la famille des tores de dimension 2 la quantité $\frac{Sys^2(T)}{Aire(T)}$. Les questions naturelles sont alors les suivantes :

1. A-t-on une inégalité $\frac{Sys^n(M)}{Aire(M)} \leq \text{constante}$ pour une famille de variétés M de dimension n (ou au moins dans une même classe conforme) ?
2. Si une telle inégalité existe, quelle est alors la constante minimale ?
3. La constante minimale est-elle atteinte ? Si oui, pour quelle(s) variété(s) ?

Dans la suite, on se limitera en fait à l'étude systolique de variétés de dimension 2 : les tores, les plans projectifs, les bouteilles de Klein et les rubans de Möbius.

2 Inégalité isosystolique pour le tore de dimension 2

Nous allons dans cette partie démontrer l'inégalité isosystolique suivante :

$$\frac{Sys^2(T)}{Aire(T)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

pour tout tore T de dimension 2.

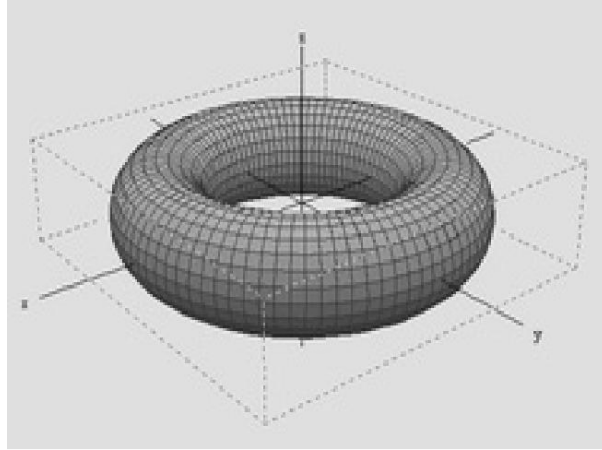


FIG. 2 – Tore de dimension 2

2.1 Tores plats

2.1.1 Caractérisation des tores plats

En dimension 2, un tore est un quotient de \mathbb{R}^2 par le groupe engendré par deux translations de vecteurs v_1 et v_2 non colinéaires. On parle de tore plat lorsque le tore est muni d'une métrique telle que la longueur d'une courbe sur le tore soit celle de sa pré-image (pour la projection canonique) dans un domaine fondamental du plan, par exemple le parallélogramme construit sur v_1 et v_2 .

Notons que, grâce au Théorème 1, classer les tores plats nous permet d'identifier les classes conformes des tores (car le tore est de caractéristique d'Euler nulle). Une classe conforme de tores est donc caractérisée par deux paramètres (l'angle θ et le rapport $\frac{\|v_1\|}{\|v_2\|}$).

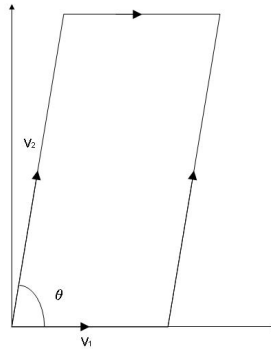


FIG. 3 – Tore plat

2.1.2 Systole des tores plats

On cherche la longueur minimale d'une courbe fermée sur le tore qui ne puisse être déformée en un point. Avec la métrique plate, il faut donc trouver une courbe du plan qui relie deux points identifiés mais différents et qui soit de longueur minimale. Il suffit de considérer le cas où cette courbe part d'un sommet du parallélogramme précédemment cité. Elle doit être une géodésique du plan, c'est-à-dire une portion de droite. Dès lors, il suffit de trouver la distance minimale entre deux points du réseau engendré par nos translations, et ce sera la systole. Cette longueur s'écrit $\|\alpha v_1 + \beta v_2\|$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Remarquons que nécessairement, α et β sont premiers entre eux. Sinon, il existe $d > 1$ divisant α et β , et $\|\alpha v_1 + \beta v_2\| = d \|\alpha' v_1 + \beta' v_2\| > \|\alpha v_1 + \beta v_2\|$ car $\|\alpha' v_1 + \beta' v_2\| \geq \|\alpha v_1 + \beta v_2\|$ par définition de la systole. Donc il existe λ et μ tels que $\lambda \alpha + \mu \beta = 1$. Posons alors $v'_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$ et $v'_2 = -\mu v_1 + \lambda v_2$.

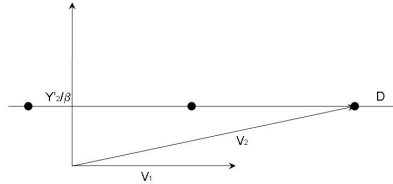
On a $v_1 = \lambda v'_1 - \beta v'_2$ et $v_2 = \mu v'_1 + \alpha v'_2$, donc le réseau engendré par v'_1 et v'_2 est le même que celui de départ. On peut donc se ramener au cas où la systole est la longueur d'un des vecteurs de base.

2.1.3 Inégalité isosystolique pour les tores plats

On remarque que lorsque v_1 et v_2 forment deux côtés d'un triangle équilatéral, le rapport $\frac{Sys^2(T)}{Aire(T)}$ est égal à $\frac{2}{\sqrt{3}}$. On veut donc montrer qu'à aire fixée, c'est-à-dire à $\det(v_1, v_2)$ constant, c'est le tore équilatéral qui admet la plus grande systole.

Prenons un tore tel que v_1 réalise la plus grande systole possible à $\det(v_1, v_2)$ fixé. Supposons d'abord que v_1 et $-v_1$ sont les seuls vecteurs qui réalisent la systole. Il y a un nombre fini de points contenus dans le cercle de rayon le diamètre du parallélogramme fondamental centré en l'origine. Leur norme dépend continûment des normes de v_1 et v_2 . Il est alors possible d'augmenter légèrement $\|v_1\|$ et de diminuer un peu $\|v_2\|$, de façon à conserver la même aire pour le parallélogramme fondamental et à ce que v_1 réalise toujours la systole. Ceci est contraire à l'hypothèse faite sur v_1 , donc il existe un autre vecteur du réseau $v'_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$ de même norme que v_1 .

Montrons que (v_1, v'_2) engendre le réseau, et en fait que $|\beta| = 1$. Supposons $\beta > 1$, et munissons le plan d'un repère orthonormé dont un des vecteurs de base est v_1 (prenons $Sys(T) = 1$). L'ordonnée de v'_2 , y'_2 est alors inférieure à 1 en valeur absolue et celle de v_2 est $\frac{y'_2}{\beta}$, au signe près (on la prend positive, comme β et on identifie \vec{v} à $0 + \vec{v}$). Soit D l'ensemble des points d'ordonnée $\frac{y'_2}{\beta}$.



