Multiplication des angles par 2 et 3 et mesures invariantes

Hugo Duminil, Cyrille Lucas

29 juin 2006

MOTS-CLÉS : doublement d'angle, compact invariant, mesure invariante, ergodicité, entropie

Nous tenons à remercier Antonin GUILLOUX pour la disponibilité dont il a fait preuve et pour l'aide qu'il nous a apportée tout au long de notre travail.

Introduction

Un système dynamique est la donnée d'un espace E et d'un ensemble de transformations $\mathcal{T}$ de E dans E. Lorsque ces transformations sont continues, on peut s'intéresser aux compacts laissés invariants par $\mathcal{T}$. D'autre part, si l'on veut connaître l'allure des orbites de chaque point (l'ensemble des itérés), il est intéressant d'étudier les mesures de probabilité invariantes par les transformations de $\mathcal{T}$. Dans cet exposé, nous nous intéressons au système dynamique formé du cercle et de la multiplication des angles par 2 et 3.

Dans la première partie, nous montrerons l'étonnant résultat suivant, dû à Furstenberg (1967 [2]) : le seul compact infini invariant par doublement et triplement d'angle est le cercle tout entier. Pour étudier les mesures invariantes, nous devrons ajouter une hypothèse sur les mesures étudiées, dite d'entropie strictement positive. Dans la seconde partie, nous étudions donc des notions se rapportant aux mesures dans le cadre des systèmes dynamiques. Dans la dernière partie, nous décrivons les mesures invariantes par ce système dynamique sous l'hypothèse d'entropie strictement positive (résultat de Rudolph, 1990, [5]).

Table des matières

1 Fermés invariants du cercle

Le cadre mathématique de cet exemple est le suivant : on considère $\mathbb{S}_1$ le cercle que l'on peut identifier à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On considère également, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & kx \end{array}$$

Cela définit une fonction de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$. L'application f_k est la multiplication des angles par k. Dans la suite, on identifie $\mathbb{S}_1$ et le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Définition 1.1 *Un compact K de $\mathbb{S}_1$ est dit* invariant *par f_k si $f_k(K) \subset K$.*

Par exemple, il existe de nombreux compacts infinis invariants par f_3. On peut prendre l'ensemble $\left\{e^{\frac{2i\pi}{3^n}} | n \in \mathbb{N}\right\}$. Un autre exemple plus exotique est donné par l'image par la projection canonique de l'ensemble triadique de Cantor (c'est l'ensemble des réels de [0,1[dont le développement en base 3 ne contient que des 0 ou des 2). Plus simplement, le cercle tout entier est également un compact invariant. On voit donc qu'il existe des compacts infinis invariants par f_3 très variés. De même, on trouve de nombreux compacts infinis invariants pour f_2.

Par contre, si l'on ajoute la condition que K soit à la fois invariant par f_2 et f_3, on obtient l'étonnant résultat de rigidité suivant.

Théorème 1.1 *(Furstenberg, 1967) Un compact invariant par f_2 et f_3 est soit fini, soit égal à $\mathbb{S}_1$.*

Pour démontrer ce résultat, on s'intéresse tout d'abord à deux cas particuliers (le cas où 0 n'est pas isolé dans K et le cas où K est *minimal pour l'inclusion*). On déduit ensuite le cas général de ces deux premiers cas.

Remarque : Il existe de nombreux compacts invariants finis stables par f_2 et f_3. Nous les décrirons à la fin de cette section. Cependant, on peut déjà voir qu'un compact invariant fini est inclus dans les rationnels (ici on considère qu'un élément du cercle est rationnel si et seulement si son représentant dans $[0, 1[$ est rationnel).

1.1 Cas où 0 n'est pas isolé dans K

Lemme 1.1 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{N}\log 2 + \mathbb{N}\log 3$ soit ϵ-dense dans $[M, +\infty[$, c'est à dire que tout intervalle ouvert de $[M, +\infty[$ de longueur plus grande que ϵ contient un élément de $\mathbb{N}\log 2 + \mathbb{N}\log 3$.*

Démonstration :

Comme $\frac{\log 2}{\log 3}$ est irrationnel, l'ensemble $\mathbb{Z}\log 2+\mathbb{Z}\log 3$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un nombre fini d'éléments $x_i = n_i \log 2+m_i \log 3$ de $\mathbb{Z}\log 2+\mathbb{Z}\log 3$ qui forment un ensemble ϵ-dense dans $[0, \log 2]$. En ajoutant $M = N \log 2 + N \log 3$ avec $N > max_i(|n_i|, |m_i|)$, on obtient que $\mathbb{N}\log 2 + \mathbb{N}\log 3$ est $\epsilon-$dense dans $[M, M + \log 2]$. Comme on peut ajouter un réel de la forme $n \log 2$, on obtient le résultat. $\square$

Proposition 1.1 *Soit K un compact invariant par f_2 et f_3 dans lequel 0 n'est pas isolé, alors $K = \mathbb{S}_1$.*

Démonstration :

Puisque 0 n'est pas isolé dans K, on peut supposer, quitte à extraire, qu'il est limite d'une suite de signe constant, par exemple positif. Il est alors commode de travailler avec des représentants dans [0,1[des éléments de K, on identifie donc un élément et son représentant (si la suite avait été négative, on aurait travaillé avec les représentants dans $]-1,0]$. Soient $\epsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{S}_1$ non nul, on veut montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $|x_0 - \alpha| \leq \epsilon$. Comme K est fermé, cela suffit à prouver que $K = [0,1[$.

Le lemme précédent nous donne un $M' > 0$ tel que

$$\forall y > M', \exists a, b \in \mathbb{N}, 1 - \epsilon \leq \frac{y}{2^a 3^b} \leq 1 + \epsilon$$

Puisque l'on dispose d'une suite d'éléments positifs de K qui tend vers 0, il existe $x \in K$, $\frac{x_0}{x} > M'$. En appliquant le lemme, on trouve :

$$-\epsilon < \frac{x_0}{x 2^a 3^b} - 1 < \epsilon$$

En multipliant par $x 2^a 3^b$ qui est inférieur à $\frac{x_0}{1-\epsilon}$ donc à 2 (si l'on prend $\epsilon \leq \frac{1}{2}$), on obtient :

$$-2\epsilon < x_0 - 2^a 3^b x < 2\epsilon$$

Or par définition de l'invariance de K, on a $2^a 3^b x \in K$. Donc K est compact et dense dans $\mathbb{S}_1$, d'où $K = \mathbb{S}_1$.