On note que $\max_{y \in D} \inf_{\lambda \in \mathbb{Z}} d(y, \lambda v_1) = \sqrt{\frac{y'_2}{\beta^2} + \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, et a fortiori il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $d(\lambda v_1, v_2) < 1$, et donc un vecteur du réseau de norme strictement inférieure à la systole, ce qui est absurde. On peut donc prendre v_1 et v'_2 comme vecteurs de base.

Ils forment un angle supérieur ou égal à $\frac{\pi}{3}$, sinon $\min(\|v_1 + v'_2\|, \|v_1 - v'_2\|) < \|v_1\|$. Et s'ils formaient un angle $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$, l'aire du tore $Sys^2(T) \sin \theta$ serait strictement supérieure à celle du tore équilatéral correspondant à un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec la même systole, et on ne maximise pas le rapport $\frac{Sys^2(T)}{Aire(T)}$.

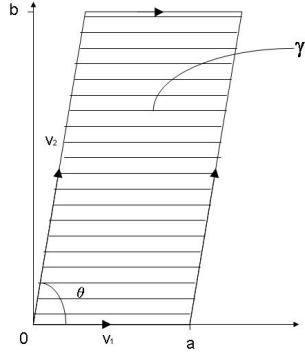
Pour les tores plats, on a donc l'inégalité (1), qui est une égalité uniquement pour un tore équilatéral.

2.2 Inégalité isosystolique pour les tores de dimension 2

On regarde maintenant un tore T de dimension 2 quelconque, c'est-à-dire muni d'une métrique g quelconque. Alors, d'après le Théorème 1, il va exister un tore \tilde{T} , un difféomorphisme $F : T \rightarrow \tilde{T}$, une fonction $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ régulière et une métrique plate \tilde{g} sur \tilde{T} tels que $F_*g = f^2 \cdot \tilde{g}$. (\tilde{T}, \tilde{g}) étant un tore plat, c'est le quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe G qui est engendré par deux translations τ_1 et τ_2 . Sans perte de généralité on peut supposer que $\tau_1 : (x, y) \mapsto (x + a, y)$ et $\tau_2 : (x, y) \mapsto (x + c, x + b)$ avec τ_1 étant une des plus petites translations du groupe G (en particulier, les droites horizontales réalisent la systole). En effet, on peut toujours, quitte à exercer une rotation, se ramener à ce cas-là.

L'idée est maintenant la suivante : on va intégrer de 0 à b les longueurs pour g des segments horizontaux réalisant la systole pour la métrique \tilde{g} , afin de faire apparaître une double intégrale (on se ramène donc à une aire). Ensuite, après une inégalité de Cauchy-Schwarz, on va reconnaître l'aire des tores (T, g) (i.e. celle de (\tilde{T}, F_*g)) et (\tilde{T}, \tilde{g}) .

Soient $(\gamma_t)_{t \in [0, b]}$ les courbes fermées réalisant la systole pour \tilde{g} comme présenté sur le schéma.



Ces courbes sont donc de la forme $\gamma_t(u) = (x_t(u), t)$. Le calcul final est alors le suivant :

$$\begin{aligned}
L_{(T,g)}(\gamma_t) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma_t(u)}(\gamma_t'(u))} du \\
&= \int_0^1 \sqrt{f^2(\gamma_t(u)) \cdot \tilde{g}_{\gamma_t(u)}(\gamma_t'(u))} du \\
&= \int_0^1 f(x_t(u), t) x_t'(u) du \\
&= \int_0^a f(x, t) dx
\end{aligned}$$

$$\text{Or } L_{(T,g)}(\gamma_t) \geq Sys(T, g)$$

$$\text{donc } \int_0^b L_{(T,g)}(\gamma_t) dt = \int_0^b \int_0^a f(x, y) dx dy \geq b Sys(T, g)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
Aire(T, g) &= \int_0^b \int_0^a \sqrt{\det(g(x, y))} dx dy \\
&= \int_0^b \int_0^a \sqrt{\det(f^2(x, y) \tilde{g}(x, y))} dx dy \\
&= \int_0^b \int_0^a \sqrt{f^4(x, y) \det(\tilde{g}(x, y))} dx dy \\
&= \int_0^b \int_0^a f^2(x, y) dx dy
\end{aligned}$$

Au final,

$$\begin{aligned}
b^2 Sys^2(T, g) &\leq \left| \int_0^b \int_0^a f(x, y) dx dy \right|^2 \leq ab \times \int_0^b \int_0^a f^2(x, y) dx dy \\
\text{i.e. } \frac{Sys^2(T, g)}{Aire(T, g)} &\leq \frac{a}{b} = \frac{Sys^2(\tilde{T}, \tilde{g})}{Aire(\tilde{T}, \tilde{g})} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On arrive donc bien à la relation (1) recherchée.

3 Inégalité isosystolique pour le plan projectif

3.1 Démarche pour établir une inégalité isosystolique

Trouver de telles inégalités pour des métriques riemanniennes quelconques n'est pas chose aisée. En effet, il n'est pas très évident de voir le comportement de l'aire et des longueurs de courbes sur une

métrique dont on ne sait rien. Heureusement grâce au Théorème 1 et à la transformation de Mercator, on peut se ramener à l'étude isosystolique pour des métriques plus visuelles (plate ou sphérique) et plus gentilles (elles vont posséder des régularités particulières). La méthode pour simplifier le problème est donc la suivante : étant donné une métrique positive quelconque sur une variété riemannienne de dimension 2, on la met sous la forme : $ds^2 = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$ (ou $ds^2 = f(u, v)(\cos^2(v)du^2 + dv^2)$) avec f continue positive. Maintenant, grâce à la géométrie de notre variété, nous allons pouvoir nous ramener à une métrique \tilde{g} possédant des régularités particulières. Enonçons dans un premier temps un lemme de Pu [Pu52]; nous verrons ensuite en quoi il nous permet de simplifier notre métrique.