□

1.2 Cas où K est un compact invariant minimal

Définition 1.2 *Un compact K est dit* invariant minimal *pour un semi-groupe de transformations S s'il est minimal pour l'inclusion parmi les compacts non vides invariants par S.*

Remarque : Si K est un compact invariant minimal, l'orbite $O(x) = \left\{ f_2^a \circ f_3^b(x), a, b \in \mathbb{N} \right\}$ d'un élément $x \in K$ est dense dans K. En effet, l'adhérence $\overline{O(x) = \left\{ f_2^a \circ f_3^b(x), a, b \in \mathbb{N} \right\}}$ de cette orbite est un compact invariant non vide contenu dans K.

Comme l'orbite de 0 est $\{0\}$, on en déduit que les compacts invariants minimaux qui contiennent 0 sont réduits à $\{0\}$. En particulier, $\mathbb{S}_1$ n'est pas un compact invariant minimal.

Proposition 1.2 *Soit S un semi-groupe de transformations, et soit K un compact non vide invariant par S. Alors il contient un compact invariant minimal.*

Démonstration :

Considérons l'ensemble des compacts invariants non vides muni de l'inclusion . C'est un ensemble inductif car si $K_0 \supset \cdots \supset K_n \supset \ldots$ est une famille de compacts invariants, $\bigcap_i K_i$ est encore un compact invariant. Il est non vide en tant qu'intersection de compacts décroissants non vides donc c'est un minorant de la chaîne. Le lemme de Zorn donne alors l'existence, pour K compact invariant non vide, d'un élément extrémal contenu dans K. Or un compact invariant extrémal est exactement un compact invariant minimal, d'où le résultat.

$\square$

Proposition 1.3 *Soient K et B deux compacts de $\mathbb{S}_1$ invariants par f_2 et f_3, avec K minimal, tels que $K + B = \mathbb{S}_1$, alors $B = \mathbb{S}_1$.*

Remarque : L'idée de la démonstration suivante est " d'amincir " le compact K jusqu'à n'obtenir plus qu'un point x_0. En effet, si $x_0 + B = \mathbb{S}_1$ alors $B = \mathbb{S}_1$.

Démonstration :

Étape I : On construit une suite décroissante de compacts tels que $K^{(k)}$ soit stable par $f_2^{k!}$ et $f_3^{k!}$ et minimal pour ces applications :

Soit $K^{(1)} = K$. Par récurrence, on suppose la suite construite jusqu'au rang k. Alors $K^{(k)}$ est stable par $f_2^{(k+1)!}$ et $f_3^{(k+1)!}$, donc d'après la proposition précédente, il existe un compact $K^{(k+1)}$ minimal pour $f_2^{(k+1)!}$ et $f_3^{(k+1)!}$ contenu dans $K^{(k)}$.

Étape II : On veut alors montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $K^{(k)} + B = \mathbb{S}_1$.

On le montre uniquement pour $k = 2$ mais la démonstration est la même pour tous les entiers. On définit :

$$K' = K^{(2)} \cup f_2(K^{(2)}) \cup f_3(K^{(2)}) \cup f_2 \circ f_3(K^{(2)}).$$

On remarque alors que K' est un compact invariant par f_2 et f_3 inclus dans K. Par minimalité de K, on a $K = K'$. En particulier :

$$\mathbb{S}_1 = (K^{(2)} + B) \cup (f_2(K^{(2)}) + B) \cup (f_3(K^{(2)}) + B) \cup (f_2 \circ f_3(K^{(2)}) + B).$$

Donc l'un au moins de ces quatre compacts est d'intérieur non vide. Comme f_2 et f_3 sont des applications continues et ouvertes, ces compacts sont tous d'intérieur non vide (ils sont images ou images réciproques les uns des autres par f_2 et f_3). Donc $L = K^{(2)} + B$ est d'intérieur non vide.

En particulier, il contient un intervalle de la forme $[x, x + \frac{1}{2^n}]$ ce qui implique $f_2^{2n}(L) = \mathbb{S}_1$. Mais puisque L est f_2^2 invariant, cela implique $L = \mathbb{S}_1$.

ÉTAPE III : Posons $K^{(\infty)} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} K^{(k)}$ et montrons que $K^{(\infty)} + B = \mathbb{S}_1$.

En effet, considérons x dans $\mathbb{S}_1$. Pour tout $k \geq 0$, il existe $y_k \in B$ et $z_k \in K^{(k)}$ tels que $x = y_k + z_k$. En extrayant une sous suite convergente, on obtient l'existence de $y \in B$ et de $z \in K^{(\infty)}$ (car les $K^{(k)}$ forment une suite décroissante de compacts) tels que $x = y + z$.

ÉTAPE IV : Soit $x_0 \in K^{(\infty)}$. Montrons que $x_0 + B = \mathbb{S}_1$.

Soit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et q premier avec 2 et 3. Pour $k \geq q$ assez grand, α est un point fixe de $f_2^{k!}$ et $f_3^{k!}$. En effet, $f_2^{\phi(q)}(\alpha) - \alpha = p\frac{2^{\phi(q)}-1}{q} = 0$ car q divise $2^{\phi(q)} - 1$, de même pour 3.

Comme $K^{(\infty)} + B = \mathbb{S}_1$, il existe $x \in K^{(\infty)}$ et $y \in B$ tel que $x + y = \alpha$. Alors pour tout f dans le semigroupe S engendré par $f_2^{k!}$ et $f_3^{k!}$, $f(x)+f(y) = f(\alpha) = \alpha$. Comme $K^{(k)}$ est minimal pour S, $\{f(x), f \in S\}$ est dense dans $K^{(k)}$ donc dans $K^{(\infty)}$. Il existe donc (f_n) tel que $(f_n(x))$ tend vers x_0. On vérifie alors, $f_n(y) = \alpha - f_n(x) \in B$ donc converge vers $y_0 = \alpha - x_0$ qui est dans B car B est fermé. On a alors $x_0 + y_0 = \alpha$ et $\alpha \in x_0 + B$.

Ceci étant vrai pour tout l'ensemble dense des rationnels de dénominateur premier avec 2 et 3, on obtient $\mathbb{S}_1 \subset x_0 + B$.