Lemme 1 (Pu) *Soit T une variété de dimension deux, munie d'une métrique continue positive g_0 . On désigne par g une métrique positive et continue conforme à g_0 . Alors :*

1. la fonction $\sqrt{g} \mapsto Aire(g)$ est convexe
2. la fonction $\sqrt{g} \mapsto Sys(g)$ est concave

Corollaire 1 *Soit T une variété de dimension deux. Soient $(g_i)_{i=1..n}$ n métriques positives et continues sur T telles que*

$$Sys(g_1) = \dots = Sys(g_n)$$

Si on pose

$$g = (\alpha_1\sqrt{g_1} + \dots + \alpha_n\sqrt{g_n})^2$$

avec $\alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, alors

$$\frac{Sys^2(g)}{Aire(g)} \geq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{Sys^2(g_i)}{Aire(g_i)}$$

Ce lemme va nous permettre, comme nous l'avons annoncé précédemment, de simplifier notre métrique. En effet, nous disposons à ce stade d'une métrique g plate (ou sphérique) quelconque. Mais si Γ est un groupe de Lie compact d'isométries de notre variété T , alors on va définir la métrique h suivante :

$$[h(p)]^{1/2} = \int_{\Gamma} [g(\sigma(p))]^{1/2} d\sigma$$

On remarque que les métriques $g \circ \sigma$ ont toutes des aires et des systoles égales à celles de g . En approchant l'intégrale par des sommes, et en appliquant le corollaire du lemme de Pu, on obtient

$$\frac{Sys^2(h)}{Aire(h)} \geq \frac{Sys^2(g)}{Aire(g)}$$

On a bien simplifié notre problème de recherche de la constante isosystolique, car étant donné l'expression de h , elle va exprimer les symétries de Γ . Après avoir démontré ce lemme, nous appliquerons donc cette méthode à l'exemple du plan projectif.

Preuve du lemme 1

Soient $\lambda \in [0, 1]$ et g_1, g_2 deux métriques continues positives conformes à (T, g_0) . L'aire de (T, g) , où $g = (\lambda\sqrt{g_1} + (1 - \lambda)\sqrt{g_2})^2$ s'écrit :

$$Aire(g) = \iint g ds^2 = \iint (\lambda\sqrt{g_1} + (1 - \lambda)\sqrt{g_2})^2 ds^2$$

Comme $x \mapsto x^2$ est convexe on obtient alors le premier résultat du lemme :

$$\begin{aligned} Aire(g) &\leq \iint (\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2) ds^2 \\ &\leq \lambda Aire(g_1) + (1 - \lambda)Aire(g_2) \end{aligned}$$

Passons au second résultat. Soit C une courbe fermée non contractile de T . Alors,

$$\begin{aligned} \int_C g^{1/2} ds &= \int_C (\lambda\sqrt{g_1} + (1 - \lambda)\sqrt{g_2}) ds \\ &\geq \lambda Sys(g_1) + (1 - \lambda)Sys(g_2) \end{aligned}$$

et ce, quelle que soit la courbe fermée C non contractile. On obtient donc le résultat voulu. \square

3.2 Inégalité isosystolique pour le plan projectif

3.2.1 Inégalité pour des métriques sphériques

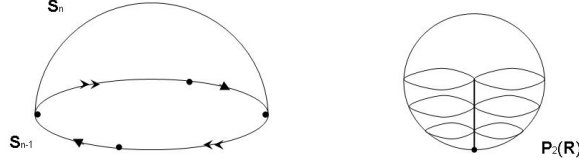


FIG. 4 – Plan projectif

Le plan projectif est le quotient de la sphère par le groupe $\{\pm 1\}$. Nous allons ici calculer l'aire et la systole du plan projectif P muni de la métrique sphérique $d\rho^2 = \cos(v)^2 du^2 + dv^2$ (où u et v caractérisent les méridiens et les longitudes). Pour cette métrique l'aire du plan projectif P est alors la moitié de l'aire de la sphère, c'est-à-dire 2π . Recherchons désormais la systole de P . Une courbe (continue) fermée et non contractile du plan projectif $\gamma : [0, 1] \mapsto P$ se relève en une courbe (continue) de la sphère $\tilde{\gamma} : [0, 1] \mapsto \mathbb{S}^2$ qui relie deux points antipodiques. Ce résultat vient du fait que $[0, 1]$ est simplement connexe et que \mathbb{S}^2 est un revêtement du plan projectif P . Or pour la métrique sphérique, la longueur la plus petite d'une courbe allant d'un point de la sphère à son point antipodique vaut π (car les géodésiques de la sphère sont les arcs de cercle). Finalement, pour la métrique sphérique $d\rho^2$:

$$\frac{Sys^2(P, d\rho^2)}{Aire(P, d\rho^2)} = \frac{\pi}{2}$$

3.2.2 Groupe de Lie d'isométries du plan projectif sphérique

Les isométries de la sphère munie de sa métrique usuelle sont les éléments de $O(3)$. On se souvient que le plan projectif est le quotient de la sphère par $\{id, \sigma\}$, où σ est une symétrie orthogonale. On remarque que les isométries de la sphère restent des isométries lorsqu'elles sont projetées dans le plan projectif muni de la métrique sphérique. Comme $O(3) = SO(3) \cup \sigma SO(3)$, on obtient les mêmes applications par passage au quotient des isométries de la sphère que par passage au quotient des seules rotations. On note Γ le groupe de Lie d'isométries du plan projectif obtenu.

3.2.3 Résultat

Nous allons maintenant appliquer la méthode énoncée précédemment. Soit P le plan projectif muni d'une métrique continue positive g . Par une transformation conforme (Théorème 2), nous nous ramenons à une métrique sur \tilde{P} de la forme $\tilde{g}(p) = f(p)d\rho^2$ où p est un point de \tilde{P} , f est continue positive et $d\rho^2$ est la métrique sphérique. Puis on définit une nouvelle métrique $hd\rho^2$ sur \tilde{P} par :

$$h(p) = \left(\int_{\Gamma} \sqrt{f(\sigma(p))} d\sigma \right)^2.$$

Comme les éléments de Γ sont des isométries de \tilde{P} , les métriques $(f \circ \sigma)d\rho^2$ avec $\sigma \in \Gamma$ ont toutes même aire et même systole. Ainsi, d'après le corollaire du lemme de Pu, on a :

$$\frac{Sys^2(hd\rho^2)}{Aire(hd\rho^2)} \geq \frac{Sys^2(\tilde{g})}{Aire(\tilde{g})}.$$

Nous allons maintenant montrer que la fonction h est constante. Soient $p \in \tilde{P}$ et $\tau \in \Gamma$. Alors :

$$\begin{aligned}
[h(\tau(p))]^{1/2} &= \int_{\Gamma} \sqrt{f(\tau \circ \sigma(p))} \delta \sigma \\
&= \int_{\Gamma} \sqrt{f(\tau \circ \sigma(p))} \delta(\tau \circ \sigma) \\
&= \int_{\Gamma} \sqrt{f(\lambda(p))} \delta \lambda \\
&= [h(p)]^{1/2}
\end{aligned}$$

et ce quel que soit $\tau \in \Gamma$. Par transitivité de Γ , on conclut que h est constante. En reprenant les résultats du 3.2.1, on trouve que $Aire(hd\rho^2) = 2\pi h$ et $Sys(hd\rho^2) = \pi\sqrt{h}$. Finalement on trouve :

$$\frac{Sys^2(P, g)}{Aire(P, g)} \leq \frac{Sys^2(\tilde{P}, hd\rho^2)}{Aire(\tilde{P}, hd\rho^2)} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