$\square$

Corollaire 1.4 *Un compact invariant minimal est nécessairement fini.*

Démonstration :

Soit K un compact invariant minimal, que l'on suppose infini par l'absurde. Comme K est compact et infini, il admet un point d'accumulation. Alors 0 est point d'accumulation dans le compact invariant $K - K$, ce qui montre d'après la proposition 1.1 que $K - K = \mathbb{S}_1$. On a donc d'après la proposition 1.3 appliquée à $B = -K$, $K = \mathbb{S}_1$, ce qui est absurde car $\mathbb{S}_1$ n'est pas minimal.

$\square$

1.3 Cas général

Proposition 1.5 *Un compact invariant est soit fini, soit non dénombrable. Dans le deuxième cas, le compact contient un irrationnel.*

Démonstration :

Si K n'est pas fini, il admet un point d'accumulation et $K - K = \mathbb{S}_1$. Si K est dénombrable, $K - K$ aussi ce qui est absurde. Donc K est non dénombrable, en particulier il n'est pas inclu dans les rationnels.

$\square$

Théorème 1.2 *(**Furstenberg, 1967**) Un compact invariant infini est égal à $\mathbb{S}_1$.*

Démonstration :

Soit K un compat infini, il contient donc un irrationnel x et par invariance $O(x)$.

D'autre part, d'après la proposition 1.2, l'adhérence de $O(x)$ contient un compact invariant minimal qui est fini et donc contenu dans les rationnels. Puisque $O(x)$ ne contient que des irrationnels, il existe un rationnel p/q qui est un point d'accumulation dans K. Donc 0 est un point d'accumulation dans $q \cdot K$ et donc $q \cdot K = \mathbb{S}_1$. Ainsi K est d'intérieur non vide. Il existe alors n tel que $f_2^n(K) = \mathbb{S}_1$. Par invariance de K, il vient que $K = \mathbb{S}_1$.

$\square$

Remarque : On a déjà vu qu'un compact invariant fini est inclus dans les rationnels. D'autre part, on a montré que si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec q premier avec 2 et 3, alors l'orbite de α est fini. On en déduit facilement que l'orbite d'un rationel est fini. Un compact invariant fini est donc une union finie d'orbites de rationnels.

Petit intermède heuristique : Nous venons de montrer que les seuls compacts invariants par f_2 et f_3 sont des ensembles finis et le cercle tout entier $\mathbb{S}_1$. On sait donc, puisque l'adhérence de l'orbite d'un point est un compact invariant, que l'orbite d'un point est ou bien fini, ou bien dense. On obtient donc une première propriété intéressante de ce système dynamique. Pour avancer encore dans la description de l'orbite d'un point, on peut s'intéresser aux *mesures invariantes* μ. En effet, sous une hypothèse d'ergodicité, le théorème de Birkhoff (voir théorème 2.1) affirme que pour μ-presque tout x_0 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} f(T^i x_0) = \int f(x) d\mu(x)$$

On obtient donc une description du comportement asymptotique des itérés de μ-presque tout x_0. Nous allons donc tenter dans la suite de cet exposé de décrire les mesures invariantes par le système dynamique du cercle muni du doublement et du triplement d'angle.

2 Notions sur les systèmes dynamiques

Dans ce paragraphe, nous citons certains résultats du polycopié de systèmes dynamiques [1] que le lecteur pourra consulter pour les démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.2, ainsi que pour des approfondissements sur les notions d'ergodicité et d'entropie.

Définition 2.1 *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_1$, et $T : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$ une application mesurable, on dit que μ est invariante par T si $T_*\mu = \mu$, c'est à dire, pour tout B borélien de $\mathbb{S}_1$, $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$. On appelera système dynamique mesuré la donnée $(\mathbb{S}_1, \mu, T)$ d'une transformation mesurable T de $\mathbb{S}_1$ et d'une mesure de probabilité μ invariante par T.*

Remarque : La mesure de Dirac en 0, les moyennes des mesures de Dirac en les points d'une orbite cyclique finie (tout élément de l'orbite doit être l'image d'un élément de l'orbite) et la mesure de Lebesgue sont invariantes par les mutiplications par 2 et 3.

Remarque : L'invariance de μ par T est équivalente à :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}_1), \int f(Tx)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

Notre but est de décrire les mesures invariantes par la multiplication des angles par 2 et 3. Nous traitons le cas plus général de la multiplication des angles par p et q avec p et q premiers entre eux. Dans le premier paragraphe, nous montrerons que l'on peut se restreindre à étudier les mesures dites *ergodiques*. Dans un deuxième temps, nous introduirons la notion d'entropie d'un système dynamique mesuré $(\mathbb{S}_1, \mu, T)$. En effet, la résolution complète du problème n'a été effectuée que sous une hypothèse supplémentaire dite d'*entropie strictement positive* (on ignore si cette hypothèse est nécessaire). Le dernier paragraphe de cette section étudie les liens entre entropie et translations rationnelles.

2.1 Ergodicité d'une mesure

Définition 2.2 *Soit $(\mathbb{S}_1, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, μ est dite ergodique pour T si pour tout B tel que $T^{-1}(B) = B$, $\mu(B) = 0$ ou 1.*

En notant $M(\mathbb{S}_1)^T$ l'ensemble des mesures invariantes par T, on vérifie facilement que $M(\mathbb{S}_1)^T$ est un convexe fermé (pour la topologie faible) de $M(\mathbb{S}_1)$. Le théorème de Krein-Millman assure que $M(\mathbb{S}_1)^T$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Il suffit donc de connaitre les points extrémaux de cet ensemble pour le décrire complètement. La propriété suivante justifie l'introduction des mesures ergodiques.

Proposition 2.1 *Les points extrémaux de $M(\mathbb{S}_1)^T$ sont exactement les mesures ergodiques.*

Avant de démontrer cette proposition, étudions le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Soit μ une mesure invariante par T et ergodique pour T. Soit ν une mesure invariante par T qui admet une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à μ, alors ν est proportionnelle à μ.*

Démonstration :
Notons $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, il faut donc montrer que f est constante μ p.p.

ÉTAPE I : Montrons que $f = f \circ T$ μ p.p. :

$$T_*\nu(A) = \int_{T^{-1}A} f(x)d\mu(x)$$

D'autre part,

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x) = \int_{T^{-1}A} f(Tx)d\mu(x)$$

La deuxième égalité vient de la formule de changement de variable mentionnée plus haut, que l'on peut utiliser car μ est invariante. Puisque $T_*\nu = \nu$, on obtient :

$$T_*\nu(A) = \int_{T^{-1}A} f(Tx)d\mu(x)$$

Donc f et $f \circ T$ sont deux densités pour $T_*\nu$ et elles sont égales μ p.p..

ÉTAPE II : Montrons que f est constante μ p.p. :

Par l'absurde, supposons que f n'est pas constante μ p.p., et construisons un ensemble invariant par T de mesure ni nulle ni pleine. Comme f n'est pas constante μ p.p., il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $A = f^{-1}(]-\infty; x[)$ vérifie $0 < \mu(A) < 1$. Définissons le borélien invariant par T suivant :

$$B = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} T^{-n}(A)$$

Comme $f = f \circ T$ μ p.p., A et $T^{-1}(A)$ coïncident en dehors d'une partie négligeable. Plus généralement, $T^{-n}(A)$ et A coïncident en dehors d'une partie négligeable. Par σ-additivité, B a la même mesure que A. On a donc trouvé un ensemble invariant avec $0 < \mu(B) < 1$ ce qui contredit l'ergodicité de la mesure μ.

$\square$

Démonstration de la proposition 2.1 :

Étudions tout d'abord le sens indirect. Si μ est ergodique et $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$. Il s'agit de montrer que $t = 0$ ou 1. En d'autres termes, il faut montrer que $t \neq 0$ impose $\mu_1 = \mu$. On se place désormais dans l'hypothèse $t \neq 0$.

Les ensembles de mesure nulle pour μ sont aussi de mesure nulle pour μ_1 donc $\mu_1 << \mu$. D'après le lemme, ces deux mesures sont proportionnelles. Mais ce sont également des mesures de probabilités, elles sont donc égales.

Réciproquement, soit μ une mesure extrémale, supposons qu'elle n'est pas ergodique. Il existe donc A_1 tel que $T^{-1}(A_1) = A_1$ et $0 < \mu(A_1) < 1$. On pose $A_2 = A_1^c$, on a également $T^{-1}(A_2) = A_2$. Définissons $\mu_i = \frac{1}{\mu(A_i)}\mu_{|A_i}$ qui est bien invariante. En effet,

$$\mu_i(T^{-1}(A)) = \frac{1}{\mu(A_i)}\mu((T^{-1}(A))\cap A_i) = \frac{1}{\mu(A_i)}\mu(T^{-1}(A\cap A_i)) = \frac{1}{\mu(A_i)}\mu(A\cap A_i) = \mu_i(A).$$

Alors on vérifie aisément que $\mu = \mu(A_1)\mu_1 + \mu(A_2)\mu_2$.

$\square$

On aura également besoin du résultat suivant qui est fondamental.

Théorème 2.1 ***(Théorème ergodique de Birkhoff)*** *Soient* $(\mathbb{S}_1, \mu, T)$ *un sytème dynamique mesuré, avec* μ *ergodique pour* T*,* f *une fonction borélienne positive, alors pour* μ *presque tout* $x_0 \in \mathbb{S}_1$ *:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} f(T^i x_0) = \int f(x) d\mu(x).$$

Remarque : D'un point de vue heuristique, ce résultat exprime que si l'on fixe un point de $\mathbb{S}_1$, l'ensemble des itérés de x par T explore tout le cercle de manière relativement homogène. Le théorème ergodique de Birkhoff rappelle le théorème de comportement asymptotique des chaînes de Markov. Pour la démonstration, le lecteur pourra se reporter au cours de deuxième année sur les systèmes dynamiques.

2.2 Entropie d'un système dynamique

Ce paragraphe est volontairement alusif. Il présente les principales définitions en rapport avec l'entropie métrique. Les résultats ne sont pas démontrés mais on pourra se reporter au cours de deuxième année de systèmes dynamiques. Pour la suite de l'exposé, il suffit de retenir le dernier résultat de cette partie.

Définition 2.3 *Soit* α *une partition mesurable (i.e. une partition finie ou dénombrable formée d'ensembles mesurables),* μ *une mesure de probabilité, on appelle information de* α *la fonction :*

$$I_\alpha(x) = \sum_{J\in\alpha} -\log \mu(J) 1_J(x).$$

D'autre part, on définit l'entropie de α *comme l'information moyenne*

$$H(\alpha) = \int I_\alpha(x) d\mu(x) = \sum_{J\in\alpha} -\mu(J) \log \mu(J).$$

Remarque : L'entropie de α mesure l'information supplémentaire que nous donne la partition α sur le comportement du système dynamique.

On admet la propriété suivante :

Proposition 2.2 **(sous-additivité)** *Soient* α *et* β *deux partitions, on note* $\alpha \vee \beta$ *la partition formée des intersections des éléments de* α *et de* β*. On généralise bien entendu cette définition à* n *partitions.*
Alors

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

Définition 2.4 *La limite* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$ *existe, on la note* $h_\mu(\alpha)$. *On définit l'entropie* h_μ *de* μ *comme la borne supérieure sur les partitions mesurables* α *des* $h_\mu(\alpha)$.

Démonstration :

Posons $a_n = H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$, on a alors par la sous-additivité de l'entropie d'une partition :

$$H(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}\alpha) \leq H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) + H(\bigvee_{i=n}^{n+m-1} T^{-i}\alpha) = a_n + a_m$$

La deuxième égalité vient de l'invariance de μ par T. En effet, il est clair d'après l'expression de $H(\alpha)$ que $H(\alpha) = H(T^{-1}\alpha)$. La deuxième égalité découle directement de $\bigvee_{i=n}^{n+m-1} T^{-i}\alpha = T^{-n}(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha)$. On a donc $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ et un lemme connu prouve que $\frac{a_n}{n}$ converge.

□

Le théorème suivant permet de calculer effectivement les entropies :

Théorème 2.2 ***(Kolmogorov, Sinaï)*** *Soit* α *une partition mesurable telle que la suite de partitions* $\alpha_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ *engendre en tant que* σ*-algèbre la tribu des boréliens, alors*

$$h_\mu = h_\mu(\alpha).$$

2.3 Entropie relative à une tribu

Définition 2.5 ***(entropie relative à une tribu)***

Soit $\mathcal{B}$ *une sous-tribu des boréliens. L'information de* α *relativement à la tribu* $\mathcal{B}$ *est la fonction*

$$I_{\alpha|\mathcal{B}}(x) = \sum_{J\in\alpha} -log(P(J|\mathcal{B})(x))1_J(x)$$

L'entropie de α *relativement à la tribu* $\mathcal{B}$ *est*

$$H(\alpha|\mathcal{B}) = \int I_{\alpha|\mathcal{B}}(x)d\mu(x).$$

Remarque : L'information relative traduit l'information supplémentaire apportée par une partition sachant que l'on connaît une tribu.