4 Inégalités isosystoliques pour la bouteille de Klein et le ruban de Möbius

Le problème systolique pour la bouteille de Klein peut se résoudre de la même manière (cf. [Bav86]), mais même si on utilise la même méthode, il reste encore du travail pour conclure. Ceci vient essentiellement du fait que, pour la bouteille de Klein, on se ramène à une métrique plate alors que l'inégalité isosystolique n'est pas réalisée par une métrique plate (en fait elle n'est pas réalisée par une métrique riemannienne lisse). Cette méthode, utilisée par Bavard en 1986, se sert du résultat de la thèse de Pu [Pu52] sur les inégalités isosystoliques des rubans de Möbius. Cependant, sa démonstration sans support géométrique demeure assez obscure. Or une explication plus géométrique existe : nous allons voir que lorsqu'on utilise pleinement toutes les courbes qui réalisent la systole, on va réussir à exprimer le rapport systolique optimal. Nous utiliserons donc, dans ce chapitre, cette autre méthode plus géométrique. Toutefois, pour ne pas perdre les bonnes habitudes, nous allons commencer par classifier les bouteilles de Klein plates, et donc les classes conformes de bouteilles de Klein.

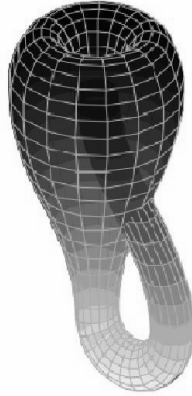


FIG. 5 – Bouteille de Klein

4.1 Classification des bouteilles de Klein plates

Prenons une bouteille de Klein plate K sous sa forme la plus générale ; c'est-à-dire : K est le quotient de \mathbb{R}^2 par le groupe engendré par une translation τ et une translation (non colinéaire à τ) composée avec une symétrie axiale. Quitte à conjuguer par une rotation, ce qui ne change ni la systole, ni l'aire de K , on peut supposer que notre symétrie s'effectue par rapport à l'axe des x . K est alors le quotient de \mathbb{R}^2

par le groupe G engendré par :

$$\begin{aligned}\sigma : (x, y) &\rightarrow (x + a, -y + b) \\ \tau : (x, y) &\rightarrow (x + c, y + d)\end{aligned}$$

où a, b, c, d sont des réels. Cependant, pour obtenir une variété par passage au quotient, nos quatre réels a, b, c, d vont devoir vérifier quelques conditions. Pour que \mathbb{R}^2 passe au quotient, il faut que l'action de G soit proprement discontinue et que tous les éléments de $G - \{id\}$ soient sans point fixe. Or si $g \in G$, g est de la forme

$$(x, y) \rightarrow (x + \alpha, \epsilon y + \beta)$$

avec $\alpha \in a\mathbb{Z} + c\mathbb{Z}$, $\beta \in b\mathbb{Z} + d\mathbb{Z}$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Donc pour que G soit proprement discontinue, il faut et il suffit que $a\mathbb{Z} + c\mathbb{Z} = e\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z} + d\mathbb{Z} = f\mathbb{Z}$ avec e, f des réels. On a alors les relations suivantes : $\exists n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = ne$, $c = me$, $b = pf$, $d = qf$ avec $n \wedge m = 1$ et $p \wedge q = 1$. Quitte à appliquer une affinité on peut supposer que $e = 1$ et $f = 1$ (cette transformation modifie l'aire et la systole, mais en appliquant son inverse à la fin du raisonnement, on retrouve les mêmes). On note désormais :

$$\begin{aligned}\sigma : (x, y) &\rightarrow (x + n, -y + p) \\ \tau : (x, y) &\rightarrow (x + m, y + q)\end{aligned}$$

En appliquant m fois σ et $-n$ fois τ , on trouve l'élément de G :

$$\begin{aligned}(x, y) &\rightarrow (x, -y + p - nq) \\ \text{ou } (x, y) &\rightarrow (x, y - nq)\end{aligned}$$

selon que m est respectivement impair ou pair. Or, le premier élément admet un point fixe, ce qui empêche de quotienter \mathbb{R}^2 par G et d'obtenir une variété. Donc m est pair et n est impair. On écrit alors une relation de Bezout entre m et n :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \lambda n + \mu m = 1$$

Par parité, λ est impair. On trouve donc dans G l'élément :

$$(x, y) \rightarrow (x + 1, -y + p + \mu q)$$

On a alors les deux éléments :

$$\begin{aligned}\sigma' : (x, y) &\rightarrow (x + 1, -y + p + \mu q) \\ \tau : (x, y) &\rightarrow (x + m, y + q)\end{aligned}$$

qui engendrent le groupe G (car $\sigma = \sigma'^{-n(\lambda-1)} \circ \tau^{-\mu} \circ \sigma'$). Mais alors :

$$\begin{aligned}\sigma' : (x, y) &\rightarrow (x + 1, -y + p + \mu q) \\ \text{et } \tau \circ \sigma'^{-m} : (x, y) &\rightarrow (x, y + q)\end{aligned}$$

engendrent le groupe G . Par un changement d'axe des ordonnées, on se ramène à la forme :

$$\begin{aligned}(x, y) &\rightarrow (x + 1, -y) \\ (x, y) &\rightarrow (x, y + u)\end{aligned}$$

N'ayant effectué que des isométries depuis notre première transformation affine, on peut appliquer son inverse et on retrouve la bouteille de Klein plate K initiale sous la forme du quotient de \mathbb{R}^2 par le groupe engendré par :

$$\begin{aligned}(x, y) &\rightarrow (x + a, -y) \\ (x, y) &\rightarrow (x, y + b)\end{aligned}$$

où a et b sont des réels non nuls. On la notera désormais $K_{a,b}$.

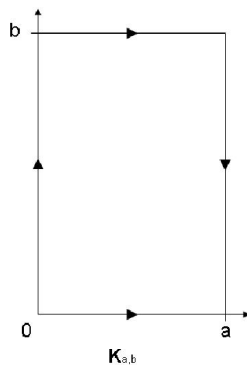


FIG. 6 – Bouteille de Klein plate

4.2 Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein

Bavard dans son texte [Bav88], réussit à exprimer l'importance des courbes systoliques dans notre problématique. En effet, il énonce un critère de maximalité qui constitue notre prochain lemme. Avant de l'énoncer, introduisons quelques notations. Soit Γ l'espace (supposé non vide) des courbes systoliques d'une variété riemannienne compacte M de dimension 2 munie d'une métrique lisse positive g . Alors à toute mesure de Radon μ sur Γ on va associer une mesure $^*\mu$ sur M en posant :

$$\langle ^*\mu, \phi \rangle = \langle \mu, \bar{\phi} \rangle \quad \phi \in C^0(M, \mathbb{R})$$

où $\bar{\phi}(\gamma) = \int \phi \circ \gamma(s) ds$, avec ds la longueur d'arc de γ . Énonçons maintenant le lemme :

Lemme 2 (Bavard) *Si il existe μ une mesure positive de masse 1 sur Γ telle que*

$$^*\mu = \frac{Sys(M)}{Aire(M)} V$$

où V est la mesure volume de M , alors M maximise la fonctionnelle $\frac{Systole^2}{Aire}$ dans sa classe conforme. Dans ce cas M est unique à homothétie près.

Notons qu'il y a en fait une équivalence : ce résultat, qui constitue un véritable théorème, est exposé dans l'article de Bavard [Bav88]. N'utilisant que le sens facile, nous n'en dirons pas plus sur la réciproque.

Preuve du lemme 2

Soit (\tilde{M}, \tilde{g}) une métrique conforme à (M, g) . Alors il existe F un difféomorphisme entre \tilde{M} et M , et ϕ continue, positive sur M tels que $F_*\tilde{g} = \phi^2 g$. Après avoir remarqué que $\bar{\phi}(\gamma)$ est la longueur de $\gamma \in \Gamma$ dans (\tilde{M}, \tilde{g}) , on a :

$$Sys(\tilde{M}, \tilde{g}) \leq \langle \mu, \bar{\phi} \rangle = \frac{Sys(M, g)}{Aire(M, g)} \int_M \phi dV \leq Sys(M, g) \left(\frac{Aire(\tilde{M}, \tilde{g})}{Aire(M, g)} \right)^{1/2}$$

la dernière inégalité étant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'égalité n'a donc lieu que pour ϕ constante. \square

Nous pouvons remarquer que nous avons déjà fait ce calcul, et donc que nous aurions pu utiliser ce lemme pour démontrer l'inégalité isosystolique du tore.

Avant de continuer, faisons une petite parenthèse pour montrer qu'on peut appliquer le Théorème 1 aux bouteilles de Klein : c'est-à-dire que la caractéristique d'Euler d'une bouteille de Klein $K_{a,b}$ est nulle. Comme $K_{a,b}$ est connexe, on a $H^0(K_{a,b}) = \mathbb{R}$; et comme $K_{a,b}$ est compacte et non orientable, $H^2(K_{a,b}) = 0$. Reste alors à voir que $H^1(K_{a,b}) = \mathbb{R}$. Si on prend une 1-forme fermée α sur la bouteille de Klein $K_{a,b}$, on en déduit une 1-forme fermée $\tilde{\alpha}$ sur le tore $T = \mathbb{R}^2/2a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Mais on sait que $\dot{H}(T)$ est isomorphe aux formes alternées $\dot{\Lambda}(\mathbb{R}^2)$ sur \mathbb{R}^2 . On en déduit donc que dx et dy forment une base de $H^1(T)$. $\tilde{\alpha}$ s'écrit alors $\tilde{\alpha} = udx + vdy + d\beta$, où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et β est une 0-forme sur le tore. Mais $\tilde{\alpha}$ vérifie $\tilde{\alpha}(x, y) = \tilde{\alpha}(x + a, -y)$, c'est-à-dire : $udx + vdy + d\beta = udx - vdy + d(F^*\beta)$ (où $F(x, y) = (x + a, -y)$). Donc vdy est une forme exacte sur le tore, donc $v = 0$. En passant $\tilde{\alpha}$ au quotient, on trouve $\alpha = udx + d\beta'$. Comme dx est bien une 1-forme fermée non exacte de la bouteille de Klein on a bien $H^1(K_{a,b}) = \mathbb{R}$.

Ce lemme en poche, nous disposons désormais d'une nouvelle stratégie. Nous allons chercher la métrique optimale pour chaque classe conforme et ainsi nous obtiendrons, en particulier, l'inégalité isosystolique des bouteilles de Klein. Comme chaque bouteille de Klein est conforme à une métrique plate (Théorème 1), nous connaissons un paramètre des classes conformes. En effet, soit K une bouteille de Klein munie d'une métrique lisse positive g , (K, g) est conforme à une bouteille plate $K_{a,b}$ et donc à une bouteille plate $\tilde{K}_\beta := K_{\pi, 2\beta}$ avec $\beta = \frac{\pi b}{2a}$ (par $f(x, y) = (\frac{\pi}{a}x, \frac{\pi}{a}y)$). Il sera commode de considérer également des bouteilles K_B munies d'une métrique de la forme :

$$ds^2 = \sigma^2(v)du^2 + dv^2$$

avec $|u| \leq \frac{\pi}{2}$, $|v| \leq B$ et σ continue, positive et B -périodique. Alors, si on pose $f(v) = \int_0^v \frac{dt}{\sigma(t)}$ et $\beta = f(B)$, l'application $F(x, y) = (x, f^{-1}(y))$ induit un difféomorphisme de \tilde{K}_β sur K_B tel que $F^*(\sigma^2(v)du^2 + dv^2) = \sigma^2 \circ f^{-1}(y)(dx^2 + dy^2)$. Nous sommes désormais prêts pour démontrer le théorème de Bavard suivant :

Théorème 3 (Bavard) *Dans toute classe d'équivalence conforme de métriques riemanniennes continues sur K , il existe une métrique g_β , unique à isométrie et homothétie près, qui maximise le rapport $\frac{Sys^2}{Aire}$. Pour cette métrique maximale, $m(\beta) = \frac{Sys^2(g_\beta)}{Aire(g_\beta)}$ est donné par :*

1. $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$

$$m(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \quad (g_\beta = \tilde{K}_\beta \text{ plate})$$

2. $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq 2 \ln(1 + \sqrt{2})$

$$m(\beta) = \frac{\pi}{4} \left(\sin(\lambda) + \left(\frac{\pi}{4} - \lambda \right) \cos(\lambda) \right)^{-1}$$

où $2 \ln(\tan(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4})) + \frac{\pi/2 - 2\lambda}{\cos(\lambda)} = \beta$

3. $2 \ln(1 + \sqrt{2}) \leq \beta \leq 2 \ln(2 + \sqrt{3})$

$$m(\beta) = \frac{\pi}{4 \tanh(\frac{\beta}{2})}$$

4. $2 \ln(2 + \sqrt{3}) \leq \beta$

$$m(\beta) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{2\pi}(\beta - 2 \ln(2 + \sqrt{3})) \right)^{-1}$$

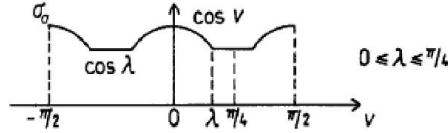
Preuve du théorème 3

Notons dès à présent que $Sys(g_\beta) = 2\beta$ dans le cas (1) et $Sys(g_\beta) = \pi$ dans les cas (2), (3) et (4).