Remarque : Par exemple, il est aisé de vérifier les propriétés intuitives suivantes :

$$H(\alpha) = H(\alpha|\{\emptyset, \mathbb{S}_1\})$$

$$H(\alpha|\mathcal{B}) = 0$$

On admet la proposition suivante qui est nécessaire pour le calcul de l'entropie dans la section suivante. On pourra se reporter au paragraphe 5.2 du livre de Petersen [4] pour la démonstration.

Proposition 2.3 *Pour α une partition mesurable, on note $\mathcal{B}(\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}\alpha)$ la tribu engendrée par les $\alpha_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De même, $\mathcal{B}(\bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\alpha)$ est la tribu engendrée par les $T^{-1}\alpha_n$ pour $n \geq 1$.*

Pour α une partition mesurable finie, *on a*

$$h_\mu(\alpha) = H(\alpha|\mathcal{B}(\bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\alpha))$$

2.4 Relation entre entropie et translations

On se place désormais dans le cas du cercle muni de la multiplication T des angles par p. De plus, μ représentera toujours une mesure invariante par T.

Remarque : La seule mesure invariante par toutes les rotations dans $\mathbb{S}_1$ (c'est-à-dire les translations de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) est la mesure de Lebesgue. Inspirons-nous de cette remarque et étudions l'action des translations sur notre mesure. En particulier, peut-on relier entropie et translations ? Le but de cette section est donc de trouver une caractérisation simple des mesures ergodiques à entropie strictement positive.

Notations : on pose

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{p^n-1} \mu * \delta_{\frac{i}{p^n}} = \sum_{i=0}^{p^n-1} \mu(. + \frac{i}{p^n}).$$

On désigne pas $\mathcal{B}_n$ la tribu des boréliens invariants par la translation $x \mapsto x + \frac{1}{p^n}$. Remarquons que μ est absolument continue par rapport à ω_n (car $\mu \leq \omega_n$). On note donc ϕ_n sa dérivée de Radon-Nikodym.

Remarque : Pour la mesure de Lebesgue, $\phi_n(x) = \frac{1}{p^n}$ qui tend vers 0. Peut-on généraliser ce résultat à toutes les mesures ergodiques à entropie strictement positive ?

Proposition 2.4 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_n(x) = \phi_1(x)\phi_1(Tx)...\phi_1(T^{n-1}x)$ μ p.p.*

Lemme 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d\omega_n}{d\omega_{n+1}}(x) = \phi_1(T^n x)$ μ p.p.*

Démonstration :

Notons $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des intervalles de diamètre inférieur à $\frac{1}{p^n}$.

Étape I : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que, pour tout $I \in \mathcal{E}_n$, en posant $A = T^n I$, on a $\omega_n(I) = \mu(A)$.

Par définition de I et A,

$$\omega_n(I) = \sum_{i=0}^{p^n-1} \mu(I + \frac{i}{p^n}) = \mu(T^{-n}A) = \mu(A)$$

La deuxième égalité étant dûe au fait que $T^{-n}(A)$ est l'union disjointe des $I + \frac{i}{p^n}$. La troisième égalité est dûe quant à elle à l'invariance de μ.

ÉTAPE II : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout I dans $\mathcal{E}_{n+1}$, en posant toujours $A = T^n I$, $\omega_{n+1}(I) = \omega_1(A)$

Comme $I \in \mathcal{E}_{n+1}$, $\omega_{n+1}(I) = \mu(TA)$ en utilisant la première étape ($T(A) = T^{n+1}(I)$). Donc $\omega_{n+1}(I) = \mu(T^{-1}(TA))$ qui vaut $\omega_1(A)$.

ÉTAPE III : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d\omega_n}{d\omega_{n+1}}(x) = \phi_1(T^n x)$ μ p.p.

En effet, pour μ presque tout x, si l'on considère (I_m) une suite d'intervalles, décroissante, tendant vers le singleton $\{x\}$, alors ,

$$\frac{\omega_n(I_m)}{\omega_{n+1}(I_m)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d\omega_n}{d\omega_{n+1}}(x)$$

Or $\frac{\omega_n(I_m)}{\omega_{n+1}(I_m)} = \frac{\mu(T^n(I_m))}{\omega_1(T^n(I_m)}$ pour m assez grand. Puisque (I_m) décroît vers $\{x\}$, $T^n(I_m)$ décroît vers $\{T^n(x)\}$. On en déduit :

$$\frac{\omega_n(I_m)}{\omega_{n+1}(I_m)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_1(T^n x)$$

Donc μ p.p., $\frac{d\omega_n}{d\omega_{n+1}}(x) = \phi_1(T^n x)$

□

Démonstration de la proposition 2.4 :
Vérifions que $\phi_n(x) = \phi_1(x)\phi_1(Tx)...\phi_1(T^{n-1}x)$ par récurrence.
Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons l'hypothèse vraie au rang n,
Soit A un borélien, on a donc

$$\mu(A) = \int_A \phi_n(x)d\omega_n(x) = \int_A \phi_1(x)\phi_1(Tx)...\phi_1(T^{n-1}x)d\omega_n(x)$$

Or, par définition de la densité, pour toute fonction f borélienne positive,

$$\int f(x)d\omega_n(x) = \int f(x)\phi_1(T^n x)d\omega_{n+1}(x)$$

En appliquant à $1_A(x)\phi_1(x)\phi_1(Tx)...\phi_1(T^{n-1}x) \geq 0$, on trouve :

$$\mu(A) = \int_A \phi_n(x)d\omega_n(x) = \int_A \phi_1(x)\phi_1(Tx)...\phi_1(T^n x)d\omega_{n+1}(x)$$

Par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, $\phi_n(x) = \phi_1(x)\phi_1(Tx)...\phi_1(T^{n-1}x)$ μ p.p.

□

Proposition 2.5 *(expression de l'entropie en fonction d'une dérivée de Radon-Nikodym) Soit* $(\mathbb{S}_1, \mu, T)$ *un système dynamique mesuré, alors*

$$h_\mu = -\int \log \phi_1(x) d\mu(x)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3 *Soit* $\alpha = \frac{j_0}{p^n}$*, posons* $J = [\alpha, \alpha + p^{-n}[$*. Définissons*

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{p^n-1} 1_J(x + \frac{j}{p^n})\phi_n(x + \frac{j}{p^n})$$

Alors ψ *est la fonction* p^{-n}*-périodique coïncidant avec* ϕ_n *sur* J *et* $P(J|\mathcal{B}_n)(x) = \psi(x)$

Démonstration :

Le fait que ψ est p^{-n} périodique et coincide avec ϕ_n sur J est évident.

Pour montrer la deuxième relation, utilisons la propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle. Soit E un ensemble $\mathcal{B}_n$ mesurable, il faut montrer que $\int_E \psi(x) d\mu(x) = \mu(E \cap J)$.

$$\int_E \psi(x) d\mu(x) = \int_E \sum_{j=0}^{p^n-1} 1_J(x + \frac{j}{p^n})\phi_n(x + \frac{j}{p^n}) d\mu(x)$$

D'après l'expression de ψ, d'où :

$$= \sum_{j=0}^{p^n-1} \int_{E - \frac{j}{p^n}} 1_J(x)\phi_n(x) d(\mu * \delta_{\frac{j}{p^n}})(x)$$

On a intervertit la somme et l'intégrale et utilisé un changement de variable ; d'autre part, comme E est $\mathcal{B}_n$-mesurable, $E = E - \frac{j}{p^n}$.

$$= \sum_{j=0}^{p^n-1} \int_{E \cap J} \phi_n(x) d(\mu * \delta_{\frac{j}{p^n}})(x)$$

$$= \int_E 1_J(x) \sum_{j=0}^{p^n-1} \phi_n(x) d(\mu * \delta_{\frac{j}{p^n}})(x)$$

Or $\sum_{j=0}^{p^n-1} d(\mu * \delta_{\frac{j}{p^n}}) = d\omega_n$, d'où

$$= \int_{E \cap J} \phi_n(x) d\omega_n(x) = \mu(E \cap J)$$

$\square$

Démonstration de la proposition 2.5 :

Posons α la partition composée des $[\frac{i}{p}, \frac{i+1}{p}[$. Conformément à la notation du paragraphe précédent, $\alpha_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ est la partition des intervalles ouverts de la forme $[\frac{i}{p^n}, \frac{i+1}{p^n}[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\int log(\phi_n(x))d\mu(x) = \int \sum_{J\in\alpha_n} -log(\phi_n(x))1_J(x)d\mu(x)$$

Or, pour $x \in J$, ψ et ϕ_n coincident c'est-à-dire $\phi_n(x) = P(J|\mathcal{B}_n)(x)$, donc

$$-\int log(\phi_n(x))d\mu(x) = \int \sum_{J\in\alpha_n} -log(P(J|\mathcal{B}_n)(x))1_J(x)d\mu(x)$$

$$= \int I_{\alpha_n|\mathcal{B}_n}(x)d\mu(x) = H(\alpha_n|\mathcal{B}_n) \qquad (1)$$

Les intervalles ouverts de la forme $[\frac{i}{p^n}, \frac{i+1}{p^n}[$ pour $n \in \mathbb{N}$ engendrent bien la tribu des boréliens. Cette propriété permet d'écrire deux choses.

Premièrement, d'après le théorème 2.2 (théorème de Kolmogorov Sinaï), $h_\mu = h_\mu(\alpha)$.

Deuxièmement, cette hypothèse se traduit avec les notations de la proposition 2.3 par :

$$\mathcal{B}_1 = T^{-1}\mathcal{B}_0 = T^{-1}\mathcal{B}(\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}\alpha) = \mathcal{B}(\bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\alpha)$$

Donc d'après la proposition 2.3, $H(\alpha|\mathcal{B}_1) = h_\mu(\alpha)$.

De plus, l'expression (1) appliquée à $n = 1$ s'écrit :

$$-\int \log(\phi_1(x))d\mu(x) = H(\alpha|\mathcal{B}_1)$$

Finalement,

$$-\int \log(\phi_1(x))d\mu(x) = h_\mu(\alpha) = h_\mu$$

$\square$

Proposition 2.6 *Soient $p > 1$ un entier et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_1$, invariante par $T : x \mapsto px$ et ergodique pour T. Alors, μ a une entropie strictement positive si et seulement si la suite $\phi_n(x)$ tend vers 0 μ p.p..*

Démonstration :

D'après la proposition 2.5 l'entropie de μ a pour expression :

$$h_\mu = \int -log\phi_1(x)d\mu(x).$$

Pour le sens direct, d'après l'expression de $\phi_n(x)$, on obtient μ p.p. :

$$\log(\phi_n(x)^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(log(\phi_1(T^i x))).$$

Comme μ est ergodique pour T, par le théorème de Birkhoff, pour μ presque tout x :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(log(\phi_1(T^i x)) \to \int log(\phi_1(x))d\mu(x) = -h_\mu$$

Donc $\phi_n(x)^{\frac{1}{n}} \to e^{-h_\mu} < 1$ et $\phi_n(x) \sim e^{-nh_\mu} \to 0$ μ p.p..

Réciproquement, si l'entropie de μ vaut 0, alors, comme $\mu \leq \omega_1$, on trouve $\phi_1(x) \leq 1$. Puisque $h_\mu = -\int log\phi_1(x)d\mu(x)$ est une intégrale nulle de fonction positive, on en déduit $\phi_1(x) = 1$ μ p.p. et alors $\phi_n(x) = 1$ μ p.p..

□

3 Classification des mesures invariantes

3.1 Préliminaires

Une mesure invariante μ sur $\mathbb{S}_1$ peut se décomposer en une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue (celle-ci peut s'écrire comme somme dénombrable de mesures de Dirac). Il est facile de vérifier que la mesure étrangère à la mesure de Lebesgue est également invariante. On en déduit que la mesure absolument continue est également invariante. Comme dans cette partie, la mesure est ergodique, elle est soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, soit étrangère à cette dernière.

Dans le deuxième cas, on dispose de la propriété suivante qui prouve qu'aucune mesure invariante, ergodique, étrangère à la mesure de Lebesgue n'a une entropie strictement positive :

Proposition 3.1 *Soit μ une mesure invariante, ergodique, étrangère à la mesure de Lebesgue, alors μ est une somme finie de mesures de Dirac. En particulier, elle a une entropie nulle.*

Démonstration :

A priori, μ est une somme dénombrable de mesures de Dirac $\sum a_i\delta_{x_i}$.
Notons $A = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ (A est l'ensemble des atomes de μ).