Preuve de (1) : soit $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Les courbes systoliques de la bouteille plate \tilde{K}_β sont donc les droites verticales. On note alors γ_x la courbe systolique définie par $t \rightarrow (x, t)$ ($|t| \leq \beta$), et $\mu = \frac{1}{\pi} dx$ mesure sur $\Gamma = \{\gamma_x : x \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$. Clairement, μ est de masse 1 et $*\mu = \frac{\beta}{\beta\pi} dx dy = \frac{Sys(\tilde{K}_\beta)}{Aire(\tilde{K}_\beta)} dx dy$. Par le lemme de Bavard, on en déduit donc que $m(\beta) = \frac{2\beta}{\pi}$ et que la métrique maximale est la métrique plate.

Notons que l'argument n'est plus valable pour $\beta > \frac{\pi}{2}$ car les γ_x ne sont plus systoliques.

Les cas (2), (3) et (4) se démontrant de la même manière nous allons rédiger complètement tout les calculs du cas (2) et énoncer les résultats dans les autres cas. Démontrons donc le cas (2) où $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq 2\ln(1 + \sqrt{2})$. Soit $(K_{\frac{\pi}{2}}, g_\lambda)$ la bouteille de Klein carrée définie plus haut, munie pour $\lambda \in [0, \frac{\pi}{4}]$ de la métrique $g_\lambda(u, v) = \sigma_\lambda^2(v)du^2 + dv^2$, définie par : $\sigma_\lambda(v) = \cos(v)$ sur $[-\lambda, \lambda]$, $\sigma_\lambda(v) = \cos(\lambda)$ sur $[-\frac{\pi}{4}, -\lambda]$ et sur $[\lambda, \frac{\pi}{4}]$ et σ_λ est $\frac{\pi}{2}$ -périodique.



Le type conforme de $(K_{\frac{\pi}{2}}, g_\lambda)$ est :

$$\beta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sigma_\lambda(t)} = 2 \ln\left(\tan\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\lambda\right) / \cos(\lambda).$$

Ainsi lorsque λ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, β varie de $\frac{\pi}{2}$ à $2\ln(1 + \sqrt{2})$.

Remarquons à présent que sur notre bouteille carrée, nous avons deux familles de courbes systoliques : la première étant la famille des droites verticales (Γ_1) et la seconde la famille (Γ_2) des demi-cercles sur la bande $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\lambda, \lambda]$ (et sur la bande $\{\frac{\pi}{2} - \lambda \leq v \leq \frac{\pi}{2} + \lambda\}$). Nous allons donc utiliser ces deux familles.

Soit $\gamma_u(t) = (u, t)$ pour $|t| \leq \frac{\pi}{2}$. On munit $\Gamma_1 = \{\gamma_u : u \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$ de la mesure $\mu_1 = \cos(\lambda)dv$. Ainsi, soit ϕ une fonction continue de la bouteille $K_{\frac{\pi}{2}}$ sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \langle * \mu_1, \phi \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{\phi}(\gamma_u) \cos(\lambda) du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(u, v) dv \cos(\lambda) du \end{aligned}$$

donc $* \mu_1 = \cos(\lambda)du dv = \frac{\cos(\lambda)}{\sigma_\lambda(v)} g_\lambda(u, v)$.

On regarde maintenant, sur la bande $\{|v| \leq \lambda\}$, la géodésique γ_0^a pour $-\lambda \leq a \leq \lambda$ qui est la géodésique passant par les points $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, a)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Comme sur la bande $\{|v| \leq \lambda\}$, g_λ est la métrique sphérique, γ_0^a est le demi-cercle d'extrémités $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$ et dont la latitude maximale ou minimale (suivant que a soit positif ou négatif) est a .

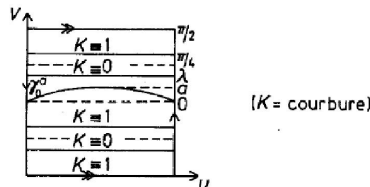


FIG. 7 – Géodésique

On regarde aussi ses images γ_θ^a par les isométries $(u, v) \rightarrow (u + \theta, v)$ pour $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Munissons $\Gamma_2 = \{\gamma_\theta^a : -\lambda \leq a \leq \lambda \text{ et } \theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$ de la mesure suivante :

$$\mu_2 = h(a)da \otimes d\theta$$

h étant une fonction à déterminer. Calculons alors ${}^*\mu_2$. Pour l'instant nous n'exprimerons pas entièrement la paramétrisation de γ_θ^a : nous noterons juste que $\gamma_\theta^a(t) = (t + \theta, v(t, a))$ où v est une fonction continue. Alors, soit ϕ une fonction continue de la bouteille $K_{\frac{\pi}{2}}$ sur \mathbb{R} :

$$\langle {}^*\mu_2, \phi \rangle = \int_{a=-\lambda}^{\lambda} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(t + \theta, v(t, a)) \sqrt{\cos^2(v(t, a)) + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, a)\right)^2} h(a) dt d\theta da$$

Or $t \rightarrow v(t, a)$ est une fonction paire pour tout a fixé, donc

$$\langle {}^*\mu_2, \phi \rangle = 2 \int_{a=-\lambda}^{\lambda} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^0 \phi(t + \theta, v(t, a)) \sqrt{\cos^2(v(t, a)) + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, a)\right)^2} h(a) dt d\theta da.$$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} a &= a \\ \theta &= \theta \\ y &= v(t, a) \end{aligned}$$

dont le jacobien est $\frac{\partial v}{\partial t}(t, a)$, qui est toujours positif sur $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ (comme on le voit sur la figure 7). Posons $k(y, a) = t$ et $f(y, a) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, a)$. Alors :

$$\langle {}^*\mu_2, \phi \rangle = 2 \int_{a=-\lambda}^{\lambda} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^a \phi(k(y, a) + \theta, y) \sqrt{\cos^2(y) + f^2(y, a)} \frac{h(a)}{|f(y, a)|} dy d\theta da.$$

Effectuons maintenant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} a &= a \\ x &= k(y, a) + \theta \\ y &= y \end{aligned}$$

dont le jacobien vaut 1. Comme $\theta \rightarrow k(y, a) + \theta$ est π -périodique, on a :

$$\begin{aligned} \langle {}^*\mu_2, \phi \rangle &= 2 \int_{a=-\lambda}^{\lambda} \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^a \phi(x, y) \sqrt{\cos^2(y) + f^2(y, a)} \frac{h(a)}{|f(y, a)|} dy dx da \\ &= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=-\lambda}^{\lambda} \int_{a=|y|}^{\lambda} \phi(x, y) \sqrt{\left(\frac{\cos(y)}{f(y, a)}\right)^2 + 1} h(a) da dy dx. \end{aligned}$$