ÉTAPE I : Montrons que A contient une orbite cyclique finie :

En effet, supposons tout d'abord que A contient un irrationnel x. Alors les $T^{-n}(\{x\})$ sont des ensembles disjoints de même masse $\mu(\{x\})$. En effet, le fait que ces ensembles aient la même masse vient de l'invariance de μ. De plus, si $T^{-n}(\{x\}) \cap T^{-m}(\{x\}) \neq \emptyset$ avec $n \neq m$, alors il existe α et β rationnels tels que $\frac{x}{p^n} + \alpha = \frac{x}{p^m} + \beta$ ce qui implique facilement que x est rationnel. Donc il ne peut y avoir d'irrationnels dans A sinon μ serait de masse infinie.

Il existe donc un rationnel r dans A de dénominateur de la forme $p^a q$ avec p et q premiers entre eux. Or, puisque x est dans l'image réciproque de Tx, on en déduit que Tx est dans A si x est dans A. En particulier $r' = p^a r$ est dans A et a un dénominateur premier avec p. D'après la première partie, $O(r')$ est une orbite cyclique finie qui est incluse dans A puisqu'il existe n tel que $T^n r' = r'$.

Étape II : Vérifions que μ est bien une somme finie de mesures de Dirac :

Posons $B = O(r')$. On a $\mu(B) = \mu(B) + \mu(T^{-1}(B) - B)$ par invariance. Donc $\mu(T^{-1}(B) - B) = 0$. On en déduit que μ induit une mesure invariante ν sur B. Comme notre mesure est supposée ergodique, μ vaut ν qui est bien une somme finie de mesures de Dirac.

Étape III : Montrons que l'entropie de μ est nulle :

Il est clair qu'une mesure de Dirac a une entropie nulle. Il est possible de montrer que l'entropie d'une combinaison barycentrique finie de mesures est le barycentre des entropies (voir [1] pour la démonstration). On en déduit que l'entropie de μ est nulle.

$\square$

Nous supposerons donc sans perte de généralité que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et nous noterons f sa densité de Radon-Nikodym.

Remarque : Puisque $d\mu(x) = f(x)d\lambda(x)$, $d\omega_n(x) = \sum_{i=0}^{p^n-1} f(x + \frac{i}{p^n})d\lambda(x)$. Donc si $f(x) \neq 0$,

$$\frac{d\mu}{d\omega_n}(x) = \frac{f(x)}{\sum_{i=0}^{p^n-1} f(x + \frac{i}{p^n})} \neq 0$$

$\phi_n(x) = \frac{d\mu}{d\omega_n}(x) = 0$ implique donc $f(x) = 0$. On en déduit que $\phi_n(x) > 0$ μ p.p..

3.2 Somme de Gauss

Dans ce paragraphe, p et q sont deux entiers > 1, premiers entre eux, et $a \neq 0$ un entier. Pour chaque $k > 0$, on définit la suite des résidus $(aq^n \mod p^k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 3.1 *La suite* $(aq^n \mod p^k)_n$ *est périodique. On note* T_k *sa période. Il existe* $C_a > 0$ *tel que pour tout* k *assez grand,* $T_k = C_a p^k$.

Démonstration :

la suite $(aq^n \mod p^k)_n$ est en fait la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la multiplication par q dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Il suffit donc pour que (u_n) soit périodique qu'elle prenne deux fois la même valeur. Or ceci advient forcément car (u_n) est à valeurs dans un ensemble fini.

Démontrons la seconde partie du lemme. On peut écrire $a = p^m b$ avec p et b premiers entre eux. Pour $k > m$, on a alors $u_n = u_{n'}$ si et seulement si p^n divise $a(q^n - q^{n'}) = p^m b(q^n - q^{n'})$. C'est à dire p^{k-m} divise $q^{n-n'} - 1$ car $p \wedge q = 1$. D'après le théorème d'Euler, ceci équivaut à $\phi(p^{k-m}) = (p-1)p^{k-m-1}$ divise $n - n'$. On en déduit que $T_k = (p-1)p^{k-m-1}$. La propriété est donc vraie si l'on pose $C_a = \frac{p-1}{p^{m+1}}$.

□

On note $e(x) = e^{2i\pi x}$. Pour chaque $N > 0$ et $a > 0$ entiers, on définit :

$$g_{a,N}(x) = \sum_{l=0}^{N-1} e(aq^l x)$$

Proposition 3.2 *Si* $1 \leq N \leq T_k$, *alors*

$$\int \frac{|g_{a,N}(x)|^2}{\phi_k(x)} d\mu(x) \leq \frac{p^k}{N}$$

Démonstration :

Comme $d\mu(x) = \phi_k(x) d\omega_k(x)$ et comme $K = \{x \in \mathbb{S}_1, \phi_k(x) \neq 0\}$ est de mesure pleine d'après la remarque du paragraphe précédent, on peut écrire μ p.p. : $\frac{1}{\phi_k(x)} d\mu(x) = d\omega_k(x)$. Comme $d\omega_n(x) \geq 0$, on peut écrire pour tout x, $\frac{1}{\phi_k(x)} d\mu(x) \leq d\omega_k(x)$ avec la convention $\frac{0}{0} = 0$. D'où :

$$\int \frac{|g_{a,N}(x)|^2}{\phi_k(x)} d\mu(x) \leq \int |g_{a,N}(x)|^2 d\omega_k(x)$$

D'après l'expression de ω_k,

$$\int \frac{|g_{a,N}(x)|^2}{\phi_k(x)} d\mu(x) \leq \int \sum_{j=0}^{p^k-1} |g_{a,N}(x + \frac{j}{p^k})|^2 d\mu(x) = \int S(x) d\mu(x)$$

avec

$$S(x) := \sum_{j=0}^{p^k-1} \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e(aq^n(x + \frac{j}{p^k}))e(-aq^l(x + \frac{j}{p^k}))$$

ou mieux :

$$S(x) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e(a(q^n - q^l)x) \sum_{j=0}^{p^k-1} e(a(q^n - q^l)\frac{j}{p^k})$$