Donc

$${}^*\mu_2(u, v) = 2 \frac{\chi(|v| \leq \lambda)}{\cos(v)} \int_{a=|v|}^{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\cos(v)}{f(v, a)}\right)^2 + 1} h(a) da g_\lambda(u, v).$$

Exprimons maintenant le fait que les courbes γ_θ^a sont des géodésiques. Dans l'article [Pu52], Pu exprime les géodésiques sur des métriques de la forme $ds^2 = g(y)(dx^2 + dy^2)$ comme étant les courbes $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ qui réalisent $\frac{d}{dy} \left(x' \left(\frac{g(y)}{1+x'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = 0$, où $x' = \frac{dx}{dy}$. Dans notre cas, $g(y) = \cos^2(v)$ et $x' = \frac{\cos(v)}{f(v, a)}$. Donc nos courbes γ_θ^a vérifient

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{\cos^2(v)}{\sqrt{f^2(v, a) + \cos^2(v)}} \right) = 0.$$

On obtient ainsi une équation différentielle vérifiée par $v \rightarrow f^2(v, a)$, sachant que $f^2(0, a) = 0$. La solution de ce problème est : $f^2(v, a) = \frac{\cos^2(v)}{\cos^2(a)} (\cos^2(v) - \cos^2(a))$.

Ainsi, on a :

$${}^* \mu_2(u, v) = 2\chi(|v| \leq \lambda) \int_{a=|v|}^{\lambda} (\cos^2(v) + \cos^2(a))^{-\frac{1}{2}} h(a) da g_{\lambda}(u, v).$$

Nous allons maintenant chercher la fonction h qu'il faut pour vérifier les conditions du lemme de Bavard. On veut que h vérifie l'équation :

$${}^* \mu_1 + {}^* \mu_2 = g_{\lambda}$$

sur $|v| \leq \lambda$, i.e.

$$\frac{\cos(\lambda)}{\cos(v)} + 2 \int_{a=|v|}^{\lambda} (\cos^2(v) + \cos^2(a))^{-\frac{1}{2}} h(a) da = 1.$$

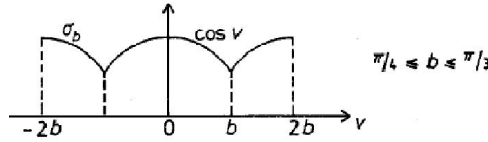
On trouve alors :

$$h(a) = \frac{\sin(a)}{\pi \cos(a)} (\cos^2(a) - \cos^2(\lambda))^{-\frac{1}{2}} \quad (0 \leq a \leq \lambda).$$

Puis on définit de même μ_2 sur la famille $s(\Gamma_2)$, où s est la symétrie long de $\{v = \pm \frac{\pi}{4}\}$. Finalement $(\mu_1 + \mu_2) = g_{\lambda}$ et on vérifie que $\mu_1 + \mu_2$ est de masse finie. Ainsi on peut appliquer le lemme de Bavard qui nous dit que $(K_{\frac{\pi}{2}}, g_{\lambda})$ est maximale et que :

$$m(\beta) = \frac{\pi}{4} \left(\sin(\lambda) + \left(\frac{\pi}{4} - \lambda \right) \cos(\lambda) \right)^{-1}$$

Preuve du cas (3), où $2 \ln(1 + \sqrt{2}) \leq \beta \leq 2 \ln(2 + \sqrt{3})$. Soit $(K_{2b}, g_{2b} = \sigma^2(v) du^2 + dv^2)$ la bouteille de Klein déjà définie (avec $\frac{\pi}{4} \leq b \leq \frac{\pi}{3}$). On définit σ par : $\sigma(v) = \cos(v)$ sur $[-b, b]$ et σ est $2b$ -périodique. Le type conforme de (K_{2b}, g_{2b}) est $\beta = 2 \ln(\tan(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}))$.



Sur $\{|v| \leq b\}$ on considère comme dans le cas (2) la famille $\Gamma = \{\gamma_{\theta}^a : -b \leq a \leq b, \theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$ et la mesure $\mu = h(a) da \otimes d\theta$ (de même pour $b \leq v \leq 2b$). On remarque qu'on ne regarde pas ici les droites verticales car elles ne sont pas systoliques. On demande donc (après avoir fait les mêmes calculs que dans le cas (2)) que h vérifie :

$$2\chi(|v| \leq b) \int_{a=|v|}^{\lambda} (\cos^2(v) + \cos^2(a))^{-\frac{1}{2}} h(a) da = 1$$

pour avoir ${}^* \mu = g_{2b}$. On trouve alors la solution :

$$h(a) = \frac{\sin(2a)}{2\pi} (\cos^2(a) + \cos^2(b))^{-\frac{1}{2}} \quad (0 \leq a \leq b)$$

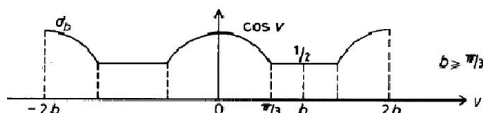
On vérifie de plus que μ est de masse finie, et on en déduit, grâce au lemme 2, que (K_{2b}, g_{2b}) est maximale et que :

$$m(\beta) = \frac{\pi}{4 \sin(b)} = \frac{\pi}{4 \tanh(\frac{\beta}{2})}$$

On remarque que pour $\beta > 2 \ln(2 + \sqrt{3})$ on n'en déduit pas le résultat car les courbes γ_θ^a ne sont plus systoliques. En effet, si on regarde la longueur de la courbe $\gamma(t) = (t, b)$ on trouve :

$$L(\gamma) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(b) dt = \pi \cos(b) < \pi.$$

Preuve du cas (4), où $2 \ln(2 + \sqrt{3}) \leq \beta$. Soit $(K_{2b}, g_{2b} = \sigma^2(v) du^2 + dv^2)$ la bouteille de Klein déjà définie (avec $b \geq \frac{\pi}{3}$). On définit σ par : $\sigma(v) = \cos(v)$ sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, $\sigma(v) = \frac{1}{2}$ sur $[-b, -\frac{\pi}{3}]$ et sur $[\frac{\pi}{3}, b]$, et σ est $2b$ -périodique. Le type conforme de (K_{2b}, g_{2b}) est $\beta = 2(\ln(2 + \sqrt{3}) + 4(b - \frac{\pi}{3}))$.



Dans la bande plate $\{\frac{\pi}{3} \leq |v| \leq 2b - \frac{\pi}{3}\}$, on considère la famille de courbes γ_a d'équation $v = \pm a$ pour $\{\frac{\pi}{3} \leq a \leq 2b - \frac{\pi}{3}\}$, et on pose $\mu = da$. Dans la bande $\{|v| \leq \frac{\pi}{3}\}$, on considère encore la famille $\Gamma = \{\gamma_\theta^a : -\frac{\pi}{3} \leq a \leq \frac{\pi}{3}, \theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$ et la mesure $\mu = h(a) da \otimes d\theta$ (de même pour $2b - \frac{\pi}{3} \leq v \leq 2b + \frac{\pi}{3}$). On trouve alors $h(a) = \frac{\sin(2a)}{2\pi} (\cos^2(a) - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ ($0 \leq a \leq \frac{\pi}{3}$).

Par le lemme de Bavard, on trouve alors que (K_{2b}, g_{2b}) est maximale et que :

$$m(\beta) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{2\pi} (\beta - 2 \ln(2 + \sqrt{3})) \right)^{-1}.$$

□

Corollaire 2 Soit K une bouteille de Klein munie d'une métrique riemannienne continue positive g . Alors

$$\frac{Sys^2(K)}{Aire(K)} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (3)$$

De plus le cas d'égalité est réalisé pour la bouteille de Klein $K_{\frac{\pi}{4}}$ suivante : $K_{\frac{\pi}{4}}$ est le quotient de \mathbb{R}^2 par $\langle s, t^2 \rangle$, où :

$$\begin{aligned} s : (x, y) &\rightarrow (x + \pi, -y) \\ t : (x, y) &\rightarrow (x, y + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

lorsqu'on munit cette bouteille de la métrique $g_{\frac{\pi}{4}}$ t -invariante définie, pour $|y| \leq \frac{\pi}{4}$, par $\cos(y)^2 dx^2 + dy^2$.

Preuve du corollaire 2

En effet, nous n'avons plus qu'à comparer les $m(\beta)$ pour $\beta > 0$ et on trouve le résultat voulu. □

Corollaire 3 Soit R un ruban de Möbius muni d'une métrique g . Alors

1. (R, g) est conforme à un ruban plat R_b , où R_b est le quotient de $\mathbb{R} \times [-b, b]$ par $\langle s : (x, y) \rightarrow (x + \pi, -y) \rangle$ muni de la métrique plate $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
2. On a alors l'inégalité suivante :

$$\frac{Sys^2(R)}{Aire(R)} \leq \frac{\pi}{4 \sin(b)} \quad (4)$$

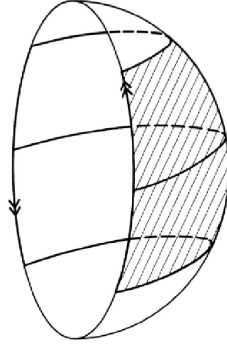


FIG. 8 – Ruban de Möbius sphérique

Preuve du corollaire 3

Soit (R, g) un ruban de Möbius. Celui-ci est conforme à un ruban plat (R_β, g_β) , avec (R_β, g_β) le quotient de $\mathbb{R} \times [-\beta, \beta]$ par le groupe engendré par $\tau : (x, y) \rightarrow (x + \pi, -y)$. De plus, ce dernier est conforme au ruban (\tilde{R}_b, g_b) , pour $b = \arcsin(\tanh(\beta))$, avec (\tilde{R}_b, g_b) le ruban sphérique : $g_b(u, v) = \cos^2(v)du^2 + dv^2$, $|u| \leq \frac{\pi}{2}$ et $|v| \leq g$. Rappelons ce fait : nous utilisons ici exactement la transformation conforme inverse de Mercator $F : (x, y) \rightarrow (x, 2 \arctan(\exp(y)) - \frac{\pi}{2})$, qui induit un difféomorphisme de $[0, \pi] \times [-\beta, \beta]$ sur son image $[0, \pi] \times [-b, b]$, avec $b = 2 \arctan(\exp(\beta)) - \frac{\pi}{2} = \arcsin(\tanh(\beta))$. Comme une bouteille de Klein est le recollement de deux rubans de Möbius, si on définit (\tilde{K}, g) comme le recollement de deux rubans (R, g) , et (K_{2b}, g_{2b}) comme celui de deux rubans (\tilde{R}_b, g_b) , alors (K, g) et (K_{2b}, g_{2b}) sont deux bouteilles de Klein conformes. On remarque que la bouteille (K_{2b}, g_{2b}) ainsi définie est en fait la bouteille déjà rencontrée dans la démonstration du cas (3) du théorème de Bavard. Les calculs ont donc essentiellement déjà été faits. Or ceux-ci sont plus aisés pour les rubans de Möbius, car les droites verticales, étant non fermées, ne sont jamais prises en compte. On élimine donc les cas (1) et (2) que l'on traite comme le cas (3). Ainsi, on vérifie que le lemme de Bavard est réalisé, pour $\beta \leq 2 \ln(2 + \sqrt{3})$, pour le ruban (\tilde{R}_b, g_b) : on trouve alors le résultat voulu. Pour $\beta > 2 \ln(2 + \sqrt{3})$, la démonstration du cas (4) nous donne $\frac{Sys^2(R)}{Aire(R)} \leq (\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{4\pi}(\beta - 2 \ln(2 + \sqrt{3})))^{-1}$. L'inégalité énoncée est donc juste mais n'est pas optimale (car les γ_θ^a ne sont plus systoliques). \square

Conclusion

On a donc établi les inégalités suivantes :

Variété	$\frac{Sys^2}{Aire} \leq \cdot$
Tore	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
Plan projectif \mathbb{P}^2	$\frac{\pi}{2}$
Bouteille de Klein	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
Ruban de Möbius R_b	$\frac{\pi}{4 \sin(b)}$

Nous nous sommes limités à un petit nombre de variétés, et seulement en dimension 2, mais on pourrait poursuivre l'étude en dimension supérieure ou sur des surfaces de genre plus grand. Nous renvoyons pour cela aux articles de M. Gromov.

Références

- [Bav86] C. Bavard. Inégalité isosystolique pour la bouteille de klein. *Math. Ann.*, 274 :p. 439–441, 1986.
- [Bav88] C. Bavard. Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de klein. *Geom. Dedicata*, 27 :p. 349–355, 1988.
- [Ber93] M. Berger. Systoles et applications selon gromov. Séminaire N. Bourbaki, exp. n°771, p. 279-310, 1992-1993.
- [Pu52] P. Pu. Some inequalities in certain non-orientable riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 2 :p. 55–71, 1952.
- [Tro86] M. Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math.*, t. 32 :p. 79–94, 1986.