Soit $0 \leq n, l \leq N \leq T_k$,

- Si $n \neq l$, on a $aq^n \neq aq^l \mod p^k$ (en effet, sinon on aurait $T_k < N$ ce qui serait absurde). Donc $e(a(q^n - q^l)p^{-k})$ est différent de 1 et

$$\sum_{j=0}^{p^k-1} e(a(q^n - q^l)\frac{j}{p^k}) = 0$$

- Si $n = l$, alors

$$\sum_{j=0}^{p^k-1} e(a(q^n - q^l)\frac{j}{p^k}) = p^k$$

Finalement on obtient $S(x) = \frac{p^k}{N}$ et

$$\int \frac{|g_{a,N}(x)|^2}{\phi_k(x)} d\mu(x) \leq \frac{p^k}{N}$$

$\square$

3.3 Classification des mesures invariantes ergodiques à entropie strictement positive

Rappelons que nous considérons des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Lemme 3.2 *Soit μ une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que*

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad \int e(ax)d\mu(x) = 0$$

Alors μ est la mesure de Lebesgue.

Démonstration :

Soit f la densité de μ par rapport à λ. L'hypothèse sur μ se traduit par

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad \int e(ax)f(x)dx = 0$$

D'autre part, comme μ est une mesure de probabilité,

$$\int f(x)dx = 1$$

f est l'unique fonction de L^1 possédant pour développement de Fourrier la suite $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ $\forall n \geq 1$. f vaut donc 1 λ p.p., donc $\mu = \lambda$.

$\square$

Théorème 3.1 *Soient p et q deux entiers > 1 premiers entre eux, et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_1$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Supposons que μ est invariante par $T : x \to px$ et $S : x \to qx$, ergodique pour T, et que le système $(\mathbb{S}_1, T, \mu)$ a une entropie strictement positive. Alors μ est la mesure de Lebesgue.*

Démonstration :

D'après le lemme, il suffit de montrer pour tout $a \neq 0$ entier :

$$\int e(ax)d\mu(x) = 0$$

Comme μ est invariante par $S : x \to qx$, $\int e(aq^n x)d\mu(x) = \int e(aq^{n+1}x)d\mu(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En sommant les T_k premiers termes, on obtient facilement $\int g_{a,T_k}(x)d\mu(x) = \int e(ax)d\mu(x)$. Finalement il suffit de montrer le résultat suivant :

$$\int g_{a,T_k}(x)d\mu(x) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or par Cauchy-schwarz,

$$\left|\int g_{a,T_k}(x)d\mu(x)\right|^2 d\mu(x) \leq \int \frac{|g_{a,T_k}(x)|^2}{\phi_k(x)} d\mu(x) \ . \ \int \phi_k(x)d\mu(x)$$

Evaluons les deux termes de cette inégalité :

Le premier a été majoré dans le paragraphe précédent, en effet, il existe C_a tel que pour k assez grand, $T_k = C_a p^k$. D'où,

$$\int \frac{|g_{a,T_k}(x)|^2}{\phi_k(x)} d\mu(x) \leq \frac{p^k}{T_k} = \frac{1}{C_a}$$

Pour le second terme, comme μ est ergodique pour T et à entropie strictement positive, la proposition 2.6 permet de dire que $\phi_k(x) \to 0$ μ p.p.. On en déduit que $\int \phi_k(x)d\mu(x) \to 0$ par convergence dominée ($\phi_k(x) \leq 1$ μ p.p.).

Finalement,

$$\left|\int g_{a,T_k}(x)d\mu(x)\right|^2 \leq \frac{1}{C_a}\int \phi_k(x)d\mu(x) \to 0$$

On en déduit que μ est la mesure de Lebesgue. $\square$

Puisque une mesure invariante, ergodique, étrangère à la mesure de Lebesgue n'a jamais une entropie strictement positive, tous ces résultats mènent au théorème suivant :

Théorème 3.2 ***(Rudolph, 1990)*** *Soit μ une mesure de probabilité invariante, ergodique et possèdant une entropie strictement positive par rapport au doublement ou au triplement d'angle, alors μ est la mesure de Lebesgue.*

Remarque : Le résultat important de ce théorème est surtout la description des mesures absolument continues puisque si l'on enlève la condition d'entropie strictement positive, on obtient des mesures de probabilité invariantes, étrangères à la mesure de Lebesgue et ergodiques comme la mesure de Dirac en 0. En fait, les mathématiciens aimeraient démontrer la conjecture suivante :

Conjecture 3.1 ***(Furstenberg, 1967)*** *Les seules mesures invariantes par le doublement et le triplement d'angle sont des combinaisons barycentriques de masses de Dirac et de la mesure de Lebesgue.*

Conclusion

Dans la première partie, nous avons montré que le seul compact invariant infini du système dynamique formé du cercle et de la multiplication des angles par 2 et 3 est le cercle tout entier. La même démonstration montre que le résultat est encore vrai en considérant la multiplication des angles par p et q multiplicativement indépendants (c'est à dire qu'ils ne sont pas la puissance d'un même entier).

Dans la dernière partie, nous avons montré que si p et q sont premiers entre eux, la seule mesure de probabilité invariante par $T : x \mapsto px$ et $S : x \mapsto qx$, ergodique pour T et à entropie strictement positive pour T est la mesure de Lebesgue. Des généralisations de ce résultat existent : Johnson a montré par exemple que le résultat est encore vrai pour p et q multiplicativement indépendants. D'autre part, nous avons vu que l'hypothèse d'ergodicité ne réduit pas la généralité.

Par contre, l'hypothèse d'entropie strictement positive ne semble pas naturelle : en fait, on retrouve cette hypothèse dans de nombreux problèmes de systèmes dynamiques. Parvenir à résoudre ce problème sans l'hypothèse d'entropie strictement positive est un problème majeur en systèmes dynamiques : en effet, les méthodes utilisées se généraliseraient sans doute à un grand nombre d'autres problèmes.

Références

[1] Yves Benoist et Frédéric Paulin. *Systèmes dynamiques.* Notes de cours aux carrés à l'ENS.

[2] Harry Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Mathematical Systems Theory*, jan 1967.

[3] Bernard Host. Nombres normaux, entropie, translations. *Israel journal of mathematics*, (91) :1359–1377, 1995.

[4] Karl Petersen. *Ergodic theory.* Cambridge university press, 1983.

[5] Daniel J. Rudolph. x2 and x3 invariant mesures and entropy. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, (10), 1990